VISIT…

LANZAROTE
Caliente.COM

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

КЛАССИКИ НАУКИ



УИЛЬЯМ РОУЭН ГАМИЛЬТОН

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

ОПТИКА
ДИНАМИКА
КВАТЕРНИОНЫ

Ответственный редактор
доктор физико-математических наук
Л.С. ПОЛАК



МОСКВА "НАУКА" 1994

ББК 22.3г
Г 18
УДК 535 + 531.314 + 512.641

СЕРИЯ "КЛАССИКИ НАУКИ"

Серия основана академиком *С.И. Вавиловым* в 1945 г.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

А.А. Баев (председатель), *И.Е. Дзялошинский, А.Ю. Ишлинский, С.П. Капица,* *И.Л. Кнунянц*, *С.Р. Микулинский*, *Д.В. Ознобишин* (ученый секретарь), *Л.С. Полак,* *Я.А. Смородинский*, *А.С. Спирин, И.Т. Фролов, А.Н. Шамин, А.Л. Яншин*

Издание подготовили
Н.В. Александрова, Ю.А. Данилов, Л.С. Полак

Рецензент
академик *В. Л. Гинзбург*

Гамильтон Уильям Роуэн

Г18 Избранные труды: Оптика. Динамика. Кватернионы. – М.: Наука, 1994. – 560 с. – (Классики науки).
ISBN 5-02-000192-9

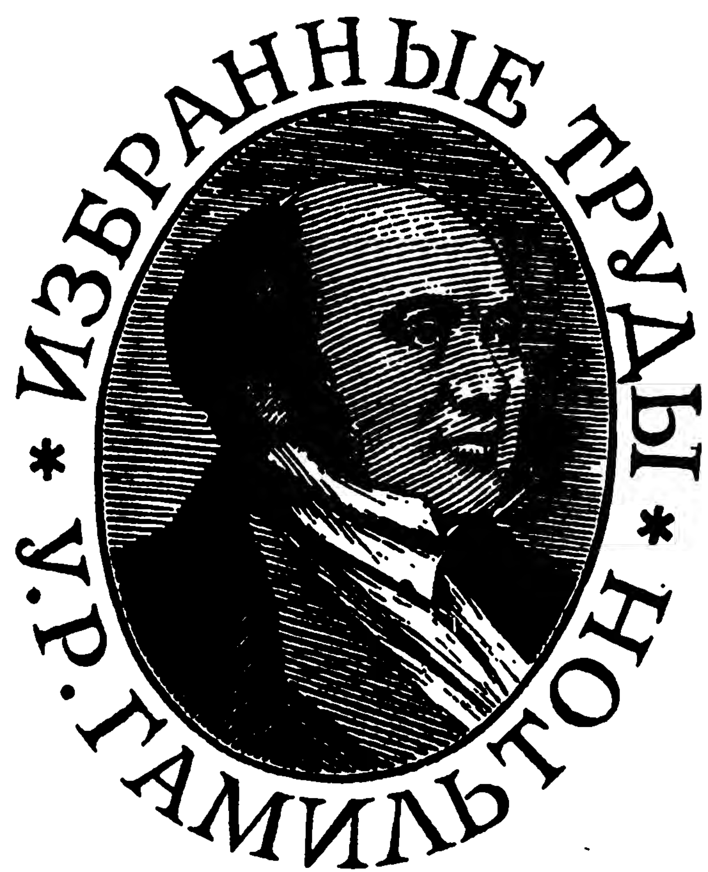
В книгу выдающегося ирландского ученого У.Р. Гамильтона (1805–1865) включены основополагающие работы по геометрической оптике, физической оптике, оптико-механической аналогии, динамике, теории кватернионов. В Приложениях помещены статьи о жизни и творчестве ученого, комментарии к его работам, библиография трудов. Многие работы публикуются на русском языке впервые.

Книга представляет интерес для математиков, механиков, физиков и историков науки.

Г $\frac{1601000000\text{-}291}{042(02)\text{-}94}$ 274-90, II полугодие — ББК 22.3г

ISBN 5-02-000192-9

© Н.В. Александрова, Ю.А. Данилов, Л.С. Полак, составление и перевод, 1994
© Российская академия наук, 1994


ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ * У.Р. ГАМИЛЬТОН *

ОТ РЕДАКТОРА

Уильям Роуэн Гамильтон (1805–1865) – замечательный ирландский математик, основные работы которого относятся к математической физике, аналитической механике и теории гиперкомплексных чисел. Вот краткое перечисление важнейших его результатов.

1. Геометрическая оптика (основное уравнение, расчеты систем лучей – распространение, отражение, преломление света в неоднородных и неизотропных средах, предсказание и открытие внешней и внутренней конической рефракции).

2. Физическая оптика (открытие различия между групповой и волновой скоростью света).

3. Оптико-механическая аналогия (принцип Ферма и принцип наименьшего действия).

4. Динамика (вариационный принцип Гамильтона, гамильтониан, канонические уравнения Гамильтона, уравнение Гамильтона–Якоби, вариационные методы интегрирования уравнений движения).

5. Теория кватернионов (гиперкомплексные числа, символические операторы, исчисление векторов, уравнение Гамильтона–Кэли, годограф, линейные преобразования и т.д.).

Общеизвестна роль так называемого гамильтонова формализма в квантовой механике, теории (квантованных) полей и т.п., роль его динамики в развитии теоретико-группового представления классической механики, значение теории кватернионов как источника векторного исчисления и т.д.

Для научного творчества Гамильтона характерно стремление к обобщению разработанных им математических методов на различные проблемы математики и физики, поиск "универсальной математики" Вселенной. Трудно указать область физики и механики, в которых не использовались бы методы Гамильтона; они находят применение и при решении многих физико-химических и биологических проблем.

Открытия Гамильтона давно стали и продолжают оставаться неотъемлемым элементом нашей картины мира; их эвристическое значение громадно и со временем все более возрастает.

Значение Гамильтона прекрасно и кратко охарактеризовал бывший президент Ирландской республики Е. де Валера: "Имя Гамильтона известно каждому математику или физику-теоретику. Ирландия – страна Гамильтона, страна великого математика".

На русский язык были переведены только работы Гамильтона по динамике в сборнике "Вариационные принципы механики" (ред., примеч. и послесловие Л.С. Полака. М.: Физматгиз, 1959; в ссылках сокращенно: ВПМ), давно ставшем библиографической редкостью.

Настоящая книга содержит основные работы Гамильтона по математической теории геометрической и физической оптики, оптико-механической аналогии, аналитической механике и исчислению кватернионов. Все переводы сделаны по английскому изданию: The mathematical papers of Sir *William Rowan Hamilton*. Cambridge: Univ. press, 1931–1967. Vol. 1–3 (в ссылках сокращенно: H. 1, 2, 3). В Приложениях помещены статьи о жизни и научном творчестве У.Р. Гамильтона, комментарии, библиография. В Дополнениях и Приложениях использованы материалы книг: *Graves R.P.* Life of Sir William Rowan Hamilton. Dublin: Univ. press, 1882–1889. Vol. 1–3 (сокращенно: Gr. 1, 2, 3) и *Полак Л.С.* Вариационные принципы механики, их развитие и применения в физике. М.: Наука, 1961 (сокращенно: ЛП).

Статья "Уильям Роуэн Гамильтон (1805—1865)" в Приложениях вместе с остальными материалами и переводами, предназначенными для книги "У. Гамильтон. Избранные труды", была написана еще в 1984 г. и в 1986 г. принята для опубликования Редакционной коллегией академической серии "Классики науки" и издательством "Наука", но не была до сих пор опубликована по независящим от авторов и переводчиков причинам. При издании настоящей книги в 1994 г. нами внесены в тексты и переводы только незначительные изменения и добавлено несколько ссылок на вышедшие в последнее время книги, содержащие гамильтонову тематику.

Ответственный редактор считает своим приятным долгом выразить глубокую признательность Ирландской академии наук за помощь в издании настоящей книги.

Л. Полак

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

ОБ ОДНОМ ВЗГЛЯДЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ОПТИКУ*

В мемуарах о системах лучей, представленных мной Королевской ирландской академии и частично опубликованных в XV и XVI томах "Transactions" этой академии, изложен взгляд на математическую оптику, который представляется мне аналогичным взглядам Декарта на алгебраическую геометрию и, по-видимому, приведет тех, кто его воспримет, к аналогичным изменениям метода. Математический комитет Британской ассоциации поощрения науки выразил пожелание, чтобы краткое изложение этого взгляда на оптику было приведено в подготавливаемом к печати издании комитета. Именно такое, по возможности краткое, изложение я сейчас представлю, стремясь как можно точнее сформулировать самый взгляд и воздерживаясь от какого бы то ни было отчета о тех результатах, к которым он привел меня.

Общая проблема, которую я поставил перед собой в оптике, состоит *в исследовании математических следствий из закона наименьшего действия* – общего закона геометрической оптики, в котором, как хорошо известно, заключены все частные случаи отражения и лучепреломления, обыкновенного и необыкновенного, в средах как с постепенно, так и с резко изменяющимся показателем преломления. *Основная идея*, из которой проистекает весь мой метод, есть *идея существования одного главного, или характеристического, соотношения для каждой оптической системы лучей*, т.е. для каждой комбинации прямолинейных или изогнутых, искривленных траекторий, по которым свет распространяется в соответствии с законом наименьшего действия. Это характеристическое соотношение различно для различных систем и обладает тем свойством, что все математические свойства системы выводятся из него подобно тому, как метод, изобретенный Декартом для алгебраического решения геометрических задач, целиком проистекает из основополагающей идеи существования одного главного соотношения для каждой кривой на плоскости или искривленной поверхности, форма которого заключает в себе все свойства кривой или поверхности. Основополагающее соотношение, рассматриваемое Декартом в соответствии с его взглядом на алгебраическую геометрию, устанавливало связь между координатами переменной точки, имеющей своим геометрическим местом данную кривую или поверхность, и числом координат, между которыми устанавливалась связь, равным двум или трем. Соотношение, рассмат-

---

* On a view of mathematical optics (June, 1832) // Brit. Assoc. Rep. 1831–1832. P. 545–547 [H. 1. P. 295–296]. Перевод Ю.А. Данилова.

риваемое мной в соответствии с моим взглядом на алгебраическую оптику, в общем случае устанавливает связь между восемью величинами, из которых шесть являются координатами двух переменных точек в пространстве, седьмая – показателем цвета, а восьмая, называемая мною *характеристической функцией* (поскольку я обнаружил, что в характере ее зависимости от семи предыдущих величин содержатся все свойства системы), – *действием* между двумя переменными точками (слово "действие" употреблено здесь в том же смысле, как и в упоминавшемся выше известном законе геометрической оптики). Я вывел основную формулу для изменения этой характеристической функции, соответствующего изменениям положений [переменных точек], от которых она зависит, и считаю, что *одна эта фундаментальная формула позволяет свести к изучению характеристической функции все задачи математической оптики*, касающиеся всех мыслимых комбинаций зеркал, линз, кристаллов и атмосфер. И хотя в мои намерения не входило включать в число указанных задач математической оптики исследования, относящиеся к *явлениям интерференции*, нетрудно понять, исходя из природы величины, названной мною характеристической функцией и являющейся согласно волновой гипотезе не чем иным, как *временем распространения света от одной переменной точки к другой*, что изучение этой функции не может не быть полезным и в подобных исследованиях. Однако мои собственные исследования до сих пор были направлены главным образом на изучение следствий из закона наименьшего действия и свойств оптических систем и вообще систем лучей. Изложив выше общий *взгляд*, которым я руководствовался в этих исследованиях, я должен отослать за *результатами* к уже упоминавшимся томам "Transactions" Королевской ирландской академии и к XVII, еще не вышедшему из печати тому, в котором по распоряжению академии будет опубликовано "Третье дополнение" к моему "Опыту теории систем лучей"[1].

ТРЕТЬЕ ДОПОЛНЕНИЕ К "ОПЫТУ ТЕОРИИ СИСТЕМ ЛУЧЕЙ"*

Введение

Настоящее дополнение содержит систему общих методов решения оптических задач и некоторые общие результаты, полученные из основной формулы и взгляда на оптику, изложенных в моих предыдущих мемуарах. Подробные содержательные заголовки, предпосланные определенным пунктам и приведенные в оглавлении, позволяют составить достаточное представление о плане настоящего сообщения. Мне остается лишь добавить несколько слов относительно некоторых наиболее важных результатов.

Из них особого внимания заслуживает, по-видимому, теория внешней и внутренней конической рефракции, выведенная с помощью моих общих методов из принципов Френеля. Уместно заметить, что эта теория была разработана и до-

---

[1] *Hamilton W.R.* Third supplement to an Essay on the theory of systems of rays // Trans. Roy. Irish Acad. 1837. Vol. 17, pt. 1. P. 1–144 [H. 1. P. 164–293]. Рус. пер. см. наст. изд.

* Third supplement to an Essay on the theory of systems of rays (Jan. 22 and Oct. 22, 1832) // Trans. Roy. Irish Acad. 1837. vol. 17, pt. 1. P. 1–144 [H. 1. P. 164–293]. Перевод Ю.А. Данилова.

ложена общему собранию Королевской ирландской академии в первую, а не во вторую из дат, указанных после заголовка настоящего "Дополнения". Сделав сообщение академии 22 октября 1832 г., я обратился к проф. Ллойду с просьбой исследовать затронутый мной вопрос экспериментально и попытаться выяснить, не удастся ли наблюдать в двухосных кристаллах явления, предсказываемые моей теорией конической рефракции. Эксперименты проф. Ллойда, подтвердившие мои предсказания, были опубликованы им в номерах "London and Edinburgh Philosophical Magazine" за февраль и март 1833 г. и в более подробном изложении помещены в этом томе ирландских "Transactions"[1].

Мне известно, что Джеймс Мак-Куллах, эсквайр, член колледжа Св. Троицы в Дублине, опубликовавший в предыдущем томе настоящих "Transactions" серию изящных геометрических иллюстраций теории Френеля, узнав об экспериментах проф. Ллойда, подтвердил своими геометрическими методами полученные мной результаты о существовании на волне Френеля конусовидных острий и окружностей касания, которые привели меня к предсказанию конической рефракции. Когда я сообщил м-ру Мак-Куллаху о том, что с помощью общей теории двойственных поверхностей, изложенной в моем докладе на общем собрании Королевской ирландской академии в прошлом году, мне удалось установить связь между остриями и окружностями на волне Френеля и такого же рода остриями и окружностями на другой поверхности, открытой месье Коши[2], м-р Мак-Куллах заявил, что пришел к аналогичным результатам независимо и вручил мне свое исследование по этому вопросу, которое я не успел изучить основательно. Надеюсь, что [м-р Мак-Куллах] вскоре представит свой труд академии и опубликует его в ирландских "Transactions"[3].

Не могу не упомянуть и о том, что когда я в ноябре прошлого года направил проф. Эри письмо, в котором сообщил о предсказанных мной остриях и окружностях на волне Френеля, а также о предсказанной мною же, но тогда еще не подтвержденной экспериментально конической рефракции, проф. Эри ответил, что ему давно известно о существовании конических острий и он удивляется, почему Френель не обратил на них внимания. Однако проф. Эри не было известно о существовании окружностей касания, и ни конусовидные острия, ни окружности не навели его на мысль о теории конической рефракции.

Эта теория была выведена моими общими методами из гипотезы поперечных колебаний в световом эфире, впервые предложенной, по-видимому, д-ром Юнгом, но сформулированной независимо и доведенной до большего совершенства Френелем, а также из другого принципа Френеля, постулирующего существование в двухосной кристаллической среде трех взаимно перпендикулярных осей упругости. Таким образом, подтверждение теории конической рефракции в экспериментах проф. Ллойда надлежит рассматривать как новый важный аргумент в пользу взглядов Френеля, т.е. как новое поощрение к теоретическим построениям на основе этих взглядов, позволяющим сочетать и предсказывать явления.

---

[1] *Lloyd H.* // Trans. Roy. Irish Acad. 1837. Vol. 17, pt. 1. P. 145–157.

[2] *Cauchy A.L.* Oeuvres complètes. Paris: Gauthier-Villars, 1911. Sér. 2. T. 12. P. 113 et seq.

[3] *MacCullagh J.* // Trans. Roy. Irish Acad. 1837. Vol. 17, pt 1. P. 241–263; Collected works. Dublin, 1897. P. 20–54 (see also: P. 17–19).

И без того большой объем настоящего "Дополнения" вынуждает меня отложить до будущих сообщений многие другие результаты, полученные с помощью моих общих методов из принципа характеристической функции, в частности общую теорию фокальных расстояний и аберраций оптических приборов вращения [1].

Обсерватория, Дублин Уильям Гамильтон
Июнь 1833

Основная формула математической оптики. План настоящего "Дополнения"

1. Будем считать, что свет распространяется по известному общему закону, известному под названием принципа наименьшего действия, или быстрейшего распространения, по любому искривленному или ломаному лучу, обыкновенному или необыкновенному, пробегая элемент луча $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ с молекулярной скоростью, или волновой медленностью v, по предположению зависящей в самом общем случае от природы среды, положения и направления элемента и цвета, присущего свету и принимающего лишь конечное число значений, если таковые заданы. Медленность v является, таким образом, функцией трех прямоугольных координат, или отметок положения, x, y, z, трех отношений дифференциалов, или направляющих косинусов,

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds}$$

и показателя, или меры, цвета χ. От вида χ, который характеризует среду, зависит функция v. Обозначим вариацию этой функции через[4]

$$\delta \mathrm{v} = \frac{\delta \mathrm{v}}{\delta x}\delta x + \frac{\delta \mathrm{v}}{\delta y}\delta y + \frac{\delta \mathrm{v}}{\delta z}\delta z + \frac{\delta \mathrm{v}}{\delta \alpha}\delta \alpha + \frac{\delta \mathrm{v}}{\delta \beta}\delta \beta + \frac{\delta \mathrm{v}}{\delta \gamma}\delta \gamma + \frac{\delta \mathrm{v}}{\delta \chi}\delta \chi$$

и с помощью соотношения $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ выберем $\delta\mathrm{v}/\delta\alpha$, $\delta\mathrm{v}/\delta\beta$, $\delta\mathrm{v}/\delta\gamma$ так, чтобы выполнялось условие

$$\alpha\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta \alpha} + \beta\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta \beta} + \gamma\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta \gamma} = \mathrm{v},$$

т.е. так, чтобы медленность v была однородной функцией степени 1 по α, β, γ. Тогда, как было показано в моем первом "Дополнении" [2], вариации определенного интеграла $\int \mathrm{v}\,ds$, рассматриваемого как функция, которую я назвал *характеристической функцией* координат начала и конца, т.е. *вариация действия, или времени, затрачиваемого светом любого одного цвета на распространение от одной переменной точки к другой*, определяется выражением

$$dV = (\delta \int \mathrm{v}\,ds) = \frac{\delta \mathrm{v}}{\delta \alpha}\delta x - \frac{\delta \mathrm{v}'}{\delta \alpha'}\delta x' + \frac{\delta \mathrm{v}}{\delta \beta}\delta y - \frac{\delta \mathrm{v}'}{\delta \beta'}\delta y' + \frac{\delta \mathrm{v}}{\delta \gamma}\delta z - \frac{\delta \mathrm{v}'}{\delta \gamma'}\delta z', \tag{1.1}$$

где штрихами обозначены начальные величины. Общее уравнение (1.1), названное

[4] В настоящем издании сохранен символ частного дифференцирования δ, принятый во времена Гамильтона, вместо современного ∂. – *Примеч. пер.*

мной *уравнением характеристической функции*, приводит к самым различным и многочисленным следствиям и, как мне кажется, включает в себя всю математическую оптику. В настоящем "Дополнении" я намереваюсь изложить некоторые дополнительные замечания и методы, связанные с характеристической функцией V и с основной формулой (1.1), в частности указать новый взгляд на вспомогательную функцию W, введенную мной в предыдущих мемуарах, и предложить новую вспомогательную функцию T, использование которой во многих оптических исследованиях сопряжено с определенными преимуществами. Я приведу также некоторые другие общие преобразования и приложения общей формулы и рассмотрю связь между моим взглядом на оптику и волновой теорией света.

Основная задача математической оптики и решение ее с помощью основной формулы. Уравнения в частных производных для характеристической функции V, общие для всех оптических комбинаций. Вывод функций среды Ω, v *из характеристической функции V. Замечания по поводу новых символов* σ, τ, υ,...

2. *Основной задачей* математической оптики, к которой сводятся все остальные, можно считать следующую: *для любой заданной комбинации сред определить закон зависимости начального и конечного направлений искривленного или ломаного луча, обыкновенного или необыкновенного, от положений двух точек, конечной и начальной, связанных визуально этим лучом, и от цвета света.* В наших обозначениях речь идет о том, чтобы определить закон зависимости конечных и начальных направляющих косинусов α, β, γ, α', β', γ' от координат x, y, z, x', y', z' конечной и начальной точек и от показателя цвета χ. Решение основной задачи дается формулой (1.1), или шестью уравнениями

$$\frac{\delta V}{\delta x} = \frac{\delta \mathrm{v}}{\delta \alpha}, \quad \frac{\delta V}{\delta y} = \frac{\delta \mathrm{v}}{\delta \beta}, \quad \frac{\delta V}{\delta z} = \frac{\delta \mathrm{v}}{\delta \gamma}, \tag{2.1}$$
$$-\frac{\delta V}{\delta x'} = \frac{\delta \mathrm{v}'}{\delta \alpha'}, \quad -\frac{\delta V}{\delta y'} = \frac{\delta \mathrm{v}'}{\delta \beta'}, \quad -\frac{\delta V}{\delta z'} = \frac{\delta \mathrm{v}'}{\delta \gamma'},$$

следующими непосредственно из (1.1) и выражающими тот самый закон зависимости, который требуется найти. Для того чтобы эти уравнения можно было применить к любой заданной комбинации [сред], необходимо знать не только вид *характеристической функции* V, т.е. закона зависимости действия, или времени от положения конечной и начальной точек и от цвета, но и вид функций v, v′, т.е. оптические свойства начальной и конечной среды. Но функции сред v, v′, начальная и конечная, сами могут быть выведены из одной лишь характеристической функции V с помощью следующего рассуждения.

Какова бы ни была природа конечной среды, т.е. каков бы ни был закон зависимости функции v от положения [конечной точки], направления и цвета, при выводе общей формулы (1.1) мы предполагаем, что выражение этой зависимости выбрано специальным образом и функция среды v – однородная функция степени 1 направляющих косинусов α, β, γ. Тогда частные производные $\delta \mathrm{v}/\delta\alpha$, $\delta \mathrm{v}/\delta\beta$, $\delta \mathrm{v}/\delta\gamma$

этой однородной функции сами являются однородными функциями, но степени 0, т.е. являются функциями двух отношений α/γ, β/γ, зависящими, вообще говоря, от координат x, y, z и показателя цвета χ. Если считать, что два отношения α/γ, β/γ исключены из первых трех уравнений (2.1) и аналогичным образом что отношения α'/γ', β'/γ' исключены из трех последних уравнений (2.1), то в результате такого исключения мы получили бы два уравнения в частных производных первого порядка, связывающие характеристическую функцию V, координаты и цвет:

$$\Omega\left(\frac{\delta V}{\delta x},\frac{\delta V}{\delta y},\frac{\delta V}{\delta z},x,y,z,\chi\right)=0,$$
$$\Omega'\left(-\frac{\delta V}{\delta x'},-\frac{\delta V}{\delta y'},-\frac{\delta V}{\delta z'},x',y',z',\chi\right)=0. \tag{2.2}$$

Оба эти уравнения приводят к следующему общему уравнению второго порядка степени 3, справедливому для всех оптических комбинаций [3]:

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta x'}\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta y'}\frac{\delta^2 V}{\delta z\delta z'}+\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y'}\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta z'}\frac{\delta^2 V}{\delta z\delta x'}+\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta z'}\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta x'}\frac{\delta^2 V}{\delta z\delta y'}=$$
$$=\frac{\delta^2 V}{\delta z\delta x'}\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta y'}\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta z'}+\frac{\delta^2 V}{\delta z\delta y'}\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta z'}\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta x'}+\frac{\delta^2 V}{\delta z\delta z'}\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta x'}\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y'}. \tag{2.3}$$

Если положить для краткости

$$\sigma=\frac{\delta V}{\delta x},\quad \tau=\frac{\delta V}{\delta y},\quad \upsilon=\frac{\delta V}{\delta z},\quad \sigma'=-\frac{\delta V}{\delta x'},\quad \tau'=-\frac{\delta V}{\delta y'},\quad \upsilon'=-\frac{\delta V}{\delta z'} \tag{2.4}$$

и исключить из первых трех уравнений (2.4) две из трех координат начальной точки x', y', z', то, как нетрудно понять, исходя из уравнений (2.2) или (2.3), третья координата окажется исключенной при любой оптической комбинации. Аналогично из трех последних уравнений (2.4) мы можем исключить все три координаты конечной точки, исключив любые две из них. Такого рода исключения переменных приводят к уравнениям (2.2) вида

$$\Omega(\sigma, \tau, \upsilon, x, y, z, \chi) = 0, \qquad \Omega'(\sigma', \tau', \upsilon', x', y', z', \chi) = 0, \tag{2.5}$$

которые в силу сказанного могут быть получены путем дифференцирования и исключения переменных из одной лишь характеристической функции V и, как мы скоро убедимся, определяют вид функций v, v′, т.е. свойства конечной и начальной среды. Сравнивая дифференциалы соотношений с соотношениями

$$\mathrm{v} = \alpha\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta\alpha}+\beta\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta\beta}+\gamma\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta\gamma}=\alpha\sigma+\beta\tau+\gamma\upsilon, \tag{2.6}$$
$$\mathrm{v}' = \alpha'\frac{\delta \mathrm{v}'}{\delta\alpha'}+\beta'\frac{\delta \mathrm{v}'}{\delta\beta'}+\gamma'\frac{\delta \mathrm{v}'}{\delta\gamma'}=\alpha'\sigma'+\beta'\tau'+\gamma'\upsilon',$$

т.е. с условиями однородности функций v и v′, выполняющимися вследствие опре-

делений (2.5) и соотношений (2.1), и с их дифференциалами

$$\alpha\delta\sigma + \beta\delta\tau + \gamma\delta\upsilon = \frac{\delta v}{\delta x}\delta x + \frac{\delta v}{\delta y}\delta y + \frac{\delta v}{\delta z}\delta z + \frac{\delta v}{\delta \chi}\delta\chi,$$

$$\alpha'\delta\sigma' + \beta'\delta\tau' + \gamma'\delta\upsilon' = \frac{\delta v'}{\delta x'}\delta x' + \frac{\delta v'}{\delta y'}\delta y' + \frac{\delta v'}{\delta z'}\delta z' + \frac{\delta v'}{\delta \chi}\delta\chi, \tag{2.7}$$

мы получаем уравнения [4]

$$\frac{\alpha}{v} = \frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}, \quad \frac{\beta}{v} = \frac{\delta\Omega}{\delta\tau}, \quad \frac{\gamma}{v} = \frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon},$$

$$\frac{\alpha'}{v'} = \frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'}, \quad \frac{\beta'}{v'} = \frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}, \quad \frac{\gamma'}{v'} = \frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'}, \tag{2.8}$$

а также уравнения

$$-\frac{1}{v}\frac{\delta v}{\delta x} = \frac{\delta\Omega}{\delta x}, \quad -\frac{1}{v}\frac{\delta v}{\delta y} = \frac{\delta\Omega}{\delta y}, \quad -\frac{1}{v}\frac{\delta v}{\delta z} = \frac{\delta\Omega}{\delta z}, \quad -\frac{1}{v}\frac{\delta v}{\delta \chi} = \frac{\delta\Omega}{\delta \chi},$$

$$-\frac{1}{v'}\frac{\delta v'}{\delta x'} = \frac{\delta\Omega'}{\delta x'}, \quad -\frac{1}{v'}\frac{\delta v'}{\delta y'} = \frac{\delta\Omega'}{\delta y'}, \quad -\frac{1}{v'}\frac{\delta v'}{\delta z'} = \frac{\delta\Omega'}{\delta z'}, \quad -\frac{1}{v'}\frac{\delta v'}{\delta \chi} = \frac{\delta\Omega'}{\delta \chi}, \tag{2.9}$$

если левые части уравнений (2.5) выбраны так, чтобы выполнялись соотношения

$$\sigma\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma} + \tau\frac{\delta\Omega}{\delta\tau} + \upsilon\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon} = 1, \quad \sigma'\frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'} + \tau'\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'} + \upsilon'\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'} = 1. \tag{2.10}$$

Соотношения (2.10) будут заведомо выполнены, например, если положить

$$\Omega \equiv (\sigma^2 + \tau^2 + \upsilon^2)^{1/2}\omega - 1 = 0, \quad \Omega' \equiv (\sigma'^2 + \tau'^2 + \upsilon'^2)^{1/2}\omega' - 1 = 0, \tag{2.11}$$

где ω и ω', т.е. $(\sigma^2 + \tau^2 + \upsilon^2)^{-1/2}$ и $(\sigma'^2 + \tau'^2 + \upsilon'^2)^{-1/2}$, представить в виде функций переменных $\sigma(\sigma^2 + \tau^2 + \upsilon^2)^{-1/2}$, $\tau(\sigma^2 + \tau^2 + \upsilon^2)^{-1/2}$, $\upsilon(\sigma^2 + \tau^2 + \upsilon^2)^{-1/2}$, x, y, z, χ и соответственно $\sigma'(\sigma'^2 + \tau'^2 + \upsilon'^2)^{-1/2}$, $\tau'(\sigma'^2 + \tau'^2 + \upsilon'^2)^{-1/2}$, $\upsilon'(\sigma'^2 + \tau'^2 + \upsilon'^2)^{-1/2}$, x', y', z', χ'. После такой предварительной подготовки частные производные $\delta\Omega/\delta\sigma$, $\delta\Omega/\delta\tau$, $\delta\Omega/\delta\upsilon$ будут однородными функциями степени 0 по переменным σ, τ, υ, а $\delta\Omega'/\delta\sigma'$, $\delta\Omega'/\delta\tau'$, $\delta\Omega'/\delta\upsilon'$ – однородными функциями степени 0 относительно σ', τ', υ'. Следовательно, если из трех первых уравнений (2.8) мы исключим любые две из трех конечных переменных σ, τ, υ, то тем самым будет исключена и третья переменная. Аналогично из трех последних уравнений (2.8) все три начальные величины σ', τ', υ' могут быть исключены одновременно. После исключения конечных и начальных величин мы приходим к двум уравнениям вида

$$\Psi\left(\frac{\alpha}{v}, \frac{\beta}{v}, \frac{\gamma}{v}, x, y, z, \chi\right) = 0, \quad \Psi'\left(\frac{\alpha'}{v'}, \frac{\beta'}{v'}, \frac{\gamma'}{v'}, x', y', z', \chi\right) = 0, \tag{2.12}$$

определяющим функции конечной и начальной среды v и v'. Таким образом, обе эти функции могут быть выведены из характеристической функции V. Тем самым

общая задача математической оптики, которая уже упоминалась, сводится к изучению лишь одной функции V.

Частные производные характеристической функции V по координатам x, y, z постоянно встречаются в оптических методах настоящего и предыдущего мемуаров. Именно поэтому я счел полезным обозначить их в этом "Дополнении" специальными символами σ, τ, υ. В одном из последующих разделов я покажу, какой смысл они имеют в волновой теории, а именно что в этой теории они соответствуют компонентам нормальной медленности распространения волны.

Связь характеристической функции V с выводом и интегрированием общих уравнений искривленного луча, обыкновенного или необыкновенного

3. Как частный случай сформулированной выше общей задачи можно рассматривать следующую задачу: определить общий вид дифференциальных уравнений искривленного луча, обыкновенного или необыкновенного, т.е. установить связь между общими изменениями направления и общими изменениями положения при прохождении света через неоднородную среду. В первом "Дополнении"[5] с помощью вариационного исчисления из принципа наименьшего действия были выведены следующие уравнения:

$$d\frac{\delta v}{\delta\alpha} = \frac{\delta v}{\delta x}ds, \tag{3.1}$$

$$d\frac{\delta v}{\delta\beta} = \frac{\delta v}{\delta y}ds, \quad d\frac{\delta v}{\delta\gamma} = \frac{\delta v}{\delta z}ds.$$

(Эти дифференциальные уравнения – второго порядка, так как α, β, γ, α', β', γ' определяются уравнениями

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds},$$

$$\alpha' = \frac{dx'}{ds'}, \quad \beta' = \frac{dy'}{ds'}, \quad \gamma' = \frac{dz'}{ds'}, \tag{3.2}$$

где *символ d здесь и далее на протяжении всего третьего "Дополнения" относится к движению по лучу, δ – к произвольному бесконечно малому изменению положения, направления и цвета, ds'* – начальный элемент луча.) Те же уравнения (3.1), эквивалентные лишь двум различным уравнениям, по свойствам характеристической функции могут быть выведены из основной формулы (1.1). Действительно, если продифференцировать первое из уравнений (2.2) (напомним, что в него входят производные функции V и оно выведено из общей формулы (1.1)) по каждой из трех координат x, y, z, рассматриваемых как независимые переменные, и по показателю

---

[5] Supplement to an Essay on the theory of systems of rays // Trans. Roy. Irish Acad. 1830. Vol. 16, pt 1. P. 1–61.

цвета χ, то, как показано в предыдущем разделе, мы получим уравнения

$$\alpha\frac{\delta^2 V}{\delta x^2}+\beta\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y}+\gamma\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta z}=\frac{\delta v}{\delta x},\quad \alpha\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y}+\beta\frac{\delta^2 V}{\delta y^2}+\gamma\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta z}=\frac{\delta v}{\delta y},$$

$$\alpha\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta z}+\beta\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta z}+\gamma\frac{\delta^2 V}{\delta z^2}=\frac{\delta v}{\delta z},\quad \alpha\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta \chi}+\beta\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta \chi}+\gamma\frac{\delta^2 V}{\delta z\delta \chi}=\frac{\delta v}{\delta \chi}. \tag{3.3}$$

Первые три уравнения (3.3) с помощью общих уравнений (2.1), которые сами были выведены из общей формулы (1.1), и с учетом смысла величин α', β', γ', задаваемых соотношениями (3.2), могут быть преобразованы в уравнения (3.1). Дифференциальные уравнения (3.1) можно рассматривать и как пределы уравнений

$$\sigma-\sigma'=\left(\frac{\delta V}{\delta x}\right),\quad \tau-\tau'=\left(\frac{\delta V}{\delta y}\right),\quad \upsilon-\upsilon'=\left(\frac{\delta V}{\delta z}\right), \tag{3.4}$$

где величины $(\delta V/\delta x)$, $(\delta V/\delta y)$, $(\delta V/\delta z)$ получаются при дифференцировании V как функции семи переменных $x, y, z, \Delta x, \Delta y, \Delta z, \chi$; $\Delta x = x' - x$, $\Delta y = y' - y$, $\Delta z = z' - z$. Вариация функции V при этом в силу общей формулы (1.1) и определений (2.4) имеет вид

$$\delta V=(\sigma-\sigma')\delta x+(\tau-\tau')\delta y+(\upsilon-\upsilon')\delta z+$$
$$+\left(\frac{\delta V}{\delta\Delta x}\right)\delta\Delta x+\left(\frac{\delta V}{\delta\Delta y}\right)\delta\Delta y+\left(\frac{\delta V}{\delta\Delta z}\right)\delta\Delta z+\frac{\delta V}{\delta\chi}\delta\chi, \tag{3.5}$$

где

$$\left(\frac{\delta V}{\delta\Delta x}\right)=\sigma',\quad \left(\frac{\delta V}{\delta\Delta y}\right)=\tau',\quad \left(\frac{\delta V}{\delta\Delta z}\right)=\upsilon'. \tag{3.6}$$

Продифференцировав первое из уравнений (2.2) по x', y', z', мы получим с учетом предыдущего пункта уравнения

$$\alpha\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta x'}+\beta\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta x'}+\gamma\frac{\delta^2 V}{\delta z\delta x'}=0,$$

$$\alpha\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y'}+\beta\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta y'}+\gamma\frac{\delta^2 V}{\delta z\delta y'}=0,$$

$$\alpha\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta z'}+\beta\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta z'}+\gamma\frac{\delta^2 V}{\delta z\delta z'}=0, \tag{3.7}$$

любые два из которых вследствие уравнения (2.3) содержат третье. Если воспользоваться определениями (3.2), то уравнения (3.7) можно записать в виде

$$d\frac{\delta V}{\delta x'}=0,\quad d\frac{\delta V}{\delta y'}=0,\quad d\frac{\delta V}{\delta z'}=0. \tag{3.8}$$

Дифференциальные уравнения (3.8) – первого порядка. Начальные координаты и цвет в них – постоянные, соответствующие лучу, и могут рассматриваться как ин-

тегралы уравнений (3.1). Сами уравнения (3.8) имеют в качестве интегралов

$$\frac{\delta V}{\delta x'} = \text{const}, \quad \frac{\delta V}{\delta y'} = \text{const}, \quad \frac{\delta V}{\delta z'} = \text{const}, \tag{3.9}$$

где постоянные в правых частях в силу уравнений (2.1) – значения начальных величин

$$-\frac{\delta \text{v}'}{\delta \alpha'}, \quad -\frac{\delta \text{v}'}{\delta \beta'}, \quad -\frac{\delta \text{v}'}{\delta \gamma'}.$$

Подобным образом при дифференцировании второго из уравнений (2.1) мы получаем следующие уравнения, аналогичные уравнениям (3.3) и (3.7):

$$\alpha'\frac{\delta^2 V}{\delta x'^2} + \beta'\frac{\delta^2 V}{\delta x'\delta y'} + \gamma'\frac{\delta^2 V}{\delta x'\delta z'} = -\frac{\delta \text{v}'}{\delta x'},$$

$$\alpha'\frac{\delta^2 V}{\delta x'\delta y'} + \beta'\frac{\delta^2 V}{\delta y'^2} + \gamma'\frac{\delta^2 V}{\delta y'\delta z'} = -\frac{\delta \text{v}'}{\delta y'},$$

$$\alpha'\frac{\delta^2 V}{\delta x'\delta z'} + \beta'\frac{\delta^2 V}{\delta y'\delta z'} + \gamma'\frac{\delta^2 V}{\delta z'^2} = -\frac{\delta \text{v}'}{\delta z'},$$

$$\alpha'\frac{\delta^2 V}{\delta x'\delta \chi} + \beta'\frac{\delta^2 V}{\delta y'\delta \chi} + \gamma'\frac{\delta^2 V}{\delta z'\delta \chi} = -\frac{\delta \text{v}'}{\delta \chi} \tag{3.10}$$

и

$$\alpha'\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta x'} + \beta'\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y'} + \gamma'\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta z'} = 0,$$

$$\alpha'\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta x'} + \beta'\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta y'} + \gamma'\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta z'} = 0,$$

$$\alpha'\frac{\delta^2 V}{\delta z\delta x'} + \beta'\frac{\delta^2 V}{\delta z\delta y'} + \gamma'\frac{\delta^2 V}{\delta z\delta z'} = 0. \tag{3.11}$$

Правые части трех первых уравнений (3.10) обращаются в нуль, если начальная среда однородна. Правые части трех первых уравнений (3.3) обращаются в нуль, если конечная среда однородна. В последнем случае (когда конечная среда однородна) конечный отрезок луча прямолинеен и на всем его протяжении выполняются не только уравнения (3.9), но и равенства

$$\frac{\delta V}{\delta x} = \text{const}, \quad \frac{\delta V}{\delta y} = \text{const}, \quad \frac{\delta V}{\delta z} = \text{const}. \tag{3.12}$$

Постоянными в правых частях равенств (3.12) служат те самые функции конечных направляющих косинусов и цвета, которые мы обозначили $\delta \text{v}/\delta\alpha$, $\delta \text{v}/\delta\beta$, $\delta \text{v}/\delta\gamma$. В рассматриваемом случае они не зависят от координат. В общем случае, если координаты конца и конечный цвет считать постоянными, то соотношения (3.12)

между начальными координатами задают уравнения луча. Хотя до сих пор мы рассматривали только прямоугольные координаты, аналогичные результаты, как будет показано в следующем разделе, получаются и в косоугольных и даже в полярных координатах.

Преобразования основной формулы. Новый взгляд на вспомогательную функцию W. Новая вспомогательная функция T. Вывод каждой функции V, W, T (характеристической и вспомогательных) из каждой. Общая теорема о максимумах и минимумах, содержащая все подробности таких выводов. Замечания об относительных преимуществах характеристической и вспомогательных функций

4. Основную формулу (1.1) можно записать в виде

$$\delta V = \sigma\delta x - \sigma'\delta x' + \tau\delta y - \tau'\delta y' + \upsilon\delta z - \upsilon'\delta z' + \frac{\delta V}{\delta\chi}\delta\chi, \tag{4.1}$$

если воспользоваться определениями (2.4) и ввести вариацию цвета. Формула (1.1) допускает также два следующих общих преобразования [5]:

$$\delta W = x\delta\sigma + y\delta\tau + z\delta\upsilon + \sigma'\delta x' + \tau'\delta y' + \upsilon'\delta z' - \frac{\delta V}{\delta\chi}\delta\chi \tag{4.2}$$

и

$$\delta T = x\delta\sigma - x'\delta\sigma' + y\delta\tau - y'\delta\tau' + z\delta\upsilon - z'\delta\upsilon' - \frac{\delta V}{\delta\chi}\delta\chi, \tag{4.3}$$

где

$$W = -V + x\sigma + y\tau + z\upsilon \tag{4.4}$$

и

$$T = W - x'\sigma' - y'\tau' - z'\upsilon'. \tag{4.5}$$

В двух предыдущих "Дополнениях" величина W была введена и рассматривалась как функция направляющих косинусов α, β, γ конца луча при условии, что конечная среда однородна и что начало луча света и цвет заданы. Теперь мы займем иную, более общую позицию и будем рассматривать вспомогательную функцию W как зависящую (в силу соотношения (4.2)) для всех оптических комбинаций от семи величин σ, τ, υ, x', y', z', χ. Аналогичным образом новую вспомогательную функцию T мы будем считать зависящей (в силу нового преобразования (4.3)) от семи величин σ, τ, υ, σ', τ', υ', χ. Вспомогательные функции W, T связаны между собой и с характеристической функцией V соотношениями, знание которых имеет важное значение в теории оптических систем. Именно поэтому мы покажем, как каждая из трех функций V, W, T может быть выведена из каждой из двух остальных.

Все эти выводы, как мы вскоре убедимся, могут быть выполнены с помощью надлежащего применения трех разновидностей (4.1), (4.2) и (4.3) нашей основной формулы (1.1) с учетом определений (4.4), (4.5), если воспользоваться следующими замечаниями.

Если вид характеристической функции V известен и требуется определить, как выглядит вспомогательная функция W, то необходимо исключить три координаты конечной точки x, y, z из соотношения (4.4) и трех первых соотношений (2.4). Аналогично если требуется определить вид функции T по виду функции W, то необходимо исключить шесть координат конечной и начальной точек x, y, z, x', y', z' из шести соотношений (2.4) (которые все содержатся в одном соотношении (4.1)) и соотношения

$$T = -V + x\sigma - x'\sigma' + y\tau - y'\tau' + z\upsilon - z'\upsilon'. \tag{4.6}$$

Если требуется определить вид функции T по виду функции W, то необходимо исключить три координаты начальной точки x', y', z' из соотношения (4.5) и трех общих соотношений

$$\sigma' = \frac{\delta W}{\delta x'}, \quad \tau' = \frac{\delta W}{\delta y'}, \quad \upsilon' = \frac{\delta W}{\delta z'}. \tag{4.7}$$

Но если требуется решить обратную задачу – найти функцию V по известной функции T или W (или функцию W по функции T), то неоднородные среды необходимо отличать от однородных. Дело в том, что в этом случае надлежит использовать уравнения, на которые распадаются уравнения (4.2) и (4.3), а разложение последних при условии, что начальная и конечная среды не являются обе неоднородными, требует рассмотрения зависимости, существующей между величинами $\sigma, \tau, \upsilon, \sigma', \tau', \upsilon', \chi$, и это обстоятельство (связь между указанными переменными величинами) приводит к частичной неопределенности функций T и W, восстанавливаемых по известной характеристической функции V, и функции T, восстанавливаемой по известной функции W, в случае неоднородных сред.

Если конечная среда неоднородна, то $\sigma, \tau, \upsilon, \chi$ могут, вообще говоря, изменяться независимо, и из уравнения (4.2) мы получаем

$$\frac{\delta W}{\delta\sigma} = x, \quad \frac{\delta W}{\delta\tau} = y, \quad \frac{\delta W}{\delta\upsilon} = z, \quad \frac{\delta W}{\delta\chi} = -\frac{\delta V}{\delta\chi}. \tag{4.8}$$

В этом случае характеристическую функцию V можно найти по известной функции W, исключив σ, τ, υ из соотношения (4.4) и трех первых уравнений (4.8). Но если конечная среда однородна, то $\sigma, \tau, \upsilon, \chi$ связаны между собой первым из уравнений (2.5), перестающим зависеть от координат конца луча, и вместо четырех уравнений (4.8) мы получаем три уравнения

$$\frac{\delta W/\delta\sigma - x}{\delta\Omega/\delta\sigma} = \frac{\delta W/\delta\tau - y}{\delta\Omega/\delta\tau} = \frac{\delta W/\delta\upsilon - z}{\delta\Omega/\delta\upsilon} = \frac{\delta W/\delta\chi + \delta V/\delta\chi}{\delta\Omega/\delta\chi}. \tag{4.9}$$

Используя два первых уравнения из (4.9) и уже упоминавшееся уравнение

$$\Omega(\sigma, \tau, \upsilon, \chi) = 0, \tag{4.10}$$

зависящее от природы конечной однородной среды и характеризующее ее, мы можем исключить σ, τ, υ из соотношения (4.4) и тем самым восстановить характеристическую функцию V по известной функции W.

Аналогичным образом если начальная и конечная среда обе неоднородны, то семь величин σ, τ, υ, σ', τ', υ', χ могут в общем случае изменяться независимо, и соотношение (4.3) распадается на семь уравнений

$$\frac{\delta T}{\delta \sigma} = x, \quad \frac{\delta T}{\delta \tau} = y, \quad \frac{\delta T}{\delta \upsilon} = z, \quad \frac{\delta T}{\delta \chi} = -\frac{\delta V}{\delta \chi},$$
$$\frac{\delta T}{\delta \sigma'} = -x', \quad \frac{\delta T}{\delta \tau'} = -y', \quad \frac{\delta T}{\delta \upsilon'} = -z'. \qquad (4.11)$$

Используя три первых и три последних уравнения (4.11), мы можем исключить σ, τ, υ, σ', τ', υ' из соотношения (4.6) и тем самым вывести характеристическую функцию V из вспомогательной функции T. В том же самом случае или в случае, когда неоднородна только начальная среда, выполняются три последних уравнения (4.11). Их достаточно, чтобы исключить σ', τ', υ' из соотношения (4.5) и тем самым вывести функцию W из известной функции T.

Но если конечная среда однородна, а начальная по-прежнему неоднородна, то σ, τ, υ, χ связаны уравнением (4.10), а σ', τ', υ' остаются независимыми, и вместо четырех уравнений (4.11) мы получаем три уравнения

$$\frac{\delta T / \delta \sigma - x}{\delta \Omega / \delta \sigma} = \frac{\delta T / \delta \tau - y}{\delta \Omega / \delta \tau} = \frac{\delta T / \delta \upsilon - z}{\delta \Omega / \delta \upsilon} = \frac{\delta T / \delta \chi + \delta V / \delta \chi}{\delta \Omega / \delta \chi}. \qquad (4.12)$$

Используя два первых из них, уравнение (4.10) и три последних уравнения (4.11), мы можем исключить σ, τ, υ, σ', τ', υ' из соотношения (4.6) и тем самым восстановить характеристическую функцию V по известной функции T.

Если конечная и начальная среды обе однородны, то выполняется не только уравнение (4.10) для конечной среды, но и аналогичное уравнение

$$\Omega'(\sigma', \tau', \upsilon', \chi) = 0 \qquad (4.13)$$

для начальной, и вместо семи уравнений (4.11) мы получаем два первых уравнения (4.12) и два уравнения

$$\frac{\delta T / \delta \sigma' + x'}{\delta \Omega / \delta \sigma'} = \frac{\delta T / \delta \tau' + y'}{\delta \Omega / \delta \tau'} = \frac{\delta T / \delta \upsilon' + z'}{\delta \Omega / \delta \upsilon'} \qquad (4.14)$$

вместе с уравнением

$$\frac{\delta T}{\delta \chi} + \frac{\delta V}{\delta \chi} = \lambda \frac{\delta \Omega}{\delta \chi} + \lambda' \frac{\delta \Omega'}{\delta \chi}, \qquad (4.15)$$

где λ – общее значение трех первых величин, соединенных знаками равенства в (4.12), а λ' – общее значение трех величин, соединенных знаками равенства в (4.14). В этом случае, используя два уравнения (4.14) и два оставшихся уравнения (4.12) вместе с двумя уравнениями (4.10), (4.13), мы можем исключить σ, τ, υ, σ', τ', υ' из соотношения (4.6) и тем самым восстановить характеристическую функцию V по известной функции T. В том же самом случае или даже в случае, когда однородна только начальная среда, мы можем вывести функцию W из T, исключив σ', τ', υ' из соотношения (4.5) и уравнений (4.13) и (4.14).

Если все среды комбинации не только однородны, но и ограничены плоскими поверхностями, как это происходит при исследованиях призм, обыкновенных или необыкновенных, то из семи величин σ, τ, υ, σ', τ', υ', χ независимы только три. Помимо уравнений (4.10) и (4.13), существуют еще два других уравнения, которые можно обозначить

$$\Omega''(\sigma, \tau, \upsilon, \sigma', \tau', \upsilon', \chi) = 0,$$
$$\Omega'''(\sigma, \tau, \upsilon, \sigma', \tau', \upsilon', \chi) = 0, \tag{4.16}$$

так как в рассматриваемом случае начальное направление (и цвет) определяет конечное. Вариации величин σ, τ, υ, σ', τ', υ', χ, входящие в δT, можно считать независимыми, если ввести вариации четырех условий (4.10), (4.13) и (4.16), умноженные на коэффициенты λ, λ', λ'', λ''', т.е. положить

$$\delta T = x\delta\sigma - x'\delta\sigma' + y\delta\tau - y'\delta\tau' + z\delta\upsilon - z'\delta\upsilon' - \frac{\delta V}{\delta\chi}\delta\chi +$$
$$+\lambda\delta\Omega + \lambda'\delta\Omega' + \lambda''\delta\Omega'' + \lambda'''\delta\Omega'''. \tag{4.17}$$

Уравнение (4.17) распадается на семь уравнений:

$$\frac{\delta T}{\delta\sigma} - x = \lambda\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma} + \lambda''\frac{\delta\Omega''}{\delta\sigma} + \lambda'''\frac{\delta\Omega'''}{\delta\sigma},$$
$$\frac{\delta T}{\delta\tau} - y = \lambda\frac{\delta\Omega}{\delta\tau} + \lambda''\frac{\delta\Omega''}{\delta\tau} + \lambda'''\frac{\delta\Omega'''}{\delta\tau},$$
$$\frac{\delta T}{\delta\upsilon} - z = \lambda\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon} + \lambda''\frac{\delta\Omega''}{\delta\upsilon} + \lambda'''\frac{\delta\Omega'''}{\delta\upsilon},$$
$$\frac{\delta T}{\delta\sigma'} + x' = \lambda'\frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'} + \lambda''\frac{\delta\Omega''}{\delta\sigma'} + \lambda'''\frac{\delta\Omega'''}{\delta\sigma'},$$
$$\frac{\delta T}{\delta\tau'} + y' = \lambda'\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'} + \lambda''\frac{\delta\Omega''}{\delta\tau'} + \lambda'''\frac{\delta\Omega'''}{\delta\tau'},$$
$$\frac{\delta T}{\delta\upsilon'} + z' = \lambda'\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'} + \lambda''\frac{\delta\Omega''}{\delta\upsilon'} + \lambda'''\frac{\delta\Omega'''}{\delta\upsilon'},$$
$$\frac{\delta T}{\delta\chi} + \frac{\delta V}{\delta\chi} = \lambda\frac{\delta\Omega}{\delta\chi} + \lambda'\frac{\delta\Omega'}{\delta\chi} + \lambda''\frac{\delta\Omega''}{\delta\chi} + \lambda'''\frac{\delta\Omega'''}{\delta\chi}. \tag{4.18}$$

Используя первые шесть уравнений (4.18) и уравнения (4.6), (4.10), (4.13), (4.16), мы можем исключить десять величин σ, τ, υ, σ', τ', υ', λ, λ', λ'', λ''' и тем самым вывести соотношение между $V, x, y, z, x', y', z', \chi$ из соотношения между T, σ, τ, υ, σ', τ', υ', χ. Наш метод без труда переносится и на другие случаи, когда между семью величинами σ, τ, υ, σ', τ', υ', χ существует взаимозависимость, выражаемая некоторым числом уравнений.

Все приведенные выше подробности вывода каждой из функций V, W, T из остальных охватывает следующее правило, или теорему: каждая из этих трех функций может быть выведена из каждой из двух остальных, если взять одно из соотношений (4.4), (4.5), (4.6) и обратить искомую функцию в максимум или

минимум по исключаемым переменным. Например, мы можем вывести T из V, обратив выражение (4.6) в максимум или минимум по координатам конечной и начальной точек.

Оптическая комбинация характеризуется исходной функцией V более полно, чем любой из двух связанных с ней и между собой вспомогательных функций W и T, так как V в отличие от W и T позволяет определять свойства конечной и начальной сред. Тем не менее использование функций W и T имеет определенные преимущества, если конечная и начальная среды однородны и известны, поскольку существующие в этом случае известные уравнения типа уравнений (4.10) и (4.13) (вместе с уравнениями типа (4.16), возникающими, если комбинация сред призматическая) оставляют во вспомогательной функции меньше независимых переменных, чем в исходной функции. Вместе с тем, как мы уже упоминали и как будет более подробно показано в дальнейшем, существование соотношений между переменными порождает частичную неопределенность вспомогательных функций, от которой свободна характеристическая функция V. Эту неопределенность следует относить скорее к достоинствам, чем к недостаткам, поскольку она позволяет вводить дополнительные предположения и производить преобразования, способствующие изяществу и простоте [получаемых результатов].

Общие преобразования дифференциальных уравнений в частных производных для V с помощью вспомогательных функций W, T. Другие дифференциальные уравнения в частных производных для V в случае, когда начальная и конечная среды однородны. Интегрирование этих уравнений с помощью функций W, T

5. Другое преимущество вспомогательных функций W, T состоит в том, что они позволяют производить преобразования и, если конечная и начальная среды однородны, интегрировать уравнения в частных производных (2.2), которым должна удовлетворять характеристическая функция V. Действительно, если конечная среда неоднородна, то, как показано в предыдущем разделе, первое из двух уравнений в частных производных (2.2) можно представить в следующих двух видах:

$$\Omega\left(\sigma,\tau,\upsilon,\frac{\delta W}{\delta\sigma},\frac{\delta W}{\delta\tau},\frac{\delta W}{\delta\upsilon},\chi\right)=0,$$
$$\Omega\left(\sigma,\tau,\upsilon,\frac{\delta T}{\delta\sigma},\frac{\delta T}{\delta\tau},\frac{\delta T}{\delta\upsilon},\chi\right)=0. \qquad (5.1)$$

Если неоднородна начальная среда, то второе из двух дифференциальных уравнений в частных производных (2.2) можно представить в следующих двух видах:

$$\Omega'\left(\frac{\delta W}{\delta x'},\frac{\delta W}{\delta y'},\frac{\delta W}{\delta z'},x',y',z',\chi\right)=0,$$
$$\Omega'\left(\sigma',\tau',\upsilon',\ -\frac{\delta T}{\delta\sigma'},\ -\frac{\delta T}{\delta\tau'},\ -\frac{\delta T}{\delta\upsilon'},\chi\right)=0. \qquad (5.2)$$

Первое из уравнений (5.2) является общим. Если же конечная среда однородна, то W остается произвольной функцией четырех переменных σ, τ, υ, χ, связанных в данном случае уравнением (4.10), а соотношения (4.4) вместе с уравнением (4.10) и двумя первыми уравнениями (4.9) образуют систему, задающую интеграл уравнения в частных производных

$$\Omega\left(\frac{\delta V}{\delta x}, \frac{\delta V}{\delta y}, \frac{\delta V}{\delta z}, \chi\right) = 0, \tag{5.3}$$

в которое переходит в рассматриваемом случае первое из уравнений (2.2). Аналогично если неоднородны конечная и начальная среды и второе из уравнений (2.2) переходит в уравнение

$$\Omega'\left(-\frac{\delta V}{\delta x'}, -\frac{\delta V}{\delta y'}, -\frac{\delta V}{\delta z'}, \chi\right) = 0, \tag{5.4}$$

то система дифференциальных уравнений в частных производных (5.3), (5.4) имеет в качестве интеграла систему, задаваемую соотношением (4.6), уравнениями (4.10), (4.12), (4,14) и первыми двумя из уравнений (4.12), в которых T рассматривается как произвольная функция от σ, τ, υ, σ', τ', υ', χ. Как станет ясно из дальнейшего, интегралы, о которых идет речь, необычайно полезны при исследовании оптических комбинаций.

Два дифференциальных уравнения (5.3) и (5.4) в частных производных первого порядка сами являются интегралами следующих двух дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка [6]:

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x^2}\frac{\delta^2 V}{\delta y^2}\frac{\delta^2 V}{\delta z^2} + 2\frac{\delta^2 V}{\delta x \delta y}\frac{\delta^2 V}{\delta y \delta z}\frac{\delta^2 V}{\delta z \delta x} =$$
$$= \frac{\delta^2 V}{\delta x^2}\left(\frac{\delta^2 V}{\delta y \delta z}\right)^2 + \frac{\delta^2 V}{\delta y^2}\left(\frac{\delta^2 V}{\delta z \delta x}\right)^2 + \frac{\delta^2 V}{\delta z^2}\left(\frac{\delta^2 V}{\delta x \delta y}\right)^2 \tag{5.5}$$

и

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x'^2}\frac{\delta^2 V}{\delta y'^2}\frac{\delta^2 V}{\delta z'^2} + 2\frac{\delta^2 V}{\delta x' \delta y'}\frac{\delta^2 V}{\delta y' \delta z'}\frac{\delta^2 V}{\delta z' \delta x'} =$$
$$= \frac{\delta^2 V}{\delta x'^2}\left(\frac{\delta^2 V}{\delta y' \delta z'}\right)^2 + \frac{\delta^2 V}{\delta y'^2}\left(\frac{\delta^2 V}{\delta z' \delta x'}\right)^2 + \frac{\delta^2 V}{\delta z'^2}\left(\frac{\delta^2 V}{\delta x' \delta y'}\right)^2, \tag{5.6}$$

получающихся при исключении переменных из уравнений (3.3) и (3.10), если положить

$$\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta x} = 0, \quad \frac{\delta \mathrm{v}}{\delta y} = 0, \quad \frac{\delta \mathrm{v}}{\delta z} = 0, \quad \frac{\delta \mathrm{v}'}{\delta x'} = 0, \quad \frac{\delta \mathrm{v}'}{\delta y'} = 0, \quad \frac{\delta \mathrm{v}'}{\delta z'} = 0. \tag{5.7}$$

Система трех первых из шести уравнений (5.7), равно как дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка (5.5) или его интеграл – диф-

ференциальное уравнение в частных производных первого порядка (5.3), выражают одно и то же: однородность конечной среды. Аналогичным образом однородность начальной среды выражают три последних уравнения (5.7), или дифференциальное уравнение в частных производных (5.6), или его интеграл – дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка (5.4). Кроме того, свойства, присущие оптическим комбинациям, у которых одна или обе среды, конечная и начальная, однородны, выражают выписанные нами системы конечных недифференциальных соотношений.

Первое из уравнений (5.2), если начальная среда неоднородна, при преобразовании переходит во второе из уравнений (5.2) и имеет своим интегралом, если начальная среда однородна, систему, состоящую из соотношения (4.5), уравнений (4.13), (4.14) и позволяющую вывести функцию W из произвольной функций T. В том же самом случае, если начальная среда однородна, первое из уравнений (5.2) принимает вид

$$\Omega'\left(\frac{\delta W}{\delta x'},\ \frac{\delta W}{\delta y'},\ \frac{\delta W}{\delta z'},\ \chi\right)=0 \tag{5.8}$$

и является интегралом уравнения второго порядка

$$\frac{\delta^2 W}{\delta x'^2}\frac{\delta^2 W}{\delta y'^2}\frac{\delta^2 W}{\delta z'^2}+2\frac{\delta^2 W}{\delta x'\delta y'}\frac{\delta^2 W}{\delta y'\delta z'}\frac{\delta^2 W}{\delta z'\delta x'}=$$
$$=\frac{\delta^2 W}{\delta x'^2}\left(\frac{\delta^2 W}{\delta y'\delta z'}\right)^2+\frac{\delta^2 W}{\delta y'^2}\left(\frac{\delta^2 W}{\delta z'\delta x'}\right)^2+\frac{\delta^2 W}{\delta z'^2}\left(\frac{\delta^2 W}{\delta x'\delta y'}\right)^2, \tag{5.9}$$

аналогичного уравнению (5.6).

Если конечная среда неоднородна, то функция W удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка

$$\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta x'}\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta y'}\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\delta z'}+\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta y'}\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta z'}\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\delta x'}+\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta z'}\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta x'}\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\delta y'}=$$
$$=\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\delta x'}\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta y'}\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta z'}+\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\delta y'}\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta z'}\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta x'}+\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\delta z'}\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta x'}\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta y'}, \tag{5.10}$$

аналогичного общему уравнению (2.3).

Наконец, если неоднородны обе среды, конечная и начальная, то функция T удовлетворяет аналогичному уравнению:

$$\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma\delta\sigma'}\frac{\delta^2 T}{\delta\tau\delta\tau'}\frac{\delta^2 T}{\delta\upsilon\delta\upsilon'}+\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma\delta\tau'}\frac{\delta^2 T}{\delta\tau\delta\upsilon'}\frac{\delta^2 T}{\delta\upsilon\delta\sigma'}+\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma\delta\upsilon'}\frac{\delta^2 T}{\delta\tau\delta\sigma'}\frac{\delta^2 T}{\delta\upsilon\delta\tau'}=$$
$$=\frac{\delta^2 T}{\delta\upsilon\delta\sigma'}\frac{\delta^2 T}{\delta\tau\delta\tau'}\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma\delta\upsilon'}+\frac{\delta^2 T}{\delta\upsilon\delta\tau'}\frac{\delta^2 T}{\delta\tau\delta\upsilon'}\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma\delta\sigma'}+\frac{\delta^2 T}{\delta\upsilon\delta\upsilon'}\frac{\delta^2 T}{\delta\tau\delta\sigma'}\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma\delta\tau'}. \tag{5.11}$$

Общие выводы и преобразования дифференциальных и интегральных уравнений искривленного или прямого луча, обыкновенного или необыкновенного, с помощью вспомогательных функций W, T

6. Вспомогательные функции W, T порождают новые уравнения для начального и конечного участков искривленного или ломаного луча. Например, функция W порождает в общем случае следующие уравнения между конечными величинами σ, τ, υ, аналогичные уравнениям (3.9):

$$\frac{\delta W}{\delta x'} = \text{const}, \quad \frac{\delta W}{\delta y'} = \text{const}, \quad \frac{\delta W}{\delta z'} = \text{const}, \tag{6.1}$$

где x', y', z' – координаты некоторой фиксированной точки на начальном участке, а постоянные (в силу уравнений (4.7)) – значения начальных величин σ', τ', υ'. Уравнения (6.1) порождают следующие уравнения в дифференциалах:

$$\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta x'}d\sigma + \frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta x'}d\tau + \frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\delta x'}d\upsilon = 0,$$
$$\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta y'}d\sigma + \frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta y'}d\tau + \frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\delta y'}d\upsilon = 0,$$
$$\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta z'}d\sigma + \frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta z'}d\tau + \frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\delta z'}d\upsilon = 0, \tag{6.2}$$

где d по-прежнему относится к движению по лучу. Сравнив уравнения (6.2) с уравнениями

$$\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta x}\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta x'} + \frac{\delta \mathrm{v}}{\delta y}\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta x'} + \frac{\delta \mathrm{v}}{\delta z}\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\delta x'} = 0,$$
$$\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta x}\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta y'} + \frac{\delta \mathrm{v}}{\delta y}\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta y'} + \frac{\delta \mathrm{v}}{\delta z}\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\delta y'} = 0,$$
$$\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta x}\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta z'} + \frac{\delta \mathrm{v}}{\delta y}\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta z'} + \frac{\delta \mathrm{v}}{\delta z}\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\delta z'} = 0, \tag{6.3}$$

получающимися при дифференцировании первого из уравнений (5.1) по координатам начальной точки x', y', z' с учетом соотношений (2.9), мы увидим, что для искривленного луча дифференциалы $d\sigma$, $d\tau$, $d\upsilon$ пропорциональны производным

$$\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta x}, \quad \frac{\delta \mathrm{v}}{\delta y}, \quad \frac{\delta \mathrm{v}}{\delta z}.$$

Эта пропорциональность вместе с соотношением

$$\alpha d\sigma + \beta d\tau + \gamma d\upsilon = \left(\alpha\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta x} + \beta\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta y} + \gamma\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta z}\right)ds, \tag{6.4}$$

которое следует из соотношений (2.7) и (3.2), позволяет легко вывести уравнения (3.1). Таким образом, дифференциальные уравнения (3.1) для конечного участка искривленного луча (чтобы распространить их на начальный участок, достаточно лишь перейти от величин без штрихов к величинам со штрихами) могут быть выведены из рассмотрения вспомогательной функции W. Дифференциальные уравнения (3.1) для искривленного луча могут быть также выведены из функции W путем сравнения дифференциалов d трех первых уравнений (4.8) с частными дифференциалами первого из уравнений (5.1) по σ, τ, υ.

Та же вспомогательная функция W дает для конечного прямолинейного участка ломаного луча два первых уравнения (4.9), которые можно записать в виде

$$\frac{1}{\alpha}\left(x-\frac{\delta W}{\delta\sigma}\right)=\frac{1}{\beta}\left(y-\frac{\delta W}{\delta\tau}\right)=\frac{1}{\gamma}\left(z-\frac{\delta W}{\delta\upsilon}\right). \tag{6.5}$$

В свою очередь уравнения (6.5) представимы в виде

$$x\frac{\delta\sigma}{\delta\vartheta}+y\frac{\delta\tau}{\delta\vartheta}+z\frac{\delta\upsilon}{\delta\vartheta}=\frac{\delta W}{\delta\vartheta},\quad x\frac{\delta\sigma}{\delta\varphi}+y\frac{\delta\tau}{\delta\varphi}+z\frac{\delta\upsilon}{\delta\varphi}=\frac{\delta W}{\delta\varphi}, \tag{6.6}$$

если каждую из величин σ, τ, υ в силу уравнения (4.10) мы будем считать функцией показателя цвета χ и двух других независимых переменных, обозначенных нами ϑ, φ, а W – функцией шести независимых переменных ϑ, φ, χ, x', y', z'. В качестве независимых переменных ϑ, φ мы можем выбрать σ, τ, рассматривая υ (в силу уравнения (4.10)) как функцию от σ, τ, χ такую, что (в силу соотношений (2.7))

$$\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}=-\frac{\alpha}{\gamma},\quad \frac{\delta\upsilon}{\delta\tau}=-\frac{\beta}{\gamma},\quad \frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}=-\frac{1}{\gamma}\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}, \tag{6.7}$$

а W – как функцию шести независимых переменных σ, τ, χ, x', y', z'. Тогда уравнения (6.5) или (6.6) для прямолинейного участка ломаного луча, обыкновенного или необыкновенного, примут более простой вид, который мы будем часто использовать в дальнейшем:

$$x-\frac{\alpha}{\gamma}z=\frac{\delta W}{\delta\sigma},\quad y-\frac{\beta}{\gamma}z=\frac{\delta W}{\delta\tau}. \tag{6.8}$$

Другая вспомогательная функция T дает следующие уравнения, которым должны удовлетворять σ, τ, υ, для конечного участка, прямолинейного или искривленного, в том случае, если конечная среда неоднородна:

$$\frac{\delta T}{\delta\sigma'}=\text{const},\quad \frac{\delta T}{\delta\tau'}=\text{const},\quad \frac{\delta T}{\delta\upsilon'}=\text{const}, \tag{6.9}$$

где σ', τ', υ' взяты в некоторой точке на начальном участке; а постоянные [в правых частях] в силу соотношений (4.11) равны координатам этой точки, взятым со знаком минус. Аналогичным образом функция T дает для начального участка в том случае, если конечная среда неоднородна, следующие уравнения, которым должны удовлетворять σ', τ', υ':

$$\frac{\delta T}{\delta\sigma}=\text{const},\quad \frac{\delta T}{\delta\tau}=\text{const},\quad \frac{\delta T}{\delta\upsilon}=\text{const}, \tag{6.10}$$

где σ, τ, υ взяты в некоторой точке на конечном участке, а постоянные [в правых частях] равны координатам этой точки. Из этих уравнений мы могли бы вывести дифференциальные уравнения (3.1), действуя по аналогии с уже рассмотренными случаями. В том случае, если начальная и конечная среды обе однородны и, следовательно, начальный и конечный участки прямолинейны, мы получаем для этих прямолинейных участков следующие уравнения, выведенные из уравнений (4.12), (4.14) и (2.8):

$$\frac{1}{\alpha}\left(x-\frac{\delta T}{\delta\sigma}\right)=\frac{1}{\beta}\left(y-\frac{\delta T}{\delta\tau}\right)=\frac{1}{\gamma}\left(z-\frac{\delta T}{\delta\upsilon}\right),$$
$$\frac{1}{\alpha'}\left(x'-\frac{\delta T}{\delta\sigma'}\right)=\frac{1}{\beta'}\left(y'-\frac{\delta T}{\delta\tau'}\right)=\frac{1}{\gamma'}\left(z'-\frac{\delta T}{\delta\upsilon'}\right). \qquad (6.11)$$

Если, как прежде, считать σ, τ, υ (в силу уравнения (4.10)) функциями показателя цвета χ и двух независимых переменных ϑ, φ, величины σ', τ', υ' – (в силу уравнения (4.13)) функциями трех независимых переменных ϑ', φ', χ, а T – функцией пяти переменных ϑ, φ, ϑ', φ', χ, то уравнения (6.11) преобразуются к виду

$$x\frac{\delta\sigma}{\delta\vartheta}+y\frac{\delta\tau}{\delta\vartheta}+z\frac{\delta\upsilon}{\delta\vartheta}-\frac{\delta T}{\delta\vartheta}=0,\quad x\frac{\delta\sigma}{\delta\varphi}+y\frac{\delta\tau}{\delta\varphi}+z\frac{\delta\upsilon}{\delta\varphi}-\frac{\delta T}{\delta\varphi}=0,$$
$$x'\frac{\delta\sigma'}{\delta\vartheta'}+y'\frac{\delta\tau'}{\delta\vartheta'}+z'\frac{\delta\upsilon'}{\delta\vartheta'}-\frac{\delta T}{\delta\vartheta'}=0,\quad x'\frac{\delta\sigma'}{\delta\varphi'}+y'\frac{\delta\tau'}{\delta\varphi'}+z'\frac{\delta\upsilon'}{\delta\varphi'}-\frac{\delta T}{\delta\varphi'}=0. \qquad (6.12)$$

В частности, если независимые переменные ϑ, φ выбрать так, чтобы они совпадали с σ, τ, а независимые переменные ϑ', φ' соответственно – с σ', τ', то в силу соотношений (2.7) мы получим уравнения

$$\frac{\delta\upsilon'}{\delta\sigma'}=-\frac{\alpha'}{\gamma'},\quad \frac{\delta\upsilon'}{\delta\tau'}=-\frac{\beta'}{\gamma'},\quad \frac{\delta\upsilon'}{\delta\chi}=-\frac{1}{\gamma'}\frac{\delta v'}{\delta\chi}, \qquad (6.13)$$

а рассматривая T как функцию пяти независимых переменных σ, τ, σ', τ', χ, следующие преобразованные уравнения для конечного и начального прямолинейных участков ломаного луча, обыкновенного или необыкновенного:

$$x-\frac{\alpha}{\gamma}z-\frac{\delta T}{\delta\sigma}=0,\quad y-\frac{\beta}{\gamma}z-\frac{\delta T}{\delta\tau}=0,\quad x'-\frac{\alpha'}{\gamma'}z'+\frac{\delta T}{\delta\sigma'}=0,\quad y'-\frac{\beta'}{\gamma'}z'+\frac{\delta T}{\delta\tau'}=0. \qquad (6.14)$$

Уравнения (6.14) аналогичны уравнениям (6.8), и так же, как последние, мы будем часто использовать их в дальнейшем.

Следует заметить, что из дифференциальных уравнений (3.1) искривленного луча, обыкновенного или необыкновенного, к которому нас и в данном, и в предыдущих разделах неоднократно приводили различные соображения, могут быть выведены следующие уравнения:

$$\frac{d\sigma}{dV}+\frac{\delta\Omega}{\delta x}=0,\quad \frac{d\tau}{dV}+\frac{\delta\Omega}{\delta y}=0,\quad \frac{d\upsilon}{dV}+\frac{\delta\Omega}{\delta z}=0,$$
$$dW=dT=\left(x\frac{\delta v}{\delta x}+y\frac{\delta v}{\delta y}+z\frac{\delta v}{\delta z}\right)ds=x\,d\sigma+y\,d\tau+z\,d\upsilon. \qquad (6.15)$$

Заметим также, что в том случае, если конечная среда однородна и, следовательно, величины σ, τ, υ, χ связаны уравнением (4.10), величину $W(\sigma^2 + \tau^2 + \upsilon^2)^{-n/2}$ можно, не ограничивая общности, выразить как функцию от σ/υ, τ/υ, x', y', z', χ, а величину $T(\sigma^2 + \tau^2 + \upsilon^2)^{-n/2}$ – аналогичным образом как функцию от σ/υ, τ/υ, σ', τ', υ', χ.

Тем самым W и T могут быть сделаны однородными функциями любой заранее заданной степени n по σ, τ, υ, т.е. будут удовлетворять уравнениям

$$\sigma\frac{\delta W}{\delta\sigma}+\tau\frac{\delta W}{\delta\tau}+\upsilon\frac{\delta W}{\delta\upsilon}=nW,$$

$$\sigma\frac{\delta T}{\delta\sigma}+\tau\frac{\delta T}{\delta\tau}+\upsilon\frac{\delta T}{\delta\upsilon}=nT. \qquad (6.16)$$

После того как это сделано, два первых из уравнений (4.9) и два первых из уравнений (4.12), относящихся к прямолинейному конечному участку луча, могут быть преобразованы (с учетом уравнений (2.10)) к виду

$$x-\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}(\sigma x+\tau y+\upsilon z)=\frac{\delta W}{\delta\sigma}-nW\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}=\frac{\delta T}{\delta\sigma}-nT\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma},$$

$$y-\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}(\sigma x+\tau y+\upsilon z)=\frac{\delta W}{\delta\tau}-nW\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}=\frac{\delta T}{\delta\tau}-nT\frac{\delta\Omega}{\delta\tau},$$

$$z-\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}(\sigma x+\tau y+\upsilon z)=\frac{\delta W}{\delta\upsilon}-nW\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}=\frac{\delta T}{\delta\upsilon}-nT\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}. \qquad (6.17)$$

Если затем положить $n = 1$, т.е. сделать W однородной функцией степени 1 по σ, τ, υ, и воспользоваться соотношением (4.4), то уравнения этого конечного прямолинейного участка могут быть записаны в виде

$$x=\frac{\delta W}{\delta\sigma}+V\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma},\quad y=\frac{\delta W}{\delta\tau}+V\frac{\delta\Omega}{\delta\tau},\quad z=\frac{\delta W}{\delta\upsilon}+V\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}. \qquad (6.18)$$

Каждое из уравнений (6.18) содержится в двух остальных. В дальнейшем мы будем часто использовать эти уравнения ввиду их симметрии.

Аналогичным образом в том случае, если начальная среда однородна и, следовательно, начальный участок прямолинеен, уравнения (4.14) этого прямолинейного участка могут быть представлены в виде

$$x'-\frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'}(\sigma'x'+\tau'y'+\upsilon'z')=-\frac{\delta T}{\delta\sigma'}+n'T\frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'},$$

$$y'-\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}(\sigma'x'+\tau'y'+\upsilon'z')=-\frac{\delta T}{\delta\tau'}+n'T\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'},$$

$$z'-\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'}(\sigma'x'+\tau'y'+\upsilon'z')=-\frac{\delta T}{\delta\upsilon'}+n'T\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'} \qquad (6.19)$$

при условии, что функция T выбрана однородной степени n' по σ', τ', υ', т.е.

удовлетворяющей уравнению

$$\sigma'\frac{\delta T}{\delta\sigma'}+\tau'\frac{\delta T}{\delta\tau'}+\upsilon'\frac{\delta T}{\delta\upsilon'}=n'T. \tag{6.20}$$

Если обе среды, начальная и конечная, однородны и степени однородности n и n' выбраны равными нулю, т.е. функция W зависит от σ/υ, τ/υ, x', y', z', χ, а функция T – от σ/υ, τ/υ, σ'/υ', τ'/υ', χ, то уравнения прямолинейных участков, начального и конечного, ломаного луча, обыкновенного или необыкновенного, имеют менее простой, чем (6.14), но более симметричный вид:

$$\begin{aligned}
&x-\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}(\sigma x+\tau y+\upsilon z)=\frac{\delta W}{\delta\sigma}=\frac{\delta T}{\delta\sigma},\\
&y-\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}(\sigma x+\tau y+\upsilon z)=\frac{\delta W}{\delta\tau}=\frac{\delta T}{\delta\tau},\\
&z-\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}(\sigma x+\tau y+\upsilon z)=\frac{\delta W}{\delta\upsilon}=\frac{\delta T}{\delta\upsilon},\\
&x'-\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'}(\sigma' x'+\tau' y'+\upsilon' z')=-\frac{\delta T}{\delta\sigma'},\\
&y'-\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}(\sigma' x'+\tau' y'+\upsilon' z')=-\frac{\delta T}{\delta\tau'},\\
&z'-\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'}(\sigma' x'+\tau' y'+\upsilon' z')=-\frac{\delta T}{\delta\upsilon'}.
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Случай призматических комбинаций может быть рассмотрен, как в п. 4.

Общие замечания о связях между частными производными второго порядка функций V, W, T. Общий метод исследования этих связей. Вывод частных производных характеристической функции V из частных производных функции W в случае, когда конечная среда однородна

7. Из того, каким образом в уравнения луча входят частные производные первого порядка функций V, W, T, нетрудно видеть, что частные производные второго порядка тех же трех функций также должны встречаться в исследованиях геометрических соотношений между бесконечно близкими лучами системы и что поэтому полезно знать общие связи между частными производными второго порядка функций V, W, T. Связи такого рода между частными производными второго порядка по координатам конечной точки характеристической функции V и вспомогательной функции W, рассматриваемой как принадлежащей конечной системе прямолинейных лучей данного цвета, испущенных первоначально из данной светящейся точки, были исследованы в первом "Дополнении". Теперь мы рассмотрим их в более общем плане и распространим на новую вспомогательную функцию T, которая введена выше. Новые исследования будут отличаться от предыдущих тем, что W на этот раз зависит от величин σ, τ, υ, а не от α, β, γ.

Общую проблему исследования такого рода связей можно разделить на множество частных задач в зависимости от выбора соответствующей пары функций и от того, предполагаются ли начальная и конечная среды однородными или неоднородными. Но все эти частные задачи могут быть решены с помощью одного общего принципа, состоящего в том, что связи между частными производными трех функций V, W, T второго или более высокого порядка мы получим, дифференцируя и сравнивая сотношения между этими функциями, т.е. дифференцируя и сравнивая три варианта (4.1), (4.2), (4.3) основной формулы (1.1), и уравнения, на которые распадаются соотношения (4.1), (4.2), (4.3).

Таким образом, для того чтобы вывести двадцать восемь частных производных второго порядка характеристической функции V по координатам конечной точки и цвету из частных производных того же порядка вспомогательных функций W или T, необходимо продифференцировать уравнения, на которые распадаются соотношения (4.2), (4.3), а также соотношения между переменными, от которых зависят W и T, если такие соотношения существуют, и, исключив соответствующие переменные, представить вариации первого порядка семи коэффициентов вариации δV, задаваемой соотношением (4.1), в виде линейных функций семи вариаций первого порядка координат начальной и конечной точек и цвета. Эти семь линейных функций содержат сорок девять коэффициентов, из которых независимы лишь сорок восемь. Они-то и будут искомыми производными.

Поясним сказанное более подробно. Если конечная среда неоднородна и требуется вывести частные производные второго порядка характеристической функции V из производных вспомогательной функции W, то сначала мы выразим $\delta\sigma$, $\delta\tau$, $\delta\upsilon$ в виде линейных функций от δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta\chi$ из дифференциалов трех первых уравнений (4.8), выведенных из соотношений (4.2). Эти линейные функции заведомо удовлетворяют первому условию (2.7). Затем мы подставим выражения для $\delta\sigma$, $\delta\tau$, $\delta\upsilon$ в дифференциалы трех уравнений (4.7), выведенных из соотношения (4.2), чтобы получить аналогичные выражения для $\delta\sigma'$, $\delta\tau'$, $\delta\upsilon'$, заведомо удовлетворяющие второму условию (2.7). Подставляя выражения для $\delta\sigma$, $\delta\tau$, $\delta\upsilon$ в дифференциалы последнего уравнения (4.8), также выведенного из соотношения (4.2), получим аналогичные выражения для $\delta\,\delta V/\delta\chi$, после чего нам останется лишь сравнить полученные выражения со следующими, т.е. с дифференциалами уравнений, на которые распадается формула (4.1):

$$\delta\sigma = \frac{\delta^2 V}{\delta x^2}\delta x + \frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta y}\delta y + \frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta z}\delta z +$$

$$+\ \frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta x'}\delta x' + \frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta y'}\delta y' + \frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta z'}\delta z' + \frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta \chi}\delta\chi,$$

$$\delta\tau = \frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta y}\delta x + \frac{\delta^2 V}{\delta y^2}\delta y + \frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta z}\delta z +$$

$$+\ \frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta x'}\delta x' + \frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta y'}\delta y' + \frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta z'}\delta z' + \frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta \chi}\delta\chi,$$

$$\delta\upsilon = \frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta z}\,\delta x + \frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta z}\,\delta y + \frac{\delta^2 V}{\delta z^2}\,\delta z +$$

$$+\ \frac{\delta^2 V}{\delta z\,\delta x'}\,\delta x' + \frac{\delta^2 V}{\delta z\,\delta y'}\,\delta y' + \frac{\delta^2 V}{\delta z\,\delta z'}\,\delta z' + \frac{\delta^2 V}{\delta z\,\delta \chi}\,\delta\chi,$$

$$-\delta\sigma' = \frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta x'}\,\delta x + \frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta x'}\,\delta y + \frac{\delta^2 V}{\delta z\,\delta x'}\,\delta z +$$

$$+\ \frac{\delta^2 V}{\delta x'^2}\,\delta x' + \frac{\delta^2 V}{\delta x'\,\delta y'}\,\delta y' + \frac{\delta^2 V}{\delta x'\,\delta z'}\,\delta z' + \frac{\delta^2 V}{\delta x'\,\delta \chi}\,\delta\chi,$$

$$-\delta\tau' = \frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta y'}\,\delta x + \frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta y'}\,\delta y + \frac{\delta^2 V}{\delta z\,\delta y'}\,\delta z +$$

$$+\ \frac{\delta^2 V}{\delta x'\,\delta y'}\,\delta x' + \frac{\delta^2 V}{\delta y'^2}\,\delta y' + \frac{\delta^2 V}{\delta y'\,\delta z'}\,\delta z' + \frac{\delta^2 V}{\delta y'\,\delta \chi}\,\delta\chi,$$

$$-\delta\upsilon' = \frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta z'}\,\delta x + \frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta z'}\,\delta y + \frac{\delta^2 V}{\delta z\,\delta z'}\,\delta z +$$

$$+\ \frac{\delta^2 V}{\delta x'\,\delta z'}\,\delta x' + \frac{\delta^2 V}{\delta y'\,\delta z'}\,\delta y' + \frac{\delta^2 V}{\delta z'^2}\,\delta z' + \frac{\delta^2 V}{\delta z'\,\delta \chi}\,\delta\chi,$$

$$\delta\,\frac{\delta V}{\delta \chi} = \frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta \chi}\,\delta x + \frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta \chi}\,\delta y + \frac{\delta^2 V}{\delta z\,\delta \chi}\,\delta z +$$

$$+\ \frac{\delta^2 V}{\delta x'\,\delta \chi}\,\delta x' + \frac{\delta^2 V}{\delta y'\,\delta \chi}\,\delta y' + \frac{\delta^2 V}{\delta z'\,\delta \chi}\,\delta z' + \frac{\delta^2 V}{\delta \chi^2}\,\delta\chi. \tag{7.1}$$

Но если конечная среда однородна, то σ, τ, υ перестают быть независимыми – их связывает в этом случае уравнение (4.10), и соотношение (4.2) распадается не на семь уравнений (4.7) и (4.8), а на шесть уравнений (4.7) и (4.9), дифференциалы которых в сочетании с дифференциалом уравнения (4.10) позволяют получить выражения для $\delta\sigma$, $\delta\tau$, $\delta\upsilon$, $\delta\sigma'$, $\delta\tau'$, $\delta\upsilon'$, $\delta\,\delta V/\delta\chi$, подлежащие, как и прежде, сравнению с правыми частями соотношений (7.1). И в этом случае (однородной конечной среды) мы можем воспользоваться вместо двух первых уравнений (4.9) любым из вариантов этих уравнений, приведенных в предыдущем разделе, или следующими вариантами уравнений (4.9):

$$x + z\,\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma} = \frac{\delta W}{\delta\sigma}, \qquad y + z\,\frac{\delta\upsilon}{\delta\tau} = \frac{\delta W}{\delta\tau}, \qquad z\,\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi} = \frac{\delta V}{\delta\chi} + \frac{\delta W}{\delta\chi}, \tag{7.2}$$

где W рассматривается как функция шести независимых переменных σ, τ, χ, x', y', z', получающаяся при подстановке вместо υ соответствующего выражения, задающего υ как функцию переменных σ, τ, χ. Вид функции υ зависит от свойств конеч-

ной среды, характеризует их и определяется уравнением (4.10). Быть может, описанную выше последовательность действий полезно проделать в явном виде, чтобы, во-первых, более подробно объяснить их природу и, во-вторых, использовать результаты в дальнейших исследованиях.

Итак, дифференцируя первые два из уравнений (7.2), получаем

$$\delta x+\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}\delta z-\delta'\frac{\delta W}{\delta\sigma}+z\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\sigma\,\delta\chi}\delta\chi=\left(\frac{\delta^2W}{\delta\sigma^2}-z\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\sigma^2}\right)\delta\sigma+\left(\frac{\delta^2W}{\delta\sigma\,\delta\tau}-z\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\sigma\,\delta\tau}\right)\delta\tau,$$

$$\delta y+\frac{\delta\upsilon}{\delta\tau}\delta z-\delta'\frac{\delta W}{\delta\tau}+z\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\tau\,\delta\chi}\delta\chi=\left(\frac{\delta^2W}{\delta\sigma\,\delta\tau}-z\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\sigma\,\delta\tau}\right)\delta\sigma+\left(\frac{\delta^2W}{\delta\tau^2}-z\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\tau^2}\right)\delta\tau, \quad (7.3)$$

где для краткости мы положили

$$\delta'\frac{\delta W}{\delta\sigma}=\frac{\delta^2W}{\delta\sigma\,\delta x'}\delta x'+\frac{\delta^2W}{\delta\sigma\,\delta y'}\delta y'+\frac{\delta^2W}{\delta\sigma\,\delta z'}\delta z'+\frac{\delta^2W}{\delta\sigma\,\delta\chi}\delta\chi,$$

$$\delta'\frac{\delta W}{\delta\tau}=\frac{\delta^2W}{\delta\tau\,\delta x'}\delta x'+\frac{\delta^2W}{\delta\tau\,\delta y'}\delta y'+\frac{\delta^2W}{\delta\tau\,\delta z'}\delta z'+\frac{\delta^2W}{\delta\tau\,\delta\chi}\delta\chi. \quad (7.4)$$

Символ δ' относится только к вариациям координат начальной точки и цвета. Если положить

$$w''=\left(\frac{\delta^2W}{\delta\sigma^2}-z\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\sigma^2}\right)\left(\frac{\delta^2W}{\delta\tau^2}-z\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\tau^2}\right)-\left(\frac{\delta^2W}{\delta\sigma\,\delta\tau}-z\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\sigma\,\delta\tau}\right)^2, \quad (7.5)$$

то уравнения (7.3) после элементарных преобразований принимают вид

$$w''\delta\sigma=\left(\frac{\delta^2W}{\delta\tau^2}-z\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\tau^2}\right)\left(\delta x+\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}\delta z-\delta'\frac{\delta W}{\delta\sigma}+z\frac{\delta^2W}{\delta\sigma\,\delta\chi}\delta\chi\right)-$$
$$-\left(\frac{\delta^2W}{\delta\sigma\,\delta\tau}-z\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\sigma\,\delta\tau}\right)\left(\delta y+\frac{\delta\upsilon}{\delta\tau}\delta z-\delta'\frac{\delta W}{\delta\tau}+z\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\tau\,\delta\chi}\delta\chi\right),$$

$$w''\delta\tau=\left(\frac{\delta^2W}{\delta\sigma^2}-z\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\sigma^2}\right)\left(\delta y+\frac{\delta\upsilon}{\delta\tau}\delta z-\delta'\frac{\delta W}{\delta\tau}+z\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\tau\,\delta\chi}\delta\chi\right)-$$
$$-\left(\frac{\delta^2W}{\delta\sigma\,\delta\tau}-z\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\sigma\,\delta\tau}\right)\left(\delta x+\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}\delta z-\delta'\frac{\delta W}{\delta\sigma}+z\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\sigma\,\delta\chi}\delta\chi\right). \quad (7.6)$$

Следовательно, непосредственно из соотношений (7.1), не дифференцируя дополнительно, мы получаем уравнения

$$\frac{\delta^2V}{\delta x^2}=\frac{1}{w''}\left(\frac{\delta^2W}{\delta\tau^2}-z\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\tau^2}\right),\qquad \frac{\delta^2V}{\delta x\,\delta z}=\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}\frac{\delta^2V}{\delta x^2}+\frac{\delta\upsilon}{\delta\tau}\frac{\delta^2V}{\delta x\,\delta y},$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta y} = -\frac{1}{w''}\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta\tau} - z\frac{\delta^2 \upsilon}{\delta\sigma\,\delta\tau}\right), \qquad \frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta z} = \frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta y} + \frac{\delta\upsilon}{\delta\tau}\frac{\delta^2 V}{\delta y^2},$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta y^2} = \frac{1}{w''}\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma^2} - z\frac{\delta^2 \upsilon}{\delta\sigma^2}\right), \qquad \frac{\delta^2 V}{\delta z^2} = \frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta z} + \frac{\delta\upsilon}{\delta\tau}\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta z}. \tag{7.7}$$

При выводе шестого из уравнений (7.7) необходимо иметь в виду, что из определений (2.4) и в силу зависимости υ от σ, τ выполняется равенство

$$\delta\frac{\delta V}{\delta z} = (\delta\upsilon =)\,\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}\,\delta\frac{\delta V}{\delta x} + \frac{\delta\upsilon}{\delta\tau}\,\delta\frac{\delta V}{\delta y} + \frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}\delta\chi. \tag{7.8}$$

Из соотношений (7.1), (7.6) и (7.8) мы получаем также, что

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta x'} = \frac{1}{w''}\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta x'}\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta\tau} - z\frac{\delta^2 \upsilon}{\delta\sigma\,\delta\tau}\right) - \frac{1}{w''}\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta x'}\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\tau^2} - z\frac{\delta^2 \upsilon}{\delta\tau^2}\right),$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta y'} = \frac{1}{w''}\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta y'}\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta\tau} - z\frac{\delta^2 \upsilon}{\delta\sigma\,\delta\tau}\right) - \frac{1}{w''}\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta y'}\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\tau^2} - z\frac{\delta^2 \upsilon}{\delta\tau^2}\right),$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta z'} = \frac{1}{w''}\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta z'}\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta\tau} - z\frac{\delta^2 \upsilon}{\delta\sigma\,\delta\tau}\right) - \frac{1}{w''}\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta z'}\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\tau^2} - z\frac{\delta^2 \upsilon}{\delta\tau^2}\right),$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta x'} = \frac{1}{w''}\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta x'}\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta\tau} - z\frac{\delta^2 \upsilon}{\delta\sigma\,\delta\tau}\right) - \frac{1}{w''}\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta x'}\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma^2} - z\frac{\delta^2 \upsilon}{\delta\sigma^2}\right),$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta y'} = \frac{1}{w''}\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta y'}\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta\tau} - z\frac{\delta^2 \upsilon}{\delta\sigma\,\delta\tau}\right) - \frac{1}{w''}\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta y'}\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma^2} - z\frac{\delta^2 \upsilon}{\delta\sigma^2}\right),$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta z'} = \frac{1}{w''}\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta z'}\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta\tau} - z\frac{\delta^2 \upsilon}{\delta\sigma\,\delta\tau}\right) - \frac{1}{w''}\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta z'}\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma^2} - z\frac{\delta^2 \upsilon}{\delta\sigma^2}\right),$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta z\,\delta x'} = \frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta x'} + \frac{\delta\upsilon}{\delta\tau}\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta x'},$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta z\,\delta y'} = \frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta y'} + \frac{\delta\upsilon}{\delta\tau}\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta y'},$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta z\,\delta z'} = \frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta z'} + \frac{\delta\upsilon}{\delta\tau}\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta z'} \tag{7.9}$$

и

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta\chi} = \frac{1}{w''}\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta\chi} - z\frac{\delta^2 \upsilon}{\delta\tau\,\delta\chi}\right)\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta\tau} - z\frac{\delta^2 \upsilon}{\delta\sigma\,\delta\tau}\right) -$$

$$-\frac{1}{w''}\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta\chi}-z\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\sigma\,\delta\chi}\right)\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\tau^2}-z\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\tau^2}\right),$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta\chi}=\frac{1}{w''}\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta\chi}-z\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\sigma\delta\chi}\right)\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta\tau}-z\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\sigma\delta\tau}\right)-$$

$$-\frac{1}{w''}\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta\chi}-z\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\tau\,\delta\chi}\right)\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma^2}-z\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\sigma^2}\right),$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta z\,\delta\chi}=\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta\chi}-\frac{\delta\upsilon}{\delta\tau}\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta\chi}+\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}. \tag{7.10}$$

Итак, мы получили соотношения (7.7), (7.9) и (7.10) для восемнадцати из двадцати восьми частных производных второго порядка характеристической функции V. Соотношения, задающие девять из десяти оставшихся производных, а именно все производные, кроме $\delta^2V/\delta\chi^2$, мы найдем, дифференцируя соотношения (4.7) и сравнивая дифференциалы с соотношениями (7.1):

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x'^2}=-\frac{\delta^2 W}{\delta x'^2}-\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta x'}\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta x'}-\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta x'}\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta x'},$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta y'^2}=-\frac{\delta^2 W}{\delta y'^2}-\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta y'}\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta y'}-\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta y'}\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta y'},$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta z'^2}=-\frac{\delta^2 W}{\delta z'^2}-\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta z'}\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta z'}-\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta z'}\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta z'},$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x'\,\delta y'}=-\frac{\delta^2 W}{\delta x'\,\delta y'}-\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta x'}\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta y'}-\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta x'}\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta y'},$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta y'\,\delta z'}=-\frac{\delta^2 W}{\delta y'\,\delta z'}-\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta y'}\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta z'}-\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta y'}\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta z'},$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta z'\,\delta x'}=-\frac{\delta^2 W}{\delta z'\,\delta x'}-\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta z'}\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta x'}-\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta z'}\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta x'} \tag{7.11}$$

и

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x'\,\delta\chi}=-\frac{\delta^2 W}{\delta x'\,\delta\chi}-\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta x'}\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta\chi}-\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta x'}\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta\chi},$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta y'\,\delta\chi}=-\frac{\delta^2 W}{\delta y'\,\delta\chi}-\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta y'}\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta\chi}-\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta y'}\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta\chi},$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta z'\,\delta\chi}=-\frac{\delta^2 W}{\delta z'\,\delta\chi}-\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta z'}\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta\chi}-\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta z'}\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta\chi}. \tag{7.12}$$

Из соотношений (4.7) мы находим также, что

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x'\,\delta y'} = -\frac{\delta^2 W}{\delta x'\,\delta y'} - \frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta y'}\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta x'} - \frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta y'}\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta x'},$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta y'\,\delta z'} = -\frac{\delta^2 W}{\delta y'\,\delta z'} - \frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta z'}\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta y'} - \frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta z'}\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta y'},$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta z'\,\delta x'} = -\frac{\delta^2 W}{\delta z'\,\delta x'} - \frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta x'}\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta z'} - \frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta x'}\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta z'}. \qquad (7.13)$$

Но три соотношения (7.13) согласуются с тремя соотношениями (7.11), так как из соотношений (7.9) следует, что

$$\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta x'}\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta y'} + \frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta x'}\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta y'} = \frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta y'}\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta x'} + \frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta y'}\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta x'},$$

$$\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta y'}\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta z'} + \frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta y'}\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta z'} = \frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta z'}\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta y'} + \frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta z'}\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta y'},$$

$$\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta z'}\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta x'} + \frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta z'}\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta x'} = \frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta x'}\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta z'} + \frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta x'}\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta z'}. \qquad (7.14)$$

Наконец, что касается двадцать восьмой производной $\delta^2 V/\delta\chi^2$, то ее можно получить, дифференцируя третье уравнение (7.2):

$$\frac{\delta^2 V}{\delta\chi^2} = z\frac{\delta^2 \upsilon}{\delta\chi^2} - \frac{\delta^2 W}{\delta\chi^2} + \left(z\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\sigma\,\delta\chi} - \frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta\chi}\right)\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta\chi} + \left(z\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\tau\,\delta\chi} - \frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta\chi}\right)\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta\chi}. \qquad (7.15)$$

Если бы нам понадобилось обобщить двадцать восемь соотношений (7.7), (7.9)–(7.12), (7.15) с тем, чтобы сделать их независимыми от принятого выше частного предположения, превратившего W путем предварительного исключения υ в функцию лишь шести независимых переменных σ, τ, χ, x', y', z', то мы могли бы добиться желаемого с помощью надлежащего обобщения пятнадцати из двадцати одной производной второго порядка вспомогательной функции W, полученных выше на основе упрощающего предположения, т.е. оставив неизменными шесть производных, возникающих при дифференцировании только по x', y', z', но изменив $\delta^2 W/\delta\sigma^2$ и другие производные так, чтобы те перешли в более общие выражения $[\delta^2 W/\delta\sigma^2]$ и т.д.:

$$\left[\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma^2}\right] = \frac{\delta^2 W}{\delta\sigma^2} + 2\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta\upsilon}\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma} + \frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon^2}\left(\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}\right)^2 + \frac{\delta W}{\delta\sigma}\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\sigma^2},$$

$$\left[\frac{\delta^2 W}{\delta\tau^2}\right] = \frac{\delta^2 W}{\delta\tau^2} + 2\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta\upsilon}\frac{\delta\upsilon}{\delta\tau} + \frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon^2}\left(\frac{\delta\upsilon}{\delta\tau}\right)^2 + \frac{\delta W}{\delta\tau}\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\tau^2},$$

$$\left[\frac{\delta^2 W}{\delta\chi^2}\right] = \frac{\delta^2 W}{\delta\chi^2} + 2\frac{\delta^2 W}{\delta\chi\,\delta\upsilon}\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi} + \frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon^2}\left(\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}\right)^2 + \frac{\delta W}{\delta\chi}\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\chi^2},$$

$$\left[\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta\tau}\right]=\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta\tau}+2\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta\upsilon}\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}+\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta\upsilon}\frac{\delta\upsilon}{\delta\tau}+\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon^2}\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}\frac{\delta\upsilon}{\delta\tau}+\frac{\delta W}{\delta\upsilon}\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\sigma\,\delta\tau},$$

$$\left[\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta\chi}\right]=\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta\chi}+\frac{\delta^2 W}{\delta\chi\,\delta\upsilon}\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}+\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta\upsilon}\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}+\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon^2}\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}+\frac{\delta W}{\delta\upsilon}\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\sigma\,\delta\chi},$$

$$\left[\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta\chi}\right]=\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta\chi}+\frac{\delta^2 W}{\delta\chi\,\delta\upsilon}\frac{\delta\upsilon}{\delta\tau}+\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta\upsilon}\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}+\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon^2}\frac{\delta\upsilon}{\delta\tau}\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}+\frac{\delta W}{\delta\upsilon}\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\tau\,\delta\chi},$$

$$\left[\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta x'}\right]=\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta x'}+\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\,\delta x'}\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma},\qquad \left[\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta x'}\right]=\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta x'}+\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\,\delta x'}\frac{\delta\upsilon}{\delta\tau},$$

$$\left[\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta y'}\right]=\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta y'}+\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\,\delta y'}\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma},\qquad \left[\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta y'}\right]=\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta y'}+\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\,\delta y'}\frac{\delta\upsilon}{\delta\tau},$$

$$\left[\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta z'}\right]=\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\,\delta z'}+\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\,\delta z'}\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma},\qquad \left[\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta z'}\right]=\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\,\delta z'}+\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\,\delta z'}\frac{\delta\upsilon}{\delta\tau},$$

$$\left[\frac{\delta^2 W}{\delta\chi\,\delta x'}\right]=\frac{\delta^2 W}{\delta\chi\,\delta x'}+\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\,\delta x'}\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi},\qquad \left[\frac{\delta^2 W}{\delta\chi\,\delta y'}\right]=\frac{\delta^2 W}{\delta\chi\,\delta y'}+\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\,\delta y'}\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi},$$

$$\left[\frac{\delta^2 W}{\delta\chi\,\delta z'}\right]=\frac{\delta^2 W}{\delta\chi\,\delta z'}+\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\,\delta z'}\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}. \tag{7.16}$$

Соотношения (7.16) мы получили, дифференцируя три соотношения между частными производными первого порядка

$$\left[\frac{\delta W}{\delta\sigma}\right]=\frac{\delta W}{\delta\sigma}+\frac{\delta W}{\delta\upsilon}\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma},\qquad \left[\frac{\delta W}{\delta\tau}\right]=\frac{\delta W}{\delta\tau}+\frac{\delta W}{\delta\upsilon}\frac{\delta\upsilon}{\delta\tau},\qquad \left[\frac{\delta W}{\delta\chi}\right]=\frac{\delta W}{\delta\chi}+\frac{\delta W}{\delta\upsilon}\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}, \tag{7.17}$$

которые надлежит подставить в уравнения (7.2) вместо

$$\delta W/\delta\sigma,\quad \delta W/\delta\tau,\quad \delta W/\delta\chi.$$

Вывод частных производных функции W из частных производных характеристической функции V. Однородные преобразования

8. Наоборот, если бы частные производные вспомогательной функции W требовалось вывести из частных производных характеристической функции V, то в случае конечной неоднородной среды необходимо лишь сравнить представления величин

$$\delta x,\ \delta y,\ \delta z,\ \delta\sigma',\ \delta\tau',\ \delta\upsilon',\quad -\delta\frac{\delta V}{\delta\chi}$$

в виде линейных функций от $\delta\sigma$, $\delta\tau$, $\delta\upsilon$, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta\chi$, выведенные из соотно-

шений (7.1) с аналогичными выражениями для тех же величин, полученными с помощью дифференцирования семи уравнений (4.7), (4.8), на которые распадается соотношение (4.2), т.е. с выражениями для вариаций величин

$$\frac{\delta W}{\delta \sigma},\ \frac{\delta W}{\delta \tau},\ \frac{\delta W}{\delta \upsilon},\ \frac{\delta W}{\delta x'},\ \frac{\delta W}{\delta y'},\ \frac{\delta W}{\delta z'},\ \frac{\delta W}{\delta \chi}.$$

Если же конечная среда однородна, то соотношение (4.2) не порождает семи уравнений (4.7), (4.8) и соотношения (7.1) разрешимы не относительно самих величин δx, δy, δz, а лишь относительно некоторых их комбинаций. Вид вспомогательной функции W не определяется полностью знанием одной лишь характеристической функции V, с которой W связана, ибо в этом случае семь переменных, от которых зависит W, не являются независимыми – четыре из них связаны между собой уравнением (4.10). Это уравнение может бесконечно многими способами изменять зависимость W от семи переменных, между тем как зависимость V от семи переменных и свойства оптической комбинации будут оставаться неизменными. Неопределенность в виде функции W, выводимой из V, порождает в этом же случае неопределенность в частных производных функции W. В то время как W, рассматриваемая как функция семи переменных, имеет тридцать пять частных производных первого и второго порядка, существует лишь двадцать семь соотношений между этими тридцатью пятью производными, если не считать того случая, когда мы принимаем некое частное допущение относительно W, например уже упоминавшееся допущение о том, что одна из связанных переменных (в качестве такой переменной мы выберем υ) не входит в задачу, так как была предварительно исключена. Такое допущение дает восемь условий:

$$\frac{\delta W}{\delta \upsilon}=0,\quad \frac{\delta^2 W}{\delta \sigma\,\delta \upsilon}=0,\quad \frac{\delta^2 W}{\delta \tau\,\delta \upsilon}=0,\quad \frac{\delta^2 W}{\delta \upsilon^2}=0,$$

$$\frac{\delta^2 W}{\delta \upsilon\,\delta \chi}=0,\quad \frac{\delta^2 W}{\delta \upsilon\,\delta x'}=0,\quad \frac{\delta^2 W}{\delta \upsilon\,\delta y'}=0,\quad \frac{\delta^2 W}{\delta \upsilon\,\delta z'}=0. \tag{8.1}$$

Это конкретное предположение устраняет неопределенность в самой функции W и, следовательно, в ее частных производных. Восемь из них (напомним, что нас интересуют только производные первого и второго порядка) обращаются в нуль в силу условий (8.1), а остальные двадцать семь полностью определены (при условии, что производные характеристической функции V и переменные известны) шестью соотношениями (4.7), (7.2), тремя стоящими слева в (7.7), шестью первыми из (7.9), двумя первыми из (7.10) и соотношениями (7.11), (7.12), (7.15). Разлагая перечисленные соотношения на элементарные уравнения, полезно иметь в виду, что

$$\frac{1}{w''}=\frac{\delta^2 V}{\delta x^2}\frac{\delta^2 V}{\delta y^2}-\left(\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta y}\right)^2. \tag{8.2}$$

Это равенство следует из (7.5) и (7.7). Двадцать семь выражений для частных производных функции W первого и второго порядка, выведенных в предположении,

что одно из связанных переменных исключено, могут быть обобщены с помощью соотношений (7.16), (7.17) и переходят в двадцать семь соотношений между тридцатью пятью производными, которые, как мы уже упоминали, существуют при любом другом предположении. Это предположение, если его достаточно для однозначного задания вида функции W, даст нам восемь остальных условий, аналогичных условиям (8.1). Они необходимы для того, чтобы полностью определить искомые производные.

Например, если задать функцию W так, чтобы она была однородной степени 1 по σ, τ, υ, то мы получим восемь условий

$$\sigma\frac{\delta W}{\delta\sigma}+\tau\frac{\delta W}{\delta\tau}+\upsilon\frac{\delta W}{\delta\upsilon}=W, \tag{8.3}$$

и

$$\sigma\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma^2}+\tau\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta\tau}+\upsilon\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta\upsilon}=0, \qquad \sigma\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta\tau}+\tau\frac{\delta^2 W}{\delta\tau^2}+\upsilon\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta\upsilon}=0,$$

$$\sigma\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta\upsilon}+\tau\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta\upsilon}+\upsilon\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon^2}=0,$$

$$\sigma\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta x'}+\tau\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta x'}+\upsilon\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\delta x'}=\frac{\delta W}{\delta x'}, \qquad \sigma\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta y'}+\tau\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta y'}+\upsilon\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\delta y'}=\frac{\delta W}{\delta y'},$$

$$\sigma\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta z'}+\tau\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta z'}+\upsilon\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\delta z'}=\frac{\delta W}{\delta z'},$$

$$\sigma\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta\chi}+\tau\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta\chi}+\upsilon\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\delta\chi}=\frac{\delta W}{\delta\chi}. \tag{8.4}$$

Их надлежит решать совместно с двадцатью семью соотношениями, которые не зависят от вида функции W и выводятся с помощью уже упоминавшегося общего метода. Вместе с тем предположение об однородности [вспомогательной функции] представляется заслуживающим особого исследования ввиду симметрии всех операций и результатов, к которым оно приводит.

Итак, обратимся вновь к уравнениям (6.18)

$$x=\frac{\delta W}{\delta\sigma}+V\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}, \quad y=\frac{\delta W}{\delta\tau}+V\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}, \quad z=\frac{\delta W}{\delta\upsilon}+V\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon},$$

которые были выведены в п. 6 из однородности, приписанной нами теперь вспомогательной функции W. Уравнения (6.18) надлежит решать совместно с уравнением

$$\frac{\delta W}{\delta\chi}+\frac{\delta V}{\delta\chi}+V\frac{\delta\Omega}{\delta\chi}=0 \tag{8.5}$$

и общими уравнениями (4.7) из п. 4

$$\sigma'=\frac{\delta W}{\delta x'}, \quad \tau'=\frac{\delta W}{\delta y'}, \quad \upsilon'=\frac{\delta W}{\delta z'}.$$

Пользуясь соотношениями (7.1), исключим

$$\delta x,\ \delta y,\ \delta z,\ \delta\sigma',\ \delta\tau',\ \delta\upsilon',\ \left[\delta\frac{\delta V}{\delta\chi}\right]$$

из дифференциалов семи уравнений (6.18), (4.7) и (8.5), т.е. из семи уравнений

$$\delta\frac{\delta W}{\delta\sigma}+V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}=\delta x-\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\,\delta V,$$

$$\delta\frac{\delta W}{\delta\tau}+V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}=\delta y-\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\,\delta V,$$

$$\delta\frac{\delta W}{\delta\upsilon}+V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}=\delta z-\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\,\delta V,$$

$$\delta\frac{\delta W}{\delta x'}=\delta\sigma',\qquad \delta\frac{\delta W}{\delta y'}=\delta\tau',\qquad \delta\frac{\delta W}{\delta z'}=\delta\upsilon',$$

$$\delta\frac{\delta W}{\delta\chi}+V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\chi}=-\delta\frac{\delta V}{\delta x}-\frac{\delta\Omega}{\delta\chi}\delta V. \tag{8.6}$$

Исключив указанные переменные, получим

$$\lambda^{(1)}\delta\Omega=-\delta\sigma+\delta'\frac{\delta V}{\delta x}+\frac{\delta^2 V}{\delta x^2}\left(\delta\frac{\delta W}{\delta\sigma}+V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right)+\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta y}\left(\delta\frac{\delta W}{\delta\tau}+V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right)+$$
$$+\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta z}\left(\delta\frac{\delta W}{\delta\upsilon}+V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right),$$

$$\lambda^{(2)}\delta\Omega=-\delta\tau+\delta'\frac{\delta V}{\delta y}+\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta y}\left(\delta\frac{\delta W}{\delta\sigma}+V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right)+\frac{\delta^2 V}{\delta y^2}\left(\delta\frac{\delta W}{\delta\tau}+V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right)+$$
$$+\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta z}\left(\delta\frac{\delta W}{\delta\upsilon}+V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right),$$

$$\lambda^{(3)}\delta\Omega=-\delta\upsilon+\delta'\frac{\delta V}{\delta z}+\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta z}\left(\delta\frac{\delta W}{\delta\sigma}+V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right)+\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta z}\left(\delta\frac{\delta W}{\delta\tau}+V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right)+$$
$$+\frac{\delta^2 V}{\delta z^2}\left(\delta\frac{\delta W}{\delta\upsilon}+V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right),$$

$$\lambda^{(4)}\delta\Omega=\delta\frac{\delta W}{\delta x'}+\delta'\frac{\delta V}{\delta x'}+\frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta x'}\left(\delta\frac{\delta W}{\delta\sigma}+V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right)+\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta x'}\left(\delta\frac{\delta W}{\delta\tau}+V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right)+$$
$$+\frac{\delta^2 V}{\delta z\,\delta x'}\left(\delta\frac{\delta W}{\delta\upsilon}+V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right),$$

$$\lambda^{(5)}\delta\Omega = \delta\frac{\delta W}{\delta y'} + \delta'\frac{\delta V}{\delta y'} + \frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta y'}\left(\delta\frac{\delta W}{\delta\sigma} + V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right) + \frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta y'}\left(\delta\frac{\delta W}{\delta\tau} + V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right) +$$
$$+ \frac{\delta^2 V}{\delta z\,\delta y'}\left(\delta\frac{\delta W}{\delta\upsilon} + V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right),$$
$$\lambda^{(6)}\delta\Omega = \delta\frac{\delta W}{\delta z'} + \delta'\frac{\delta V}{\delta z'} + \frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta z'}\left(\delta\frac{\delta W}{\delta\sigma} + V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right) + \frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta z'}\left(\delta\frac{\delta W}{\delta\tau} + V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right) +$$
$$+ \frac{\delta^2 V}{\delta z\,\delta z'}\left(\delta\frac{\delta W}{\delta\upsilon} + V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right),$$
$$\lambda^{(7)}\delta\Omega = \delta\frac{\delta W}{\delta\chi} + V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\chi} + \delta'\frac{\delta V}{\delta\chi} + \frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta\chi}\left(\delta\frac{\delta W}{\delta\sigma} + V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right) +$$
$$+ \frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta\chi}\left(\delta\frac{\delta W}{\delta\tau} + V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right) + \frac{\delta^2 V}{\delta z\,\delta\chi}\left(\delta\frac{\delta W}{\delta\upsilon} + V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right). \qquad (8.7)$$

В соотношениях (8.7) мы положили для краткости

$$\delta'\frac{\delta V}{\delta x} = \frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta x'}\delta x' + \frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta y'}\delta y' + \frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta z'}\delta z' + \frac{\delta^2 V}{\delta x\,\delta\chi}\delta\chi,$$
$$\delta'\frac{\delta V}{\delta y} = \frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta x'}\delta x' + \frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta y'}\delta y' + \frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta z'}\delta z' + \frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta\chi}\delta\chi,$$
$$\delta'\frac{\delta V}{\delta z} = \frac{\delta^2 V}{\delta z\,\delta x'}\delta x' + \frac{\delta^2 V}{\delta z\,\delta y'}\delta y' + \frac{\delta^2 V}{\delta z\,\delta z'}\delta z' + \frac{\delta^2 V}{\delta z\,\delta\chi}\delta\chi,$$
$$\delta'\frac{\delta V}{\delta x'} = \frac{\delta^2 V}{\delta x'^2}\delta x' + \frac{\delta^2 V}{\delta x'\delta y'}\delta y' + \frac{\delta^2 V}{\delta x'\delta z'}\delta z' + \frac{\delta^2 V}{\delta x'\delta\chi}\delta\chi,$$
$$\delta'\frac{\delta V}{\delta y'} = \frac{\delta^2 V}{\delta x'\delta y'}\delta x' + \frac{\delta^2 V}{\delta y'^2}\delta y' + \frac{\delta^2 V}{\delta y'\delta z'}\delta z' + \frac{\delta^2 V}{\delta y'\delta\chi}\delta\chi,$$
$$\delta'\frac{\delta V}{\delta z'} = \frac{\delta^2 V}{\delta x'\delta z'}\delta x' + \frac{\delta^2 V}{\delta y'\delta z'}\delta y' + \frac{\delta^2 V}{\delta z'^2}\delta z' + \frac{\delta^2 V}{\delta z'\delta\chi}\delta\chi,$$
$$\delta'\frac{\delta V}{\delta\chi} = \frac{\delta^2 V}{\delta x'\delta\chi}\delta x' + \frac{\delta^2 V}{\delta y'\delta\chi}\delta y' + \frac{\delta^2 V}{\delta z'\delta\chi}\delta z' + \frac{\delta^2 V}{\delta\chi^2}\delta\chi \qquad (8.8)$$

(символ δ' имеет здесь такой же смысл, как и в равенствах (7.4)) и заметили, что из уравнения в частных производных (5.3) (см. п. 5)

$$\Omega\left(\frac{\delta V}{\delta x}, \frac{\delta V}{\delta y}, \frac{\delta V}{\delta z}, \chi\right) = 0$$

следуют соотношения

$$\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\frac{\delta^2 V}{\delta x^2}+\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y}+\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta z}=0,\qquad \frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y}+\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\frac{\delta^2 V}{\delta y^2}+\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta z}=0,$$

$$\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta z}+\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta z}+\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\frac{\delta^2 V}{\delta z^2}=0,\qquad \frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta x'}+\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta x'}+\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\frac{\delta^2 V}{\delta z\delta x'}=0,$$

$$\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y'}+\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta y'}+\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\frac{\delta^2 V}{\delta z\delta y'}=0,\qquad \frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta z'}+\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta z'}+\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\frac{\delta^2 V}{\delta z\delta z'}=0,$$

$$\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta\chi}+\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta\chi}+\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\frac{\delta^2 V}{\delta z\delta\chi}=-\frac{\delta\Omega}{\delta\chi}. \tag{8.9}$$

В уравнения (8.7) введены члены $\lambda^{(1)}\delta\Omega, ..., \lambda^{(7)}\delta\Omega$. Их можно считать независимыми от вариаций $\delta\sigma, \delta\tau, \delta\upsilon, \delta\chi$, связанных условием $\delta\Omega = 0$.

Для того чтобы определить множители $\lambda^{(1)}, ..., \lambda^{(7)}$, необходимо заметить следующее. При выводе предыдущих соотношений уравнение $\Omega = 0$, связывающее четыре переменные $\sigma, \tau, \upsilon, \chi$, по предположению было представлено (с помощью метода, упоминавшегося в п. 2) в таком виде, что функция Ω, будучи увеличенной на единицу, станет однородной степени 1 по переменным σ, τ, υ, поэтому при всех значениях переменных $\sigma, \tau, \upsilon, \chi$ тождественно выполняется уравнение

$$\sigma\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}+\tau\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}+\upsilon\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}=\Omega+1 \tag{8.10}$$

и, следовательно,

$$\sigma\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma^2}+\tau\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\tau}+\upsilon\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\upsilon}=0,\qquad \sigma\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\tau}+\tau\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau^2}+\upsilon\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau\delta\upsilon}=0,$$

$$\sigma\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\tau}+\tau\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau\delta\upsilon}+\upsilon\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon^2}=0,\qquad \sigma\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\chi}+\tau\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau\delta\chi}+\upsilon\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon\delta\chi}=\frac{\delta\Omega}{\delta\chi}. \tag{8.11}$$

Из условий (8.4) однородности функции W нетрудно заключить [7], что множители имеют следующие значения:

$$\lambda^{(1)}=-\sigma,\ \lambda^{(2)}=-\tau,\ \lambda^{(3)}=-\upsilon,\ \lambda^{(4)}=\sigma',\ \lambda^{(5)}=\tau',\ \lambda^{(6)}=\upsilon',\ \lambda^{(7)}=-\frac{\delta V}{\delta\chi} \tag{8.12}$$

(в правильности их можно удостовериться, обратившись к уравнениям (4.7) и (8.5)). Подставив эти значения в семь уравнений (8.7), мы можем разложить последние в семь других уравнений, если примем семь переменных $\delta\sigma, \delta\tau, \delta\upsilon, \delta x', \delta y', \delta z', \delta\chi$ за независимые, и в результате получим для определения сорока восьми частных производных второго порядка функции W, зависящей от $\sigma, \tau, \upsilon, x', y', z', \chi$ и однородной степени 1 по σ, τ, υ, сорок девять уравнений, из которых независимы лишь сорок восемь. Первые производные функции определяются из семи уравнений (4.7), (6.18), (8.5).

Вместо того чтобы производные функции W второго порядка вычислять указанным способом путем исключения соответствующих переменных из уравнений, на

которые разлагаются уравнения (8.7), проще исключать переменные прямо из самих уравнений (8.7) и получать выражения для вариаций

$$\delta\frac{\delta W}{\delta\sigma},\ldots,\ \delta\frac{\delta W}{\delta\chi}$$

производных функции W первого порядка, из которых непосредственно следуют выражения для производных второго порядка. Так, исключая переменные из трех первых уравнений (8.7), чтобы получить выражения для трех вариаций

$$\delta\frac{\delta W}{\delta\sigma},\ \delta\frac{\delta W}{\delta\tau},\ \delta\frac{\delta W}{\delta\upsilon},$$

мы после некоторых симметричных преобразований находим

$$\delta\frac{\delta W}{\delta\sigma}=-V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}+\frac{1}{\mathrm{v}^2V''}\left(\tau\frac{\delta^2V}{\delta x\delta z}-\upsilon\frac{\delta^2V}{\delta x\delta y}\right)\left\{\upsilon\left(\delta\tau-\delta'\frac{\delta V}{\delta y}\right)-\tau\left(\delta\upsilon-\delta'\frac{\delta V}{\delta z}\right)\right\}-$$
$$-\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\delta'V+\frac{1}{\mathrm{v}^2V''}\left(\tau\frac{\delta^2V}{\delta y\delta z}-\upsilon\frac{\delta^2V}{\delta y^2}\right)\left\{\sigma\left(\delta\upsilon-\delta'\frac{\delta V}{\delta z}\right)-\upsilon\left(\delta\sigma-\delta'\frac{\delta V}{\delta x}\right)\right\}+$$
$$+\frac{1}{\mathrm{v}^2V''}\left(\tau\frac{\delta^2V}{\delta z^2}-\upsilon\frac{\delta^2V}{\delta y\delta z}\right)\left\{\tau\left(\delta\sigma-\delta'\frac{\delta V}{\delta x}\right)-\sigma\left(\delta\tau-\delta'\frac{\delta V}{\delta y}\right)\right\},$$

$$\delta\frac{\delta W}{\delta\tau}=-V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}+\frac{1}{\mathrm{v}^2V''}\left(\upsilon\frac{\delta^2V}{\delta x^2}-\sigma\frac{\delta^2V}{\delta x\delta z}\right)\left\{\upsilon\left(\delta\tau-\delta'\frac{\delta V}{\delta y}\right)-\tau\left(\delta\upsilon-\delta'\frac{\delta V}{\delta z}\right)\right\}-$$
$$-\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\delta'V+\frac{1}{\mathrm{v}^2V''}\left(\upsilon\frac{\delta^2V}{\delta x\delta y}-\sigma\frac{\delta^2V}{\delta y\delta z}\right)\left\{\sigma\left(\delta\upsilon-\delta'\frac{\delta V}{\delta z}\right)-\upsilon\left(\delta\sigma-\delta'\frac{\delta V}{\delta x}\right)\right\}+$$
$$+\frac{1}{\mathrm{v}^2V''}\left(\upsilon\frac{\delta^2V}{\delta x\delta z}-\sigma\frac{\delta^2V}{\delta z^2}\right)\left\{\tau\left(\delta\sigma-\delta'\frac{\delta V}{\delta x}\right)-\sigma\left(\delta\tau-\delta'\frac{\delta V}{\delta y}\right)\right\},$$

$$\delta\frac{\delta W}{\delta\upsilon}=-V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}+\frac{1}{\mathrm{v}^2V''}\left(\sigma\frac{\delta^2V}{\delta x\delta y}-\tau\frac{\delta^2V}{\delta x^2}\right)\left\{\upsilon\left(\delta\tau-\delta'\frac{\delta V}{\delta y}\right)-\tau\left(\delta\upsilon-\delta'\frac{\delta V}{\delta z}\right)\right\}-$$
$$-\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\delta'V+\frac{1}{\mathrm{v}^2V''}\left(\sigma\frac{\delta^2V}{\delta y^2}-\tau\frac{\delta^2V}{\delta x\delta y}\right)\left\{\sigma\left(\delta\upsilon-\delta'\frac{\delta V}{\delta z}\right)-\upsilon\left(\delta\sigma-\delta'\frac{\delta V}{\delta x}\right)\right\}+$$
$$+\frac{1}{\mathrm{v}^2V''}\left(\sigma\frac{\delta^2V}{\delta y\delta z}-\tau\frac{\delta^2V}{\delta x\delta z}\right)\left\{\tau\left(\delta\sigma-\delta'\frac{\delta V}{\delta x}\right)-\sigma\left(\delta\tau-\delta'\frac{\delta V}{\delta y}\right)\right\},\qquad(8.13)$$

где

$$V''=\frac{\delta^2V}{\delta x^2}\frac{\delta^2V}{\delta y^2}-\left(\frac{\delta^2V}{\delta x\delta y}\right)^2+\frac{\delta^2V}{\delta y^2}\frac{\delta^2V}{\delta z^2}-\left(\frac{\delta^2V}{\delta y\delta z}\right)^2+\frac{\delta^2V}{\delta z^2}\frac{\delta^2V}{\delta x^2}-\left(\frac{\delta^2V}{\delta z\delta x}\right)^2,$$

$$\frac{1}{v^2} = \left(\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right)^2 + \left(\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right)^2, \tag{8.14}$$

v имеет прежний смысл, δ' относится только к вариациям переменных x', y', z', χ, V'' имеет такой же смысл, как и в первом "Дополнении". Исключая соответствующие переменные, мы использовали такие функции W, Ω, для которых

$$\sigma\left(\delta\frac{\delta W}{\delta\sigma} + V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right) + \tau\left(\delta\frac{\delta W}{\delta\tau} + V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right) + \upsilon\left(\delta\frac{\delta W}{\delta\upsilon} + V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right) = -\delta' V, \tag{8.15}$$

а также уравнения (8.9), которые в обозначениях (8.14) приводят к соотношениям

$$\frac{\delta^2 V}{\delta y^2}\frac{\delta^2 V}{\delta z^2} - \left(\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta z}\right)^2 = V'' v^2,$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y}\frac{\delta^2 V}{\delta z\delta x} - \frac{\delta^2 V}{\delta x^2}\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta z} = V'' v^2 \frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon},$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta z^2}\frac{\delta^2 V}{\delta x^2} - \left(\frac{\delta^2 V}{\delta z\delta x}\right)^2 = V'' v^2,$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta z}\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y} - \frac{\delta^2 V}{\delta y^2}\frac{\delta^2 V}{\delta z\delta x} = V'' v^2 \frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma},$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x^2}\frac{\delta^2 V}{\delta y^2} - \left(\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y}\right)^2 = V'' v^2 \left(\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right)^2,$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta z\delta x}\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta z} - \frac{\delta^2 V}{\delta z^2}\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y} = V'' v^2 \frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}. \tag{8.16}$$

После того как мы получили выражения (8.13) для трех вариаций

$$\delta\frac{\delta W}{\delta\sigma}, \quad \delta\frac{\delta W}{\delta\tau}, \quad \delta\frac{\delta W}{\delta\upsilon},$$

нам остается лишь подставить их в четыре последних уравнения (8.7), из которых, не исключая никаких новых величин, мы найдем четыре другие вариации

$$\delta\frac{\delta W}{\delta x'}, \quad \delta\frac{\delta W}{\delta y'}, \quad \delta\frac{\delta W}{\delta z'}, \quad \delta\frac{\delta W}{\delta\chi},$$

после чего немедленно получаем двадцать восемь частных производных функции W второго порядка. Например, шесть производных второго порядка, возникающих при дифференцировании функции W по σ, τ, υ выражаются следующими шестью

равенствами, выведенными из соотношений (8.13):

$$\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma^2} = -V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma^2} + \frac{1}{\nu^2 V''}\left(\tau^2\frac{\delta^2 V}{\delta z^2} + \upsilon^2\frac{\delta^2 V}{\delta y^2} - 2\tau\upsilon\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta z}\right),$$

$$\frac{\delta^2 W}{\delta\tau^2} = -V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau^2} + \frac{1}{\nu^2 V''}\left(\upsilon^2\frac{\delta^2 V}{\delta x^2} + \sigma^2\frac{\delta^2 V}{\delta z^2} - 2\upsilon\sigma\frac{\delta^2 V}{\delta z\delta x}\right),$$

$$\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon^2} = -V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon^2} + \frac{1}{\nu^2 V''}\left(\sigma^2\frac{\delta^2 V}{\delta y^2} + \tau^2\frac{\delta^2 V}{\delta x^2} - 2\sigma\tau\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y}\right),$$

$$\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta\tau} = -V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\tau} + \frac{1}{\nu^2 V''}\left(-\upsilon^2\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y} + \tau\upsilon\frac{\delta^2 V}{\delta z\delta x} + \upsilon\sigma\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta z} - \sigma\tau\frac{\delta^2 V}{\delta z^2}\right),$$

$$\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta\upsilon} = -V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau\delta\upsilon} + \frac{1}{\nu^2 V''}\left(-\sigma^2\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta z} + \upsilon\sigma\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y} + \sigma\tau\frac{\delta^2 V}{\delta z\delta x} - \tau\upsilon\frac{\delta^2 V}{\delta x^2}\right),$$

$$\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\delta\sigma} = -V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon\delta\sigma} + \frac{1}{\nu^2 V''}\left(-\tau^2\frac{\delta^2 V}{\delta z\delta x} + \sigma\tau\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta z} + \tau\upsilon\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y} - \upsilon\sigma\frac{\delta^2 V}{\delta y^2}\right). \quad (8.17)$$

Можно показать, что формулы (8.17) согласуются с аналогичными, но менее простыми выражениями, приведенными в первом "Дополнении", и поэтому представимы в виде одного общего соотношения

$$\nu^2 V''(\delta''^2 W + V\delta''^2\Omega) = \frac{\delta^2 V}{\delta x^2}(\tau\delta\upsilon - \upsilon\delta\tau)^2 + 2\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta z}(\upsilon\delta\sigma - \sigma\delta\upsilon)(\sigma\delta\tau - \tau\delta\sigma) +$$
$$+\frac{\delta^2 V}{\delta y^2}(\upsilon\delta\sigma - \sigma\delta\upsilon)^2 + 2\frac{\delta^2 V}{\delta z\delta x}(\sigma\delta\tau - \tau\delta\sigma)(\tau\delta\upsilon - \upsilon\delta\tau) +$$
$$+\frac{\delta^2 V}{\delta z^2}(\sigma\delta\tau - \tau\delta\sigma)^2 + 2\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y}(\tau\delta\upsilon - \upsilon\delta\tau)(\upsilon\delta\sigma - \sigma\delta\upsilon), \quad (8.18)$$

где знак вариации δ'' относится только к переменным σ, τ, υ, так же как δ' – только к переменным x', y', z', χ.

Вся совокупность из двадцати восьми выражений для двадцати восьми производных функции W второго порядка может быть представлена одной формулой

$$\nu^2 V''(\delta^2 W + V\delta^2\Omega + 2\delta' V\delta\Omega + \delta'^2 V) = \frac{\delta^2 V}{\delta x^2}\left\{\tau\left(\delta\upsilon - \delta'\frac{\delta V}{\delta z}\right) - \upsilon\left(\delta\tau - \delta'\frac{\delta V}{\delta y}\right)\right\}^2 +$$
$$+\frac{\delta^2 V}{\delta y^2}\left\{\upsilon\left(\delta\sigma - \delta'\frac{\delta V}{\delta x}\right) - \sigma\left(\delta\upsilon - \delta'\frac{\delta V}{\delta z}\right)\right\}^2 + \frac{\delta^2 V}{\delta z^2}\left\{\sigma\left(\delta\tau - \delta'\frac{\delta V}{\delta y}\right) - \tau\left(\delta\sigma - \delta'\frac{\delta V}{\delta x}\right)\right\}^2 +$$

$$+2\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y}\left\{\tau\left(\delta\upsilon-\delta'\frac{\delta V}{\delta z}\right)-\upsilon\left(\delta\tau-\delta'\frac{\delta V}{\delta y}\right)\right\}\left\{\upsilon\left(\delta\sigma-\delta'\frac{\delta V}{\delta x}\right)-\sigma\left(\delta\upsilon-\delta'\frac{\delta V}{\delta z}\right)\right\}+$$

$$+2\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta z}\left\{\upsilon\left(\delta\sigma-\delta'\frac{\delta V}{\delta x}\right)-\sigma\left(\delta\upsilon-\delta'\frac{\delta V}{\delta z}\right)\right\}\left\{\sigma\left(\delta\tau-\delta'\frac{\delta V}{\delta y}\right)-\tau\left(\delta\sigma-\delta'\frac{\delta V}{\delta x}\right)\right\}+$$

$$+2\frac{\delta^2 V}{\delta z\delta x}\left\{\sigma\left(\delta\tau-\delta'\frac{\delta V}{\delta y}\right)-\tau\left(\delta\sigma-\delta'\frac{\delta V}{\delta x}\right)\right\}\left\{\tau\left(\delta\upsilon-\delta'\frac{\delta V}{\delta z}\right)-\upsilon\left(\delta\tau-\delta'\frac{\delta V}{\delta y}\right)\right\}. \qquad (8.19)$$

Смысл символов δ'^2 и δ''^2 нетрудно понять из предыдущего, а семь вариаций $\delta\sigma$, $\delta\tau$, $\delta\upsilon$, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta\chi$ можно считать независимыми.

Формула (8.18) имеет обратную, которая выводится из уравнений (8.6) и имеет вид

$$\frac{\delta'''^2 V}{\nu^2 V''}=\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma^2}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma^2}\right)\left(\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\delta z-\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\delta y\right)^2+$$

$$+\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\tau^2}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau^2}\right)\left(\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\delta x-\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\delta z\right)^2+\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon^2}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon^2}\right)\left(\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\delta y-\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\delta x\right)^2+$$

$$+2\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta\tau}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\tau}\right)\left(\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\delta z-\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\delta y\right)\left(\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\delta x-\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\delta z\right)+$$

$$+2\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta\upsilon}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau\delta\upsilon}\right)\left(\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\delta x-\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\delta z\right)\left(\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\delta y-\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\delta x\right)+$$

$$+2\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\delta\sigma}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon\delta\sigma}\right)\left(\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\delta y-\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\delta x\right)\left(\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\delta z-\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\delta y\right), \qquad (8.20)$$

где δ''' относится к x, y, z, а функция V''' связана с функцией W соотношением

$$\frac{\sigma^2+\tau^2+\upsilon^2}{V''\nu^2}=\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma^2}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma^2}\right)\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\tau^2}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau^2}\right)-\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta\tau}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\tau}\right)^2+$$

$$+\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\tau^2}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau^2}\right)\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon^2}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon^2}\right)-\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta\upsilon}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau\delta\upsilon}\right)^2+$$

$$+\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon^2}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon^2}\right)\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma^2}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma^2}\right)-\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\delta\sigma}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon\delta\sigma}\right)^2. \qquad (8.21)$$

Более громоздкая формула (8.19) также имеет обратную:

$$\frac{1}{V''\mathrm{v}^2}(\delta^2 V + V\delta'^2\Omega + 2\delta V\delta'\Omega + \delta'^2 W) =$$

$$= \left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma^2} + V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma^2}\right)\left\{\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\left(\delta z - \delta'\frac{\delta W}{\delta\upsilon} - V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right) - \frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\left(\delta y - \delta'\frac{\delta W}{\delta\tau} - V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right)\right\}^2 +$$

$$+ \left(\frac{\delta^2 W}{\delta\tau^2} + V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau^2}\right)\left\{\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\left(\delta x - \delta'\frac{\delta W}{\delta\sigma} - V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right) - \frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\left(\delta z - \delta'\frac{\delta W}{\delta\upsilon} - V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right)\right\}^2 +$$

$$+ \left(\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon^2} + V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon^2}\right)\left\{\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\left(\delta y - \delta'\frac{\delta W}{\delta\tau} - V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right) - \frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\left(\delta x - \delta'\frac{\delta W}{\delta\sigma} - V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right)\right\}^2 +$$

$$+2\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta\tau} + V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\tau}\right)\left\{\begin{matrix}\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\left(\delta z - \delta'\frac{\delta W}{\delta\upsilon} - V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right)\\ -\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\left(\delta y - \delta'\frac{\delta W}{\delta\tau} - V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right)\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\left(\delta x - \delta'\frac{\delta W}{\delta\sigma} - V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right)\\ -\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\left(\delta z - \delta'\frac{\delta W}{\delta\upsilon} - V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right)\end{matrix}\right\} +$$

$$+2\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta\upsilon} + V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau\delta\upsilon}\right)\left\{\begin{matrix}\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\left(\delta x - \delta'\frac{\delta W}{\delta\sigma} - V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right)\\ -\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\left(\delta z - \delta'\frac{\delta W}{\delta\upsilon} - V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right)\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\left(\delta y - \delta'\frac{\delta W}{\delta\tau} - V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right)\\ -\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\left(\delta x - \delta'\frac{\delta W}{\delta\sigma} - V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right)\end{matrix}\right\} +$$

$$+2\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\delta\sigma} + V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon\delta\sigma}\right)\left\{\begin{matrix}\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\left(\delta y - \delta'\frac{\delta W}{\delta\tau} - V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right)\\ -\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\left(\delta x - \delta'\frac{\delta W}{\delta\sigma} - V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right)\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\left(\delta z - \delta'\frac{\delta W}{\delta\upsilon} - V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right)\\ -\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\left(\delta y - \delta'\frac{\delta W}{\delta\tau} - V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right)\end{matrix}\right\}. \tag{8.22}$$

Символ δ' сохраняет здесь свое прежнее значение, а поскольку Ω не содержит переменные x', y', z', то в последней формуле

$$\delta'\Omega = \frac{\delta\Omega}{\delta\chi}\delta\chi, \quad \delta'^2\Omega = \frac{\delta^2\Omega}{\delta\chi^2}\delta\chi^2,$$

$$\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma} = \frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\chi}\delta\chi, \quad \delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\tau} = \frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau\delta\chi}\delta\chi, \quad \delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon} = \frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon\delta\chi}\delta\chi. \tag{8.23}$$

Если мы не станем предполагать, что W – однородная функция степени 1 по σ, τ, υ, положим для краткости

$$\sigma\frac{\delta W}{\delta\sigma}+\tau\frac{\delta W}{\delta\tau}+\upsilon\frac{\delta W}{\delta\upsilon}-W=w_1 \tag{8.24}$$

и обозначим через δW_1 и $\delta^2 W_1$ выражения, найденные выше в предположении, что W – однородная функция степени 1 по σ, τ, υ для ее вариаций первого и второго порядка, т.е. в первом порядке (из соотношений (4.7), (6.18), (8.5)) выражение

$$\delta W_1 = x\delta\sigma+y\delta\tau+z\delta\upsilon+\sigma'\delta x'+\tau'\delta y'+\upsilon'\delta z'-\frac{\delta W}{\delta\chi}-V\delta\Omega, \tag{8.25}$$

а во втором порядке $\delta^2 W_1$ равно выражению для $\delta^2 W$, задаваемому формулой (8.19), то указанные частные соотношения для δW_1 и $\delta^2 W_1$ можно обобщить, заменив их следующими:

$$\delta W_1 = \delta W - w_1\delta\Omega,$$

$$\delta^2 W_1 = \delta^2 W - w_1\delta^2\Omega - 2\delta w_1\delta\Omega + \left(\sigma\frac{\delta w_1}{\delta\sigma}+\tau\frac{\delta w_1}{\delta\tau}+\upsilon\frac{\delta w_1}{\delta\upsilon}\right)\delta\Omega^2, \tag{8.26}$$

где δW, $\delta^2 W$ – общие выражения, не зависящие от условия однородности $w_1 = 0$ и выбора предположения относительно вида функции W. Однако мы считаем при этом, что конечная среда однородна и что при взятии вариаций функции W величины $\sigma, \tau, \upsilon, x', y', z'$, от которых она зависит, рассматриваются так, как если бы они были независимыми переменными.

Если бы мы вздумали выводить выражения для вариаций функции W первого и второго порядка δW_n, $\delta^2 W_n$ в предположении, что W перед дифференцированием выбрана однородной функцией степени n по σ, τ, υ, то, положив

$$\sigma\frac{\delta W}{\delta\sigma}+\tau\frac{\delta W}{\delta\tau}+\upsilon\frac{\delta W}{\delta\upsilon}-nW=w_n, \tag{8.27}$$

мы получили бы соотношения

$$\delta W_n = \delta W - w_n\delta\Omega,$$

$$\delta^2 W_n = \delta^2 W - w_n\delta^2\Omega - 2\delta w_n\delta\Omega + \left(\sigma\frac{\delta w_n}{\delta\sigma}+\tau\frac{\delta w_n}{\delta\tau}+\upsilon\frac{\delta w_n}{\delta\upsilon}+w_n-nw_n\right)\delta\Omega^2, \tag{8.28}$$

которые содержат соотношения (8.26) в качестве частного случая. Общий анализ этих однородных преобразований достаточно интересен, но мы не можем останавливаться на нем.

Вывод частных производных функции T из частных производных функции W и наоборот

9. Общие принципы исследования связей между частными производными второго порядка характеристической и вспомогательной функций были достаточно объяснены замечаниями, сделанными в начале п. 7, и деталями, приведенными в п. 7 и 8, поэтому в дальнейшем мы ограничимся исследованием этих связей для новой

вспомогательной функции T в случае, когда начальная и конечная среды однородны. Поскольку взаимосвязь между производными двух функций V и W нами уже установлена, достаточно выяснить, как связаны производные любой из этих функций, например функции W, с производными первого и второго порядков функции T. Тем самым будут установлены связи между производными всех трех функций. Мы будем предполагать, что W перед дифференцированием выбрана однородной функцией степени 1по σ, τ, υ. Это облегчит сравнение получаемых нами результатов с симметричными выражениями, выведенными в указанном предположении, – выражениями, которые могут быть обобщены так, как это показано выше. Аналогичным образом мы будем предполагать, что T – однородная функция степени 1 по σ, τ, υ и σ', τ', υ'. Попытаемся выразить частные производные первого и второго порядков функции T через аналогичные производные функции W в предположении, что обе функции выбраны однородными.

Пытаясь установить интересующие нас связи, мы, как и прежде, будем исходить из условий однородности (8.3), (8.4) для функции W и аналогичных условий для функции T, а именно условий для производных первого порядка

$$\sigma\frac{\delta T}{\delta\sigma}+\tau\frac{\delta T}{\delta\tau}+\upsilon\frac{\delta T}{\delta\upsilon}=T,\quad \sigma'\frac{\delta T}{\delta\sigma'}+\tau'\frac{\delta T}{\delta\tau'}+\upsilon'\frac{\delta T}{\delta\upsilon'}=T \tag{9.1}$$

и производных второго порядка

$$\sigma\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma^2}+\tau\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma\delta\tau}+\upsilon\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma\delta\upsilon}=0,\quad \sigma'\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma'^2}+\tau'\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma'\delta\tau'}+\upsilon'\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma'\delta\tau'}=0,$$

$$\sigma\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma\delta\tau}+\tau\frac{\delta^2 T}{\delta\tau^2}+\upsilon\frac{\delta^2 T}{\delta\tau\delta\upsilon}=0,\quad \sigma'\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma'\delta\tau'}+\tau'\frac{\delta^2 T}{\delta\tau'^2}+\upsilon'\frac{\delta^2 T}{\delta\tau'\delta\upsilon'}=0,$$

$$\sigma\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma\delta\upsilon}+\tau\frac{\delta^2 T}{\delta\tau\delta\upsilon}+\upsilon\frac{\delta^2 T}{\delta\upsilon^2}=0,\quad \sigma'\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma'\delta\upsilon'}+\tau'\frac{\delta^2 T}{\delta\tau'\delta\upsilon'}+\upsilon'\frac{\delta^2 T}{\delta\upsilon'^2}=0,$$

$$\frac{\delta T}{\delta\sigma'}=\sigma\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma\delta\sigma'}+\tau\frac{\delta^2 T}{\delta\tau\delta\sigma'}+\upsilon\frac{\delta^2 T}{\delta\upsilon\delta\sigma'},\quad \frac{\delta T}{\delta\sigma}=\sigma'\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma\delta\sigma'}+\tau'\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma\delta\tau'}+\upsilon'\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma\delta\upsilon'},$$

$$\frac{\delta T}{\delta\tau'}=\sigma\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma\delta\tau'}+\tau\frac{\delta^2 T}{\delta\tau\delta\tau'}+\upsilon\frac{\delta^2 T}{\delta\upsilon\delta\tau'},\quad \frac{\delta T}{\delta\tau}=\sigma'\frac{\delta^2 T}{\delta\tau\delta\sigma'}+\tau'\frac{\delta^2 T}{\delta\tau\delta\tau'}+\upsilon'\frac{\delta^2 T}{\delta\tau\delta\upsilon'},$$

$$\frac{\delta T}{\delta\upsilon'}=\sigma\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma\delta\upsilon'}+\tau\frac{\delta^2 T}{\delta\tau\delta\upsilon'}+\upsilon\frac{\delta^2 T}{\delta\upsilon\delta\upsilon'},\quad \frac{\delta T}{\delta\tau}=\sigma'\frac{\delta^2 T}{\delta\upsilon\delta\sigma'}+\tau'\frac{\delta^2 T}{\delta\upsilon\delta\tau'}+\upsilon'\frac{\delta^2 T}{\delta\upsilon\delta\upsilon'},$$

$$\frac{\delta T}{\delta\chi}=\sigma\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma\delta\chi}+\tau\frac{\delta^2 T}{\delta\tau\delta\chi}+\upsilon\frac{\delta^2 T}{\delta\upsilon\delta\chi},\quad \frac{\delta T}{\delta\chi}=\sigma'\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma'\delta\chi}+\tau'\frac{\delta^2 T}{\delta\tau'\delta\chi}+\upsilon'\frac{\delta^2 T}{\delta\upsilon'\delta\chi}, \tag{9.2}$$

а также из условий (8.10), (8.11) на функции Ω, Ω' и следующих:

$$\sigma'\frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'}+\tau'\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}+\upsilon'\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'}=\Omega'+1,$$

$$\sigma'\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\sigma'^2}+\tau'\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\sigma'\delta\tau'}+\upsilon'\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\sigma'\delta\upsilon'}=0,$$

$$\sigma'\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\sigma'\delta\tau'}+\tau'\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\tau'^2}+\upsilon'\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\tau'\delta\upsilon'}=0,$$

$$\sigma'\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\sigma'\delta\upsilon'}+\tau'\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\tau'\delta\upsilon'}+\upsilon'\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\upsilon'^2}=0,$$

$$\sigma'\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\sigma'\delta\chi}+\tau'\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\tau'\delta\chi}+\upsilon'\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\upsilon'\delta\chi}=\frac{\delta\Omega'}{\delta\chi}. \tag{9.3}$$

Мы располагаем также общими соотношениями (4.7) $\delta W/\delta x'=\sigma'$, $\delta W/\delta y'=\tau'$, $\delta W/\delta z'=\upsilon'$. Комбинируя их с предыдущими условиями и с уравнением в частных производных (5.8), получаем следующие соотношения, аналогичные соотношениям (8.9) [8]:

$$\frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'}\frac{\delta^2 W}{\delta x'^2}+\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}\frac{\delta^2 W}{\delta x'\delta y'}+\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'}\frac{\delta^2 W}{\delta x'\delta z'}=0,$$

$$\frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'}\frac{\delta^2 W}{\delta x'\delta y'}+\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}\frac{\delta^2 W}{\delta y'^2}+\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'}\frac{\delta^2 W}{\delta y'\delta z'}=0,$$

$$\frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'}\frac{\delta^2 W}{\delta x'\delta z'}+\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}\frac{\delta^2 W}{\delta y'\delta z'}+\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'}\frac{\delta^2 W}{\delta z'^2}=0,$$

$$\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}=\frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'}\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta x'}+\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta y'}+\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'}\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta z'},$$

$$\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}=\frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'}\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta x'}+\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta y'}+\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'}\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta z'},$$

$$\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}=\frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'}\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\delta x'}+\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\delta y'}+\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'}\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\delta z'},$$

$$\frac{\delta\Omega}{\delta\chi}-\frac{\delta\Omega'}{\delta\chi}=\frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'}\frac{\delta^2 W}{\delta\chi\delta x'}+\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}\frac{\delta^2 W}{\delta\chi\delta y'}+\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'}\frac{\delta^2 W}{\delta\chi\delta z'}. \tag{9.4}$$

Условия однородности двух функций W, T в сочетании с фундаментальным соотношением (4.5) между этими двумя функциями и свойствами функций Ω, Ω' дают с учетом соотношений (4.7) следующие выражения для частных производных функ-

ции T первого порядка:

$$\frac{\delta T}{\delta\sigma}=\frac{\delta W}{\delta\sigma}+(T-W)\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma},\quad \frac{\delta T}{\delta\sigma'}=-x'+W\frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'},$$
$$\frac{\delta T}{\delta\tau}=\frac{\delta W}{\delta\tau}+(T-W)\frac{\delta\Omega}{\delta\tau},\quad \frac{\delta T}{\delta\tau'}=-y'+W\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'},$$
$$\frac{\delta T}{\delta\upsilon}=\frac{\delta W}{\delta\upsilon}+(T-W)\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon},\quad \frac{\delta T}{\delta\upsilon'}=-z'+W\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'},$$
$$\frac{\delta T}{\delta\chi}=\frac{\delta W}{\delta\chi}+(T-W)\frac{\delta\Omega}{\delta\chi}+W\frac{\delta\Omega'}{\delta\chi}. \tag{9.5}$$

Дифференцируя соотношения (9.5) и исключая вариации $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ с помощью дифференциалов общих уравнений (4.7), мы получаем с помощью соотношений (9.4) следующую систему, аналогичную системе (8.7):

$$\lambda_1\delta\Omega+\lambda_1'\delta\Omega'=\frac{\delta^2W}{\delta x'^2}\left(\delta\frac{\delta T}{\delta\sigma'}-W\delta\frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'}\right)+\frac{\delta^2W}{\delta x'\delta y'}\left(\delta\frac{\delta T}{\delta\tau'}-W\delta\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}\right)+$$
$$+\frac{\delta^2W}{\delta x'\delta z'}\left(\delta\frac{\delta T}{\delta\upsilon'}-W\delta\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'}\right)-\delta,\frac{\delta W}{\delta x'}+\delta\sigma',$$

$$\lambda_2\delta\Omega+\lambda_2'\delta\Omega'=\frac{\delta^2W}{\delta x'\delta y'}\left(\delta\frac{\delta T}{\delta\sigma'}-W\delta\frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'}\right)+\frac{\delta^2W}{\delta y'^2}\left(\delta\frac{\delta T}{\delta\tau'}-W\delta\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}\right)+$$
$$+\frac{\delta^2W}{\delta y'\delta z'}\left(\delta\frac{\delta T}{\delta\upsilon'}-W\delta\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'}\right)-\delta,\frac{\delta W}{\delta y'}+\delta\tau',$$

$$\lambda_3\delta\Omega+\lambda_3'\delta\Omega'=\frac{\delta^2W}{\delta x'\delta z'}\left(\delta\frac{\delta T}{\delta\sigma'}-W\delta\frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'}\right)+\frac{\delta^2W}{\delta y'\delta z'}\left(\delta\frac{\delta T}{\delta\tau'}-W\delta\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}\right)+$$
$$+\frac{\delta^2W}{\delta z'^2}\left(\delta\frac{\delta T}{\delta\upsilon'}-W\delta\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'}\right)-\delta,\frac{\delta W}{\delta z'}+\delta\upsilon',$$

$$\lambda_4\delta\Omega+\lambda_4'\delta\Omega'=\frac{\delta^2W}{\delta\sigma\delta x'}\left(\delta\frac{\delta T}{\delta\sigma'}-W\delta\frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'}\right)+\frac{\delta^2W}{\delta\sigma\delta y'}\left(\delta\frac{\delta T}{\delta\tau'}-W\delta\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}\right)+$$
$$+\frac{\delta^2W}{\delta\sigma\delta z'}\left(\delta\frac{\delta T}{\delta\upsilon'}-W\delta\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'}\right)-\delta,\frac{\delta W}{\delta\sigma}+\delta\left(\frac{\delta T}{\delta\sigma}-T\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right)+W\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma},$$

$$\lambda_5\delta\Omega+\lambda_5'\delta\Omega'=\frac{\delta^2W}{\delta\tau\delta x'}\left(\delta\frac{\delta T}{\delta\sigma'}-W\delta\frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'}\right)+\frac{\delta^2W}{\delta\tau\delta y'}\left(\delta\frac{\delta T}{\delta\tau'}-W\delta\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}\right)+$$
$$+\frac{\delta^2W}{\delta\tau\delta z'}\left(\delta\frac{\delta T}{\delta\upsilon'}-W\delta\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'}\right)-\delta,\frac{\delta W}{\delta\tau}+\delta\left(\frac{\delta T}{\delta\tau}-T\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right)+W\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\tau},$$

$$\lambda_6\delta\Omega+\lambda_6'\delta\Omega'=\frac{\delta^2W}{\delta\upsilon\delta x'}\left(\delta\frac{\delta T}{\delta\sigma'}-W\delta\frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'}\right)+\frac{\delta^2W}{\delta\upsilon\delta y'}\left(\delta\frac{\delta T}{\delta\tau'}-W\delta\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}\right)+$$

$$+\frac{\delta^2W}{\delta\upsilon\delta z'}\left(\delta\frac{\delta T}{\delta\upsilon'}-W\delta\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'}\right)-\delta_{,}\frac{\delta W}{\delta\upsilon}+\delta\left(\frac{\delta T}{\delta\upsilon}-T\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right)+W\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon},$$

$$\lambda_7\delta\Omega+\lambda_7'\delta\Omega'=\frac{\delta^2W}{\delta\chi\delta x'}\left(\delta\frac{\delta T}{\delta\sigma'}-W\delta\frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'}\right)+\frac{\delta^2W}{\delta\chi\delta y'}\left(\delta\frac{\delta T}{\delta\tau'}-W\delta\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}\right)+$$

$$+\frac{\delta^2W}{\delta\chi\delta z'}\left(\delta\frac{\delta T}{\delta\upsilon'}-W\delta\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'}\right)-\delta_{,}\frac{\delta W}{\delta\chi}+\delta\left(\frac{\delta T}{\delta\chi}-T\frac{\delta\Omega}{\delta\chi}\right)+W\delta\left(\frac{\delta\Omega}{\delta\chi}-\frac{\delta\Omega'}{\delta\chi}\right). \quad (9.6)$$

Символ $\delta_{,}$ относится только к четырем вариациям $\delta\sigma$, $\delta\tau$, $\delta\upsilon$, $\delta\chi$. Семь вариаций $\delta\sigma$, $\delta\tau$, $\delta\upsilon$, $\delta\chi$, $\delta\sigma'$, $\delta\tau'$, $\delta\upsilon'$ можно считать независимыми, если придать четырнадцати множителям $\lambda_1, \ldots, \lambda_7'$ следующие значения:

$$\lambda_1=\frac{\delta T}{\delta\sigma'}\frac{\delta^2W}{\delta x'^2}+\frac{\delta T}{\delta\tau'}\frac{\delta^2W}{\delta x'\delta y'}+\frac{\delta T}{\delta\upsilon'}\frac{\delta^2W}{\delta x'\delta z'}-\frac{\delta W}{\delta x'},$$

$$\lambda_2=\frac{\delta T}{\delta\sigma'}\frac{\delta^2W}{\delta x'\delta y'}+\frac{\delta T}{\delta\tau'}\frac{\delta^2W}{\delta y'^2}+\frac{\delta T}{\delta\upsilon'}\frac{\delta^2W}{\delta y'\delta z'}-\frac{\delta W}{\delta y'},$$

$$\lambda_3=\frac{\delta T}{\delta\sigma'}\frac{\delta^2W}{\delta x'\delta z'}+\frac{\delta T}{\delta\tau'}\frac{\delta^2W}{\delta y'\delta z'}+\frac{\delta T}{\delta\upsilon'}\frac{\delta^2W}{\delta z'^2}-\frac{\delta W}{\delta z'},$$

$$\lambda_4=\frac{\delta T}{\delta\sigma'}\frac{\delta^2W}{\delta\sigma\delta x'}+\frac{\delta T}{\delta\tau'}\frac{\delta^2W}{\delta\sigma\delta y'}+\frac{\delta T}{\delta\upsilon'}\frac{\delta^2W}{\delta\sigma\delta z'}-T\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma},$$

$$\lambda_5=\frac{\delta T}{\delta\sigma'}\frac{\delta^2W}{\delta\tau\delta x'}+\frac{\delta T}{\delta\tau'}\frac{\delta^2W}{\delta\tau\delta y'}+\frac{\delta T}{\delta\upsilon'}\frac{\delta^2W}{\delta\tau\delta z'}-T\frac{\delta\Omega}{\delta\tau},$$

$$\lambda_6=\frac{\delta T}{\delta\sigma'}\frac{\delta^2W}{\delta\upsilon\delta x'}+\frac{\delta T}{\delta\tau'}\frac{\delta^2W}{\delta\upsilon\delta y'}+\frac{\delta T}{\delta\upsilon'}\frac{\delta^2W}{\delta\upsilon\delta z'}-T\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon},$$

$$\lambda_7=\frac{\delta T}{\delta\sigma'}\frac{\delta^2W}{\delta\chi\delta x'}+\frac{\delta T}{\delta\tau'}\frac{\delta^2W}{\delta\chi\delta y'}+\frac{\delta T}{\delta\upsilon'}\frac{\delta^2W}{\delta\chi\delta z'}-T\frac{\delta\Omega}{\delta\chi}+W\frac{\delta\Omega'}{\delta\chi},$$

$$\lambda_1'=\sigma',\quad \lambda_2'=\tau',\quad \lambda_3=\upsilon',$$

$$\lambda_4'=\frac{\delta W}{\delta\sigma}-W\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma},\quad \lambda_5'=\frac{\delta W}{\delta\tau}-W\frac{\delta\Omega}{\delta\tau},\quad \lambda_6'=\frac{\delta W}{\delta\upsilon}-W\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon},\quad \lambda_7'=\frac{\delta W}{\delta\chi}-W\frac{\delta\Omega}{\delta\chi}. \quad (9.7)$$

Значения множителей $\lambda_1, \dots, \lambda_7$ можно представить также в виде

$$\lambda_1 = -\frac{\delta w'}{\delta x'}, \quad \lambda_4 = -\frac{\delta w'}{\delta\sigma} + (W-T)\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma},$$

$$\lambda_2 = -\frac{\delta w'}{\delta y'}, \quad \lambda_5 = -\frac{\delta w'}{\delta\tau} + (W-T)\frac{\delta\Omega}{\delta\tau},$$

$$\lambda_3 = -\frac{\delta w'}{\delta z'}, \quad \lambda_6 = -\frac{\delta w'}{\delta\upsilon} + (W-T)\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon},$$

$$\lambda_7 = -\frac{\delta w'}{\delta\chi} + (W-T)\frac{\delta\Omega}{\delta\chi}, \tag{9.8}$$

если положить для краткости

$$w' = x'\frac{\delta W}{\delta x'} + y'\frac{\delta W}{\delta y'} + z'\frac{\delta W}{\delta z'} \tag{9.9}$$

и считать w', как и W, функцией переменных $\sigma, \tau, \upsilon, \chi, x', y', z'$ однородной степени 1 по σ, τ, υ. Умножив четыре последних уравнения (9.6) соответственно на $\delta\sigma$, $\delta\tau$, $\delta\upsilon$, $\delta\chi$ и сложив, получим

$$\delta^2 T = (T-W)\delta^2\Omega + W\delta^2\Omega' + (W-T)\delta^2\Omega + (\delta T - \delta_{,} w')\delta\Omega +$$

$$+ (\delta_{,} W - W\delta\Omega)\delta\Omega' + \delta_{,}^2 W -$$

$$-\left(\delta_{,}\frac{\delta W}{\delta x'} - \delta\sigma'\right)\left(\delta\frac{\delta T}{\delta\sigma'} - W\delta\frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'}\right) - \left(\delta_{,}\frac{\delta W}{\delta y'} - \delta\tau'\right)\left(\delta\frac{\delta T}{\delta\tau'} - W\delta\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}\right) -$$

$$-\left(\delta_{,}\frac{\delta W}{\delta z'} - \delta\upsilon'\right)\left(\delta\frac{\delta T}{\delta\upsilon'} - W\delta\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'}\right). \tag{9.10}$$

Символ $\delta_{,}$ по-прежнему относится только к вариациям переменных $\sigma, \tau, \upsilon, \chi$, а три последних уравнения (9.6) после исключения соответствующих величин приводят к соотношениям

$$\delta\frac{\delta T}{\delta\sigma'} - W\delta\frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'} = \frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'}(\delta_{,} W - W\delta\Omega) + \frac{\delta T}{\delta\sigma'}\delta\Omega +$$

$$+\frac{1}{v^2 W'''}\left(\upsilon'\frac{\delta^2 W}{\delta x'\delta y'} - \tau'\frac{\delta^2 W}{\delta x'\delta z'}\right)\left\{\tau'\left(\delta_{,}\frac{\delta W}{\delta z'} - \delta\upsilon'\right) - \upsilon'\left(\delta_{,}\frac{\delta W}{\delta y'} - \delta\tau'\right)\right\} +$$

$$+\frac{1}{v^2 W'''}\left(\upsilon'\frac{\delta^2 W}{\delta y'^2} - \tau'\frac{\delta^2 W}{\delta y'\delta z'}\right)\left\{\upsilon'\left(\delta_{,}\frac{\delta W}{\delta x'} - \delta\sigma'\right) - \sigma'\left(\delta_{,}\frac{\delta W}{\delta z'} - \delta\upsilon'\right)\right\} +$$

$$+\frac{1}{v^2 W'''}\left(\upsilon'\frac{\delta^2 W}{\delta y'\delta z'}-\tau'\frac{\delta^2 W}{\delta z'^2}\right)\left\{\sigma'\left(\delta,\frac{\delta W}{\delta y'}-\delta\tau'\right)-\tau'\left(\delta,\frac{\delta W}{\delta x'}-\delta\sigma'\right)\right\},$$

$$\delta\frac{\delta T}{\delta\tau'}-W\delta\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}=\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}(\delta,W-W\delta\Omega)+\frac{\delta T}{\delta\tau'}\delta\Omega+$$

$$+\frac{1}{v^2 W'''}\left(\sigma'\frac{\delta^2 W}{\delta x'\delta z'}-\upsilon'\frac{\delta^2 W}{\delta x'^2}\right)\left\{\tau'\left(\delta,\frac{\delta W}{\delta z'}-\delta\upsilon'\right)-\upsilon'\left(\delta,\frac{\delta W}{\delta y'}-\delta\tau'\right)\right\}+$$

$$+\frac{1}{v^2 W'''}\left(\sigma'\frac{\delta^2 W}{\delta y'\delta z'}-\upsilon'\frac{\delta^2 W}{\delta x'\delta y'}\right)\left\{\upsilon'\left(\delta,\frac{\delta W}{\delta x'}-\delta\sigma'\right)-\sigma'\left(\delta,\frac{\delta W}{\delta z'}-\delta\upsilon'\right)\right\}+$$

$$+\frac{1}{v^2 W'''}\left(\sigma'\frac{\delta^2 W}{\delta z'^2}-\upsilon'\frac{\delta^2 W}{\delta x'\delta z'}\right)\left\{\sigma'\left(\delta,\frac{\delta W}{\delta y'}-\delta\tau'\right)-\tau'\left(\delta,\frac{\delta W}{\delta x'}-\delta\sigma'\right)\right\},$$

$$\delta\frac{\delta T}{\delta\upsilon'}-W\delta\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'}=\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'}(\delta,W-W\delta\Omega)+\frac{\delta T}{\delta\upsilon'}\delta\Omega+$$

$$+\frac{1}{v^2 W'''}\left(\tau'\frac{\delta^2 W}{\delta x'^2}-\sigma'\frac{\delta^2 W}{\delta x'\delta y'}\right)\left\{\tau'\left(\delta,\frac{\delta W}{\delta z'}-\delta\upsilon'\right)-\upsilon'\left(\delta,\frac{\delta W}{\delta y'}-\delta\tau'\right)\right\}+$$

$$+\frac{1}{v^2 W'''}\left(\tau'\frac{\delta^2 W}{\delta x'\delta y'}-\sigma'\frac{\delta^2 W}{\delta y'^2}\right)\left\{\upsilon'\left(\delta,\frac{\delta W}{\delta x'}-\delta\sigma'\right)-\sigma'\left(\delta,\frac{\delta W}{\delta z'}-\delta\upsilon'\right)\right\}+$$

$$+\frac{1}{v^2 W'''}\left(\tau'\frac{\delta^2 W}{\delta x'\delta z'}-\sigma'\frac{\delta^2 W}{\delta y'\delta z'}\right)\left\{\sigma'\left(\delta,\frac{\delta W}{\delta y'}-\delta\tau'\right)-\tau'\left(\delta,\frac{\delta W}{\delta x'}-\delta\sigma'\right)\right\}, \tag{9.11}$$

где

$$W'''=\frac{\delta^2 W}{\delta x'^2}\frac{\delta^2 W}{\delta y'^2}-\left(\frac{\delta^2 W}{\delta x'\delta y'}\right)^2+\frac{\delta^2 W}{\delta y'^2}\frac{\delta^2 W}{\delta z'^2}-$$

$$-\left(\frac{\delta^2 W}{\delta y'\delta z'}\right)^2+\frac{\delta^2 W}{\delta z'^2}\frac{\delta^2 W}{\delta x'^2}-\left(\frac{\delta^2 W}{\delta z'\delta x'}\right)^2 \tag{9.12}$$

и

$$\frac{1}{v'^2}=\left(\frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'}\right)^2+\left(\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}\right)^2+\left(\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'}\right)^2, \tag{9.13}$$

символ v' имеет тот же смысл, что и в п. 2. Исключая последнюю величину, мы

использовали соотношения (9.4), из которых следует, что

$$\frac{\delta^2 W}{\delta y'^2}\frac{\delta^2 W}{\delta z'^2}-\left(\frac{\delta^2 W}{\delta y'\delta z'}\right)^2 = W''' \, v'^2\left(\frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'}\right)^2, \quad \frac{\delta^2 W}{\delta z'^2}\frac{\delta^2 W}{\delta x'^2}-\left(\frac{\delta^2 W}{\delta z'\delta x'}\right)^2 = W''' \, v'^2\left(\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}\right)^2,$$

$$\frac{\delta^2 W}{\delta x'^2}\frac{\delta^2 W}{\delta y'^2}-\left(\frac{\delta^2 W}{\delta x'\delta y'}\right)^2 = W''' \, v'^2\left(\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'}\right)^2,$$

$$\frac{\delta^2 W}{\delta x'\delta y'}\frac{\delta^2 W}{\delta z'\delta x'}-\frac{\delta^2 W}{\delta x'^2}\frac{\delta^2 W}{\delta y'\delta z'} = W''' \, v'^2\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'},$$

$$\frac{\delta^2 W}{\delta y'\delta z'}\frac{\delta^2 W}{\delta x'\delta y'}-\frac{\delta^2 W}{\delta y'^2}\frac{\delta^2 W}{\delta z'\delta x'} = W''' \, v'^2\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'}\frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'},$$

$$\frac{\delta^2 W}{\delta z'\delta x'}\frac{\delta^2 W}{\delta y'\delta z'}-\frac{\delta^2 W}{\delta z'^2}\frac{\delta^2 W}{\delta x'\delta y'} = W''' \, v'^2\frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'}\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}. \tag{9.14}$$

Из (9.10) и (9.11) получаем следующую формулу для $\delta^2 T$, аналогичную формуле (8.19), тем самым завершая решение интересующей нас задачи, поскольку эта формула эквивалентна двадцати восьми соотношениям для двадцати восьми частных производных функции T второго порядка, выведенным из частных производных функции W:

$$v'^2 W''' \{\delta^2 T + (W-T)\delta^2\Omega - W\delta^2\Omega' - 2\delta_{,} W\delta\Omega' + 2(x'\delta\sigma' + y'\delta\tau' + z'\delta\upsilon')\delta\Omega\} +$$

$$+\frac{\delta^2 W}{\delta x'^2}\left\{\tau'\left(\delta\upsilon' - \delta_{,}\frac{\delta W}{\delta z'}\right) - \upsilon'\left(\delta\tau' - \delta_{,}\frac{\delta W}{\delta y'}\right)\right\}^2 +$$

$$+\frac{\delta^2 W}{\delta y'^2}\left\{\upsilon'\left(\delta\sigma' - \delta_{,}\frac{\delta W}{\delta x'}\right) - \sigma'\left(\delta\upsilon' - \delta_{,}\frac{\delta W}{\delta z'}\right)\right\}^2 +$$

$$+\frac{\delta^2 W}{\delta z'^2}\left\{\sigma'\left(\delta\tau' - \delta_{,}\frac{\delta W}{\delta y'}\right) - \tau'\left(\delta\sigma' - \delta_{,}\frac{\delta W}{\delta x'}\right)\right\}^2 +$$

$$+2\frac{\delta^2 W}{\delta x'\delta y'}\left\{\tau'\left(\delta\upsilon' - \delta_{,}\frac{\delta W}{\delta z'}\right) - \upsilon'\left(\delta\tau' - \delta_{,}\frac{\delta W}{\delta y}\right)\right\}\times$$

$$\times\left\{\upsilon'\left(\delta\sigma' - \delta_{,}\frac{\delta W}{\delta x'}\right) - \sigma'\left(\delta\upsilon' - \delta_{,}\frac{\delta W}{\delta z'}\right)\right\} +$$

$$+2\frac{\delta^2 W}{\delta y'\delta z'}\left\{\upsilon'\left(\delta\sigma' - \delta_{,}\frac{\delta W}{\delta x'}\right) - \sigma'\left(\delta\upsilon' - \delta_{,}\frac{\delta W}{\delta z'}\right)\right\}\times$$

$$\times\left\{\sigma'\left(\delta\tau'-\delta,\frac{\delta W}{\delta y'}\right)-\tau'\left(\delta\sigma'-\delta,\frac{\delta W}{\delta x'}\right)\right\}+$$

$$+2\frac{\delta^2 W}{\delta z'\delta x'}\left\{\sigma'\left(\delta\tau'-\delta,\frac{\delta W}{\delta y'}\right)-\tau'\left(\delta\sigma'-\delta,\frac{\delta W}{\delta x'}\right)\right\}\times$$

$$\times\left\{\tau'\left(\delta\upsilon'-\delta,\frac{\delta W}{\delta z'}\right)-\upsilon'\left(\delta\tau'-\delta,\frac{\delta W}{\delta y'}\right)\right\}=0. \qquad (9.15)$$

Если обозначить через $\delta^2 T_{1,1}$ выражение для второго дифференциала, задаваемое формулой (9.15) и выведенное в предположении, что функция T перед дифференцированием выбрана однородной степени 1 по σ, τ, υ и по $\sigma', \tau', \upsilon'$, а через $\delta T_{1,1}$соответствующее выражение для δT, задаваемое производными (9.5), то оба выражения допускают обобщения с помощью следующих соотношений, аналогичных соотношениям (8.26):

$$\delta T_{1,1}=\delta T-\delta\Omega\nabla_1 T-\delta\Omega'\nabla_1' T,$$

$$\delta^2 T_{1,1}=\delta^2 T-\delta^2\Omega\nabla_1 T-\delta^2\Omega'\nabla_1' T-2\delta\Omega\delta\nabla_1 T-$$

$$-2\delta\Omega'\delta\nabla_1' T+\delta\Omega^2\nabla_1(\nabla_1+1)T+2\delta\Omega\delta\Omega'\nabla_1\nabla_1' T+\delta\Omega'^2\nabla_1'(\nabla_1'+1)T, \qquad (9.16)$$

где ∇_1, ∇_1' – обозначения операций, задаваемых следующими соотношениями символов:

$$\nabla_1=\sigma\frac{\delta}{\delta\sigma}+\tau\frac{\delta}{\delta\tau}+\upsilon\frac{\delta}{\delta\upsilon}-1,\quad \nabla_1'=\sigma'\frac{\delta}{\delta\sigma'}+\tau'\frac{\delta}{\delta\tau'}+\upsilon'\frac{\delta}{\delta\upsilon'}-1. \qquad (9.17)$$

Справедливо и более общее утверждение. Обозначим через $T_{n,n'}$ функцию, выведенную из функции T в предположении об однородности из п. 6. Такая функция $T_{n,n'}$ совпадает с функцией T в том случае, когда переменные $\sigma, \tau, \upsilon, \sigma', \tau', \upsilon', \chi$ связаны между собой уравнениями $\Omega = 0$, $\Omega' = 0$, является однородной функцией степени n по σ, τ, υ и степени n' по $\sigma', \tau', \upsilon'$. Для $T_{n,n'}$ выполняются соотношения, аналогичные соотношениям (8.28):

$$\delta T_{n,n'}=\delta T-\delta\Omega\nabla_n T-\delta\Omega'\nabla_n' T,$$

$$\delta^2 T_{n,n'}=\delta^2 T-\delta^2\Omega\nabla_n T-\delta^2\Omega'\nabla_{n'}' T-2\delta\Omega\delta\nabla_n T-2\delta\Omega'\delta\nabla_{n'}' T+$$

$$+\delta\Omega^2\nabla_n(\nabla_n+1)T+2\delta\Omega\delta\Omega'\nabla_n\nabla_n' T+\delta\Omega'^2\nabla_{n'}'(\nabla_{n'}'+1)T, \qquad (9.18)$$

где ∇_n и $\nabla_{n'}'$ определяются следующим образом:

$$\nabla_n=\sigma\frac{\delta}{\delta\sigma}+\tau\frac{\delta}{\delta\tau}+\upsilon\frac{\delta}{\delta\upsilon}-n,\qquad \nabla_{n'}'=\sigma'\frac{\delta}{\delta\sigma'}+\tau'\frac{\delta}{\delta\tau'}+\upsilon'\frac{\delta}{\delta\upsilon'}-n'. \qquad (9.19)$$

Наоборот, чтобы вывести частные производные функции W второго порядка из частных производных функции T при тех же предположениях об однородности и при тех же степенях $n = 1$, $n' = 1$, необходимо исключить $\delta\sigma', \delta\tau', \sigma\upsilon'$ из дифференциалов (4.7) и (9.5). Проделав необходимые операции, мы придем к системе

$$\lambda_1''\delta\Omega = \left(\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma'^2} - W\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\sigma'^2}\right)\delta\frac{\delta W}{\delta x'} + \left(\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma'\delta\tau'} - W\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\sigma'\delta\tau'}\right)\delta\frac{\delta W}{\delta y'} +$$

$$+\left(\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma'\delta\upsilon'} - W\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\sigma'\delta\upsilon'}\right)\delta\frac{\delta W}{\delta z'} + \delta,\frac{\delta T}{\delta\sigma'} - W\delta,\frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'} + \delta x' - \frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'}\delta W,$$

$$\lambda_2''\delta\Omega = \left(\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma'\delta\tau'} - W\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\sigma'\delta\tau'}\right)\delta\frac{\delta W}{\delta x'} + \left(\frac{\delta^2 T}{\delta\tau'^2} - W\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\tau'^2}\right)\delta\frac{\delta W}{\delta y'} +$$

$$+\left(\frac{\delta^2 T}{\delta\tau'\delta\upsilon'} - W\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\tau'\delta\upsilon'}\right)\delta\frac{\delta W}{\delta z'} + \delta,\frac{\delta T}{\delta\tau'} - W\delta,\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'} + \delta y' - \frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}\delta W,$$

$$\lambda_3''\delta\Omega = \left(\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma'\delta\upsilon'} - W\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\sigma'\delta\upsilon'}\right)\delta\frac{\delta W}{\delta x'} + \left(\frac{\delta^2 T}{\delta\tau'\delta\upsilon'} - W\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\tau'\delta\upsilon'}\right)\delta\frac{\delta W}{\delta y'} +$$

$$+\left(\frac{\delta^2 T}{\delta\upsilon'^2} - W\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\upsilon'^2}\right)\delta\frac{\delta W}{\delta z'} + \delta,\frac{\delta T}{\delta\upsilon'} - W\delta,\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'} + \delta z' - \frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'}\delta W,$$

$$\lambda_4''\delta\Omega = \left(\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma\delta\sigma'} - \frac{\delta T}{\delta\sigma'}\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right)\delta\frac{\delta W}{\delta x'} + \left(\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma\delta\tau'} - \frac{\delta T}{\delta\tau'}\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right)\delta\frac{\delta W}{\delta y'} +$$

$$+\left(\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma\delta\upsilon'} - \frac{\delta T}{\delta\upsilon'}\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right)\delta\frac{\delta W}{\delta z'} - \delta\frac{\delta W}{\delta\sigma} + \delta,\frac{\delta T}{\delta\sigma} + (W - T)\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma} + \frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}(\delta W - \delta,T),$$

$$\lambda_5''\delta\Omega = \left(\frac{\delta^2 T}{\delta\tau\delta\sigma'} - \frac{\delta T}{\delta\sigma'}\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right)\delta\frac{\delta W}{\delta x'} + \left(\frac{\delta^2 T}{\delta\tau\delta\tau'} - \frac{\delta T}{\delta\tau'}\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right)\delta\frac{\delta W}{\delta y'} +$$

$$+\left(\frac{\delta^2 T}{\delta\tau\delta\upsilon'} - \frac{\delta T}{\delta\upsilon'}\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right)\delta\frac{\delta W}{\delta z'} - \delta\frac{\delta W}{\delta\tau} + \delta,\frac{\delta T}{\delta\tau} + (W - T)\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\tau} + \frac{\delta\Omega}{\delta\tau}(\delta W - \delta,T),$$

$$\lambda_6''\delta\Omega = \left(\frac{\delta^2 T}{\delta\upsilon\delta\sigma'} - \frac{\delta T}{\delta\sigma'}\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right)\delta\frac{\delta W}{\delta x'} + \left(\frac{\delta^2 T}{\delta\upsilon\delta\tau'} - \frac{\delta T}{\delta\tau'}\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right)\delta\frac{\delta W}{\delta y'} +$$

$$+\left(\frac{\delta^2 T}{\delta\upsilon\delta\upsilon'} - \frac{\delta T}{\delta\upsilon'}\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right)\delta\frac{\delta W}{\delta z'} - \delta\frac{\delta W}{\delta\upsilon} + \delta,\frac{\delta T}{\delta\upsilon} + (W - T)\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon} + \frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}(\delta W - \delta,T),$$

$$\lambda_7''\delta\Omega = \left(\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma'\delta\chi} - W\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\sigma'\delta\chi} - \frac{\delta T}{\delta\sigma'}\frac{\delta\Omega}{\delta\chi}\right)\delta\frac{\delta W}{\delta x'} +$$

$$+\left(\frac{\delta^2 T}{\delta\tau'\delta\chi} - W\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\tau'\delta\chi} - \frac{\delta T}{\delta\tau'}\frac{\delta\Omega}{\delta\chi}\right)\delta\frac{\delta W}{\delta y'} + \left(\frac{\delta^2 T}{\delta\upsilon'\delta\chi} - W\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\upsilon'\delta\chi} - \frac{\delta T}{\delta\upsilon'}\frac{\delta\Omega}{\delta\chi}\right)\delta\frac{\delta W}{\delta z'} -$$

$$-\delta\frac{\delta W}{\delta\chi} - \delta_{,}\frac{\delta T}{\delta\chi} + (W-T)\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\chi} + \frac{\delta\Omega}{\delta\chi}(\delta W - \delta_{,}T) - W\delta_{,}\frac{\delta\Omega'}{\delta\chi} - \frac{\delta\Omega'}{\delta\chi}\delta W. \qquad (9.20)$$

Символ $\delta_{,}$ по-прежнему относится только к вариациям переменных $\sigma, \tau, \upsilon, \chi$. Множители $\lambda_1'', \ldots, \lambda_7''$ определяются выражениями

$$\lambda_1'' = -x', \quad \lambda_2'' = -y', \quad \lambda_3'' = -z',$$

$$\lambda_4'' = \frac{\delta W}{\delta\sigma} - T\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}, \quad \lambda_5'' = \frac{\delta W}{\delta\tau} - T\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}, \quad \lambda_6'' = \frac{\delta W}{\delta\upsilon} - T\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}, \quad \lambda_7'' = \frac{\delta W}{\delta\chi} - T\frac{\delta\Omega}{\delta\chi}. \qquad (9.21)$$

Следовательно, с помощью рассуждений, аналогичных приведенным выше, мы можем вывести для $\delta^2 W$ формулу, эквивалентную двадцати восьми выражениям для каждой из частных производных функции W второго порядка, выводимых из частных производных функции T при прежнем предположении относительно однородности:

$$\frac{1}{v'^2 W'''}\{\delta^2 W - \delta_{,}^2 T + (T-W)\delta^2\Omega + W\delta_{,}^2\Omega' + 2\delta W(\delta_{,}\Omega' - \delta\Omega) + 2\delta_{,}W\delta\Omega\} +$$

$$+\left(\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma'^2} - W\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\sigma'^2}\right)D^2 + 2\left(\frac{\delta^2 T}{\delta\tau'\delta\upsilon'} - W\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\tau'\delta\upsilon'}\right)D'D'' +$$

$$+\left(\frac{\delta^2 T}{\delta\tau'^2} - W\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\tau'^2}\right)D'^2 + 2\left(\frac{\delta^2 T}{\delta\upsilon'\delta\sigma'} - W\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\upsilon'\delta\sigma'}\right)D''D +$$

$$+\left(\frac{\delta^2 T}{\delta\upsilon'^2} - W\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\upsilon'^2}\right)D''^2 + 2\left(\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma'\delta\tau'} - W\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\sigma'\delta\tau'}\right)DD' = 0, \qquad (9.22)$$

где мы ввели для краткости обозначения

$$D = \frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}\left(\delta z' + z'\delta\Omega + \delta_{,}\frac{\delta T}{\delta\upsilon'} - W\delta_{,}\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'}\right) - \frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'}\left(\delta y' + y'\delta\Omega + \delta_{,}\frac{\delta T}{\delta\tau'} - W\delta_{,}\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}\right),$$

$$D' = \frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'}\left(\delta x' + x'\delta\Omega + \delta_{,}\frac{\delta T}{\delta\sigma'} - W\delta_{,}\frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'}\right) - \frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'}\left(\delta z' + z'\delta\Omega + \delta_{,}\frac{\delta T}{\delta\upsilon'} - W\delta_{,}\frac{\delta\Omega'}{\delta\upsilon'}\right),$$

$$D'' = \frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'}\left(\delta y' + y'\delta\Omega + \delta_{,}\frac{\delta T}{\delta\tau'} - W\delta_{,}\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}\right) - \frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}\left(\delta x' + x'\delta\Omega + \delta_{,}\frac{\delta T}{\delta\sigma'} - W\delta_{,}\frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'}\right) \qquad (9.23)$$

и где функция W''' связана с T соотношением

$$\frac{\sigma'^2+\tau'^2+\upsilon'^2}{v'^2\,W'''}=\left(\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma'^2}-W\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\sigma'^2}\right)\left(\frac{\delta^2 T}{\delta\tau'^2}-W\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\tau'^2}\right)-$$
$$-\left(\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma'\delta\tau'}-W\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\sigma'\delta\tau'}\right)^2+\left(\frac{\delta^2 T}{\delta\tau'^2}-W\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\tau'^2}\right)\left(\frac{\delta^2 T}{\delta\upsilon'^2}-W\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\upsilon'^2}\right)-$$
$$-\left(\frac{\delta^2 T}{\delta\tau'\delta\upsilon'}-W\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\tau'\delta\upsilon'}\right)^2+\left(\frac{\delta^2 T}{\delta\upsilon'^2}-W\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\upsilon'^2}\right)\left(\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma'^2}-W\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\upsilon'^2}\right)- \qquad (9.24)$$
$$-\left(\frac{\delta^2 T}{\delta\upsilon'\delta\sigma'}-W\frac{\delta^2\Omega'}{\delta\upsilon'\delta\sigma'}\right)^2.$$

Общие замечания и предостережения относительно предыдущих выводов. Случай одной однородной среды. Связь между производными функциями v, Ω, υ *для одной произвольной среды*

10. Комбинируя формулы трех предыдущих пунктов, мы можем теперь вывести частные производные первого и второго порядка любой из трех функций V, W, T из частных производных любой из двух остальных функций, если начальная и конечная среды однородны и известны, так как в этом случае частные производные характеристической функции V мы выразили через частные производные вспомогательной функции W, а частные производные функции W – через частные производные вспомогательной функции T, и наоборот. Если конечные среды не однородны, а неоднородны, т.е. являются атмосферами, обыкновенными или необыкновенными, то частные производные трех функций V, W, T все же оказывается возможно связать с помощью общего метода, о котором шла речь в начале п. 7. Этот метод допускает обобщение на производные более высокого (чем второй) порядка без каких бы то ни было дополнительных трудностей, связанных с исключением величин, но приводит ко все более сложным результатам и к менее интересным приложениям.

Как уже говорилось, этот общий метод состоит в дифференцировании и в сравнении уравнений, на которые распадаются общие выражения (4.1), (4.2), (4.3) для вариаций трех функций V, W, T. *При предварительном разложении общих выражений* (4.1), (4.2), (4.3) *необходимо учитывать соотношения между переменными* σ, τ, υ, σ′, τ′, υ′, χ или между переменными σ, τ, υ, x', y', z', χ, если такие соотношения существуют. Исследования, в которые мы углубились в трех предыдущих разделах для случая, когда начальная и конечная среды однородны, *предполагают, что переменные связаны только уравнениями* $\Omega = 0$, $\Omega' = 0$, возникающими из оптических свойств этих сред и выражающими указанные свойства. *Однако из общего метода следует и другой способ*, годный для случая, когда между переменными в силу особенностей, присущих исследуемой комбинации, *возникают дополнительные соотношения* $\Omega'' = 0$, $\Omega''' = 0$... Например, в очень

простом случае одной однородной среды существуют три соотношения

$$\sigma' = \sigma, \quad \tau' = \tau, \quad \upsilon' = \upsilon, \tag{10.1}$$

которые надлежит рассматривать вместе с уравнением $\Omega = 0$. При такой комбинации соотношений общее выражение (4.3) для вариации функции T уже не представляется возможным разложить так же, как в случае, когда остальные величины, от которых зависит функция T, могли бы изменяться независимо.

В последнем случае (*одной однородной среды*) характеристическая функция V содержит координаты x, y, z, x', y', z' только в виде их разностей $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ и является относительно этих разностей однородной функцией степени 1, задаваемой уравнением вида

$$\Psi\left(\frac{x-x'}{V}, \frac{y-y'}{V}, \frac{z-z'}{V}, \chi\right) = 0, \tag{10.2}$$

которое получается из уравнения (2.12) для функции среды v, если в этом уравнении отбросить (вследствие однородности) координаты и положить

$$\frac{\alpha}{\mathrm{v}} = \frac{x-x'}{V}, \quad \frac{\beta}{\mathrm{v}} = \frac{y-y'}{V}, \quad \frac{\gamma}{\mathrm{v}} = \frac{z-z'}{V}. \tag{10.3}$$

Соотношение (10.2) следует из уравнения $\Omega = 0$, если исключить отношения σ, τ, υ из трех уравнений

$$\frac{x-x'}{V} = \frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}, \quad \frac{y-y'}{V} = \frac{\delta\Omega}{\delta\tau}, \quad \frac{z-z'}{V} = \frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}. \tag{10.4}$$

Кроме того, в случае одной однородной среды характеристическая функция имеет вид

$$V = \sigma(x - x') + \tau(y - y') + \upsilon(z - z'), \tag{10.5}$$

а из уравнений (4.4), (4.5) и (10.1) мы получаем, что

$$W = \sigma x' + \tau y' + \upsilon z', \quad T = 0. \tag{10.6}$$

В правильности последнего результата нетрудно убедиться, если заметить, что общее выражение для вспомогательной функции T может быть представлено в виде

$$T = x\frac{\delta V}{\delta x} + y\frac{\delta V}{\delta y} + z\frac{\delta V}{\delta z} + x'\frac{\delta V}{\delta x'} + y'\frac{\delta V}{\delta y'} + z'\frac{\delta V}{\delta z'} - V \tag{10.7}$$

и поэтому T обращается в нуль всякий раз, когда V – однородная функция степени 1 по шести координатам начальной и конечной точек. По указанной причине все формулы из п. 9 для частных производных функции T в случае одной однородной среды становятся непригодными, но вполне допустимо считать, что все частные производные функции T равны нулю, как и сама функция T. Частные производные функции W могут быть получены путем дифференцирования выражения (10.6),

имеющего тот самый вид однородной функции, предпочтительность которого мы уже отмечали. Все частные производные [функции W] первого и второго порядка содержатся в следующих двух формулах:

$$\delta W = x'\delta\sigma + y'\delta\tau + z'\delta\upsilon + \sigma\delta x' + \tau\delta y' + \upsilon\delta z',$$

$$\delta^2 W = 2\delta\sigma\delta x' + 2\delta\tau\delta y' + 2\delta\upsilon\delta z'. \qquad (10.8)$$

Все частные производные более высокого порядка равны нулю. Частные производные характеристической функции V первого и второго порядка могут быть выведены из частных производных функции W соответственно первого и второго порядка по формулам п. 8, справедливость которых не нарушается от того, что существуют соотношения (10.1), поскольку эти соотношения не затрагивают переменные, входящие в функции V и W. Вариация функции V первого порядка имеет вид

$$\delta V = \sigma(\delta x - \delta x') + \tau(\delta y - \delta y') + \upsilon(\delta z - \delta z') - V\frac{\delta\Omega}{\delta\chi}\delta\chi, \qquad (10.9)$$

а вариации второго порядка определяются следующим уравнением, выводимым из соотношений (8.22), (8.21), (10.8):

$$V\left\{\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma^2}\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau^2} - \left(\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\tau}\right)^2 + \frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau^2}\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon^2} - \left(\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau\delta\upsilon}\right)^2 + \frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon^2}\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma^2} - \left(\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon\delta\sigma}\right)^2\right\}\times$$

$$\times\left(\frac{\delta^2 V + V\delta'^2\Omega + 2\delta V\delta'\Omega}{\sigma^2 + \tau^2 + \upsilon^2}\right) =$$

$$= \frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma^2}\left\{\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\left(\delta z - \delta z' - V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right) - \frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\left(\delta y - \delta y' - V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right)\right\}^2 +$$

$$+ \frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau^2}\left\{\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\left(\delta x - \delta x' - V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right) - \frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\left(\delta z - \delta z' - V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right)\right\}^2 +$$

$$+ \frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon^2}\left\{\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\left(\delta y - \delta y' - V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right) - \frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\left(\delta x - \delta x' - V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right)\right\}^2 +$$

$$+2\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\tau}\left\{\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\left(\delta z - \delta z' - V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right) - \frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\left(\delta y - \delta y' - V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right)\right\}\times$$

$$\times\left\{\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\left(\delta x - \delta x' - V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right) - \frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\left(\delta z - \delta z' - V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right)\right\} +$$

$$+2\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau\delta\upsilon}\left\{\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\left(\delta x - \delta x' - V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right) - \frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\left(\delta z - \delta z' - V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right)\right\}\times$$

$$\times\left\{\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\left(\delta y-\delta y'-V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right)-\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\left(\delta x-\delta x'-V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right)\right\}+$$

$$+2\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon\delta\sigma}\left\{\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\left(\delta y-\delta y'-V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right)-\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\left(\delta x-\delta x'-V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right)\right\}\times$$

$$\times\left\{\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\left(\delta z-\delta z'-V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right)-\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\left(\delta y-\delta y'-V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right)\right\}. \qquad (10.10)$$

Символ δ' здесь означает то же, что и прежде, а поскольку x', y', z' не входят в функцию Ω, символ δ' относится только к вариации цвета. Уравнение (10.10) представимо в более простом виде:

$$\frac{V}{\mathrm{v}}(\delta^2 V+V\delta'^2\Omega+2\delta V\delta'\Omega)=\frac{\delta^2\,\mathrm{v}}{\delta\alpha^2}\left(\delta x-\delta x'-V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right)^2+$$

$$+\frac{\delta^2\,\mathrm{v}}{\delta\beta^2}\left(\delta y-\delta y'-V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right)^2+\frac{\delta^2\,\mathrm{v}}{\delta\gamma^2}\left(\delta z-\delta z'-V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right)^2+$$

$$+2\frac{\delta^2\,\mathrm{v}}{\delta\alpha\delta\beta}\left(\delta x-\delta x'-V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right)\left(\delta y-\delta y'-V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right)+$$

$$+2\frac{\delta^2\,\mathrm{v}}{\delta\beta\delta\gamma}\left(\delta y-\delta y'-V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right)\left(\delta z-\delta z'-V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right)+$$

$$+2\frac{\delta^2\,\mathrm{v}}{\delta\gamma\delta\alpha}\left(\delta z-\delta z'-V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right)\left(\delta x-\delta x'-V\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right), \qquad (10.11)$$

если воспользоваться соотношениями

$$\frac{\alpha}{\mathrm{v}}=\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma},\quad \frac{\beta}{\mathrm{v}}=\frac{\delta\Omega}{\delta\tau},\quad \frac{\gamma}{\mathrm{v}}=\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon},\quad -\frac{1}{\mathrm{v}}\,\frac{\delta\,\mathrm{v}}{\delta\chi}=\frac{\delta\Omega}{\delta\chi},\quad \sigma=\frac{\delta\,\mathrm{v}}{\delta\alpha},\quad \tau=\frac{\delta\,\mathrm{v}}{\delta\beta},\quad \upsilon=\frac{\delta\mathrm{v}}{\delta\gamma},$$

выведенными в п. 2, и теми, которые получаются из них при дифференцировании и исключении соответствующих величин. Такие соотношения имеют вид

$$\delta\frac{\alpha}{\mathrm{v}}-\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}=\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma^2}\delta\frac{\delta\,\mathrm{v}}{\delta\alpha}+\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\tau}\delta\frac{\delta\,\mathrm{v}}{\delta\beta}+\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\upsilon}\delta\frac{\delta\,\mathrm{v}}{\delta\gamma},$$

$$\delta\frac{\beta}{\mathrm{v}}-\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}=\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\tau}\delta\frac{\delta\,\mathrm{v}}{\delta\alpha}+\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau^2}\delta\frac{\delta\,\mathrm{v}}{\delta\beta}+\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau\delta\upsilon}\delta\frac{\delta\,\mathrm{v}}{\delta\gamma},$$

$$\delta\frac{\gamma}{\mathrm{v}}-\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}=\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\upsilon}\delta\frac{\delta\,\mathrm{v}}{\delta\alpha}+\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau\,\delta\upsilon}\delta\frac{\delta\,\mathrm{v}}{\delta\beta}+\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon^2}\delta\frac{\delta\,\mathrm{v}}{\delta\gamma},$$

$$-\delta\left(\frac{1}{\mathrm{v}}\frac{\delta\,\mathrm{v}}{\delta\chi}\right)-\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\chi}=\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\chi}\delta\frac{\delta\,\mathrm{v}}{\delta\alpha}+\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau\delta\chi}\delta\frac{\delta\,\mathrm{v}}{\delta\beta}+\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon\delta\chi}\delta\frac{\delta\,\mathrm{v}}{\delta\gamma}, \qquad (10.12)$$

где v считается однородной функцией степени 1 от α, β, γ, а также от [показателя] цвета χ и где вариации $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, хотя они и связаны между собой соотношением $\alpha\delta\alpha + + \beta\delta\beta + \gamma\delta\gamma = 0$, можно считать независимыми. (Дело в том, что если ввести в (10.12) неопределенные множители $\alpha\delta\alpha + \beta\delta\beta + \gamma\delta\gamma$, чтобы учесть соотношение $\alpha\delta\alpha + \beta\delta\beta + \gamma\delta\gamma = 0$, то в силу условий однородности функции среды v все множители оказываются равными нулю.) Если обозначить для краткости

$$\omega'' = \frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma^2}\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau^2} - \left(\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\tau}\right)^2 + \frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau^2}\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon^2} - \left(\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau\delta\upsilon}\right)^2 + \frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon^2}\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma^2} - \left(\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon\delta\sigma}\right)^2, \quad (10.13)$$

то из соотношений (10.12) мы получим следующую формулу для δ^2v, т.е. для второй вариации функции среды v, взятой так, как будто α, β, γ, χ – четыре независимые переменные:

$$\frac{\mathrm{v}\,\omega''}{\sigma^2+\tau^2+\upsilon^2}(\delta^2\,\mathrm{v} + \mathrm{v}\,\delta'^2\Omega + 2\delta\,\mathrm{v}\,\delta'\Omega) =$$

$$= \frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma^2}\left\{\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\left(\delta\beta - \mathrm{v}\,\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right) - \frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\left(\delta\gamma - \mathrm{v}\,\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right)\right\}^2 +$$

$$+ \frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau^2}\left\{\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\left(\delta\gamma - \mathrm{v}\,\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right) - \frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\left(\delta\alpha - \mathrm{v}\,\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right)\right\}^2 +$$

$$+ \frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon^2}\left\{\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\left(\delta\alpha - \mathrm{v}\,\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right) - \frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\left(\delta\beta - \mathrm{v}\,\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right)\right\}^2 +$$

$$+2\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\tau}\left\{\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\left(\delta\beta - \mathrm{v}\,\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right) - \frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\left(\delta\gamma - \mathrm{v}\,\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right)\right\}\times$$

$$\times\left\{\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\left(\delta\gamma - \mathrm{v}\,\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right) - \frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\left(\delta\alpha - \mathrm{v}\,\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right)\right\} +$$

$$+2\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau\delta\upsilon}\left\{\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\left(\delta\gamma - \mathrm{v}\,\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right) - \frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\left(\delta\alpha - \mathrm{v}\,\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right)\right\}\times$$

$$\times\left\{\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\left(\delta\alpha - \mathrm{v}\,\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right) - \frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\left(\delta\beta - \mathrm{v}\,\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right)\right\} +$$

$$+2\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon\delta\sigma}\left\{\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\left(\delta\alpha - \mathrm{v}\,\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\right) - \frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\left(\delta\beta - \mathrm{v}\,\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right)\right\}\times$$

$$\times\left\{\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\left(\delta\beta - \mathrm{v}\,\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\right) - \frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\left(\delta\gamma - \mathrm{v}\,\delta'\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\right)\right\}. \quad (10.14)$$

Формула (10.14) служит обоснованием перехода от соотношений (10.10) к равенству (10.11) и выражает закон зависимости частных производных второго порядка

функции среды v от частных производных второго порядка функции Ω для случая однородной среды.

Аналогичный закон зависимости мы могли бы выразить и в том случае, если среда неоднородна: необходимо лишь заменить δ′ в четырех соотношениях (10.12) на новый символ $\delta_{''}$, относящийся к вариациям переменных *x*, *y*, *z*, χ, и рассмотреть четыре получившихся в результате замены уравнения вместе с тремя уравнениями

$$-\delta\left(\frac{1}{v}\ \frac{\delta v}{\delta x}\right)-\delta_{''}\frac{\delta\Omega}{\delta x}=\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta x}\delta\frac{\delta v}{\delta\alpha}+\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau\delta x}\delta\frac{\delta v}{\delta\beta}+\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon\delta x}\delta\frac{\delta v}{\delta\gamma},$$

$$-\delta\left(\frac{1}{v}\ \frac{\delta v}{\delta y}\right)-\delta_{''}\frac{\delta\Omega}{\delta y}=\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta y}\delta\frac{\delta v}{\delta\alpha}+\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau\delta y}\delta\frac{\delta v}{\delta\beta}+\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon\delta y}\delta\frac{\delta v}{\delta\gamma},$$

$$-\delta\left(\frac{1}{v}\ \frac{\delta v}{\delta z}\right)-\delta_{''}\frac{\delta\Omega}{\delta z}=\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta z}\delta\frac{\delta v}{\delta\alpha}+\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau\delta z}\delta\frac{\delta v}{\delta\beta}+\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon\delta z}\delta\frac{\delta v}{\delta\gamma},\qquad(10.15)$$

где $\delta_{''}$ – тот же самый новый символ. Уравнения (10.15) выведены из уже установленных уравнений для неоднородных сред

$$-\frac{1}{v}\ \frac{\delta v}{\delta x}=\frac{\delta\Omega}{\delta x},\qquad -\frac{1}{v}\ \frac{\delta v}{\delta y}=\frac{\delta\Omega}{\delta y},\qquad -\frac{1}{v}\ \frac{\delta v}{\delta z}=\frac{\delta\Omega}{\delta z},$$

В итоге мы приходим к формуле для $\delta^2 v$, которая отличается от формулы (10.14) только тем, что в ней всюду вместо δ′ стоит символ $\delta_{''}$.

Наоборот, если бы нам понадобилось выразить законы зависимости частных производных функции Ω второго порядка от частных производных второго порядка функции среды v, то мы могли бы воспользоваться для этого следующей общей формулой:

$$v''v^2=(v\delta^2\Omega+\delta^2_{''}\ v+2\delta_{''}v\delta\Omega)=$$

$$=\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha^2}\left\{\upsilon\left(\delta\tau-\delta_{''}\frac{\delta v}{\delta\beta}\right)-\tau\left(\delta\upsilon-\delta_{''}\frac{\delta v}{\delta\gamma}\right)\right\}^2+$$

$$+\frac{\delta^2 v}{\delta\beta^2}\left\{\sigma\left(\delta\upsilon-\delta_{''}\frac{\delta v}{\delta\gamma}\right)-\upsilon\left(\delta\sigma-\delta_{''}\frac{\delta v}{\delta\alpha}\right)\right\}^2+$$

$$+\frac{\delta^2 v}{\delta\gamma^2}\left\{\tau\left(\delta\sigma-\delta_{''}\frac{\delta v}{\delta\alpha}\right)-\sigma\left(\delta\tau-\delta_{''}\frac{\delta v}{\delta\beta}\right)\right\}^2+$$

$$+2\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha\delta\beta}\left\{\upsilon\left(\delta\tau-\delta_{''}\frac{\delta v}{\delta\beta}\right)-\tau\left(\delta\upsilon-\delta_{''}\frac{\delta v}{\delta\gamma}\right)\right\}\left\{\sigma\left(\delta\upsilon-\delta_{''}\frac{\delta v}{\delta\gamma}\right)-\upsilon\left(\delta\sigma-\delta_{''}\frac{\delta v}{\delta\alpha}\right)\right\}+$$

$$+2\frac{\delta^2 v}{\delta\beta\delta\gamma}\left\{\sigma\left(\delta\upsilon-\delta_{''}\frac{\delta v}{\delta\gamma}\right)-\upsilon\left(\delta\sigma-\delta_{''}\frac{\delta v}{\delta\alpha}\right)\right\}\left\{\tau\left(\delta\sigma-\delta_{''}\frac{\delta v}{\delta\alpha}\right)-\sigma\left(\delta\tau-\delta_{''}\frac{\delta v}{\delta\beta}\right)\right\}+$$

$$+2\frac{\delta^2 v}{\delta\gamma\delta\alpha}\left\{\tau\left(\delta\sigma-\delta_{''}\frac{\delta v}{\delta\alpha}\right)-\sigma\left(\delta\tau-\delta_{''}\frac{\delta v}{\delta\beta}\right)\right\}\left\{\upsilon\left(\delta\tau-\delta_{''}\frac{\delta v}{\delta\beta}\right)-\beta\left(\delta\upsilon-\delta_{''}\frac{\delta v}{\delta\gamma}\right)\right\}, \quad (10.16)$$

где $\delta_{''}$ по-прежнему относится к вариациям переменных x, y, z, χ, а v'' имеет такой же смысл, как в "Первом дополнении", т.е.

$$v''=\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha^2}\frac{\delta^2 v}{\delta\beta^2}-\left(\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha\delta\beta}\right)^2+\frac{\delta^2 v}{\delta\beta^2}\frac{\delta^2 v}{\delta\gamma^2}-\left(\frac{\delta^2 v}{\delta\beta\delta\gamma}\right)^2+\frac{\delta^2 v}{\delta\gamma^2}\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha^2}-\left(\frac{\delta^2 v}{\delta\gamma\delta\alpha}\right)^2. \quad (10.17)$$

Величина $v_{''}$ связана и с величиной ω'', задаваемой соотношением (10.13) и входящей в равенство (10.14), следующим образом:

$$v''\omega''=\frac{\sigma^2+\tau^2+\upsilon^2}{v^4}. \quad (10.18)$$

Формула (10.16) эквивалентна двадцати восьми отдельным выражениям для частных производных функции Ω второго порядка, распространяющимся как на неоднородные, так и на однородные среды. Например, из формулы (10.16) следует шесть общих выражений, позволяющих ввести частные производные второго порядка функции среды v вместо частных производных второго порядка функции Ω, если такая замена необходима, во многих общих соотношениях настоящего мемуара подобно тому, как формула (10.14) позволила бы ввести Ω вместо v во многих общих соотношениях "Первого дополнения":

$$\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma^2}=\frac{1}{v''v^3}\left(\tau^2\frac{\delta^2 v}{\delta\gamma^2}+\upsilon^2\frac{\delta^2 v}{\delta\beta^2}-2\tau\upsilon\frac{\delta^2 v}{\delta\beta\delta\gamma}\right),$$

$$\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau^2}=\frac{1}{v''v^3}\left(\upsilon^2\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha^2}+\sigma^2\frac{\delta^2 v}{\delta\gamma^2}-2\upsilon\sigma\frac{\delta^2 v}{\delta\gamma\delta\alpha}\right),$$

$$\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon^2}=\frac{1}{v''v^3}\left(\sigma^2\frac{\delta^2 v}{\delta\beta^2}+\tau^2\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha^2}-2\sigma\tau\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha\delta\beta}\right),$$

$$\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\tau}=\frac{1}{v''v^3}\left(-\upsilon^2\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha\delta\beta}+\tau\upsilon\frac{\delta^2 v}{\delta\gamma\delta\alpha}+\upsilon\sigma\frac{\delta^2 v}{\delta\beta\delta\gamma}-\sigma\tau\frac{\delta^2 v}{\delta\gamma^2}\right),$$

$$\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau\delta\upsilon}=\frac{1}{v''v^3}\left(-\sigma^2\frac{\delta^2 v}{\delta\beta\delta\gamma}+\upsilon\sigma\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha\delta\beta}+\sigma\tau\frac{\delta^2 v}{\delta\gamma\delta\alpha}-\tau\upsilon\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha^2}\right),$$

$$\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon\delta\sigma}=\frac{1}{v''v^3}\left(-\tau^2\frac{\delta^2 v}{\delta\gamma\delta\alpha}+\sigma\tau\frac{\delta^2 v}{\delta\beta\delta\gamma}+\tau\upsilon\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha\delta\beta}-\upsilon\sigma\frac{\delta^2 v}{\delta\beta^2}\right). \quad (10.19)$$

Для вящей полноты теории частных производных функции Ω, которая своей зависимостью от семи переменных σ, τ, υ, x, y, z, χ определяет природу конечной однородной или неоднородной среды и по предположению выбрана так, что $\Omega + 1$ – однородная функция степени 1 по σ, τ, υ, исследуем связь частных производных функции Ω с частными производными более простой, но менее симметричной функции υ, зависящей от шести переменных σ, τ, x, y, z, χ в силу уравнения $\Omega = 0$. Для этого мы рассмотрим дифференциалы этого уравнения с условиями однородности (8.10), (8.11) и условиями того же типа, применимыми только в неоднородных средах:

$$\sigma\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta x}+\tau\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau\delta x}+\upsilon\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon\delta x}=\frac{\delta\Omega}{\delta x},$$
$$\sigma\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta y}+\tau\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau\delta y}+\upsilon\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon\delta y}=\frac{\delta\Omega}{\delta y},$$
$$\sigma\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta z}+\tau\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau\delta z}+\upsilon\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon\delta z}=\frac{\delta\Omega}{\delta z}. \qquad (10.20)$$

Для частных производных первого порядка мы получаем

$$\delta\Omega=\lambda\left(\delta\upsilon-\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}\delta\sigma-\frac{\delta\upsilon}{\delta\tau}\delta\tau-\right. \qquad (10.21)$$
$$\left.-\frac{\delta\upsilon}{\delta x}\delta x-\frac{\delta\upsilon}{\delta y}\delta y-\frac{\delta\upsilon}{\delta z}\delta z-\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}\delta\chi\right),$$

т.е.

$$\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}=-\lambda\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma},\quad \frac{\delta\Omega}{\delta\tau}=-\lambda\frac{\delta\upsilon}{\delta\tau},\quad \frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}=\lambda,$$
$$\frac{\delta\Omega}{\delta x}=-\lambda\frac{\delta\upsilon}{\delta x},\quad \frac{\delta\Omega}{\delta y}=-\lambda\frac{\delta\upsilon}{\delta y},\quad \frac{\delta\Omega}{\delta z}=-\lambda\frac{\delta\upsilon}{\delta z}, \qquad (10.22)$$
$$\frac{\delta\Omega}{\delta\chi}=-\lambda\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi},$$

где λ – множитель, введенный для того, чтобы вариации переменных σ, τ, υ, x, y, z, χ можно было считать независимыми. Найти значение множителя мы можем из условия однородности (8.10):

$$\lambda\left(\upsilon-\sigma\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}-\tau\frac{\delta\upsilon}{\delta\tau}\right)=\Omega+1. \qquad (10.23)$$

Таким образом, частные производные функции Ω известны, например

$$\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}=\lambda=\left(\upsilon-\sigma\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}-\tau\frac{\delta\upsilon}{\delta\tau}\right)^{-1}. \qquad (10.24)$$

Для частных производных второго порядка получаем

$$\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}=-\delta\left(\lambda\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}\right)+\lambda_1\left(\delta\upsilon-\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}\delta\sigma-\ldots\right),$$

$$\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}=-\delta\left(\lambda\frac{\delta\upsilon}{\delta\tau}\right)+\lambda_2\left(\delta\upsilon-\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}\delta\sigma-\ldots\right),$$

$$\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}=\delta\lambda+\lambda_3\left(\delta\upsilon-\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}\delta\sigma-\ldots\right),$$

$$\delta\frac{\delta\Omega}{\delta x}=-\delta\left(\lambda\frac{\delta\upsilon}{\delta x}\right)+\lambda_4\left(\delta\upsilon-\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}\delta\sigma-\ldots\right),$$

$$\delta\frac{\delta\Omega}{\delta y}=-\delta\left(\lambda\frac{\delta\upsilon}{\delta y}\right)+\lambda_5\left(\delta\upsilon-\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}\delta\sigma-\ldots\right),$$

$$\delta\frac{\delta\Omega}{\delta z}=-\delta\left(\lambda\frac{\delta\upsilon}{\delta z}\right)+\lambda_6\left(\delta\upsilon-\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}\delta\sigma-\ldots\right),$$

$$\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\chi}=-\delta\left(\lambda\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}\right)+\lambda_7\left(\delta\upsilon-\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}\delta\sigma-\ldots\right),\qquad(10.25)$$

где в силу соотношений (8.11), (10.20), (10.22) множители $\lambda_1,\ldots,\lambda_7$ имеют следующие значения:

$$\lambda_1=\lambda\left(\sigma\frac{\delta}{\delta\sigma}+\tau\frac{\delta}{\delta\tau}\right)\left(\lambda\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}\right),\qquad \lambda_4=\lambda\left(\sigma\frac{\delta}{\delta\sigma}+\tau\frac{\delta}{\delta\tau}\right)\left(\lambda\frac{\delta\upsilon}{\delta x}\right)-\lambda^2\frac{\delta\upsilon}{\delta x},$$

$$\lambda_2=\lambda\left(\sigma\frac{\delta}{\delta\sigma}+\tau\frac{\delta}{\delta\tau}\right)\left(\lambda\frac{\delta\upsilon}{\delta\tau}\right),\qquad \lambda_5=\lambda\left(\sigma\frac{\delta}{\delta\sigma}+\tau\frac{\delta}{\delta\tau}\right)\left(\lambda\frac{\delta\upsilon}{\delta y}\right)-\lambda^2\frac{\delta\upsilon}{\delta y},$$

$$\lambda_3=\lambda\left(\sigma\frac{\delta}{\delta\sigma}+\tau\frac{\delta}{\delta\tau}\right)\lambda,\qquad \lambda_6=\lambda\left(\sigma\frac{\delta}{\delta\sigma}+\tau\frac{\delta}{\delta\tau}\right)\left(\lambda\frac{\delta\upsilon}{\delta z}\right)-\lambda^2\frac{\delta\upsilon}{\delta z},$$

$$\lambda_7=\lambda\left(\sigma\frac{\delta}{\delta\sigma}+\tau\frac{\delta}{\delta\tau}\right)\left(\lambda\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}\right)-\lambda^2\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}.\qquad(10.26)$$

Величину λ, как и υ, здесь следует рассматривать как функцию переменных σ, τ, x, y, z, χ. Если положить, как обычно,

$$\delta^2\Omega=\delta\sigma\ \delta\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}+\delta\tau\ \delta\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}+\delta\upsilon\ \delta\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}+$$
$$+\delta x\ \delta\frac{\delta\Omega}{\delta x}+\delta y\ \delta\frac{\delta\Omega}{\delta y}+\delta z\ \delta\frac{\delta\Omega}{\delta z}+\delta\chi\ \delta\frac{\delta\Omega}{\delta\chi}\qquad(10.27)$$

и аналогично

$$\delta^2\upsilon=\delta\sigma\ \delta\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}+\delta\tau\ \delta\frac{\delta\upsilon}{\delta\tau}+\delta x\ \delta\frac{\delta\upsilon}{\delta x}+\delta y\ \delta\frac{\delta\upsilon}{\delta y}+\delta z\ \delta\frac{\delta\upsilon}{\delta z}+\delta\chi\ \delta\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi},\qquad(10.28)$$

то

$$\delta^2\Omega = -\lambda\delta^2\upsilon + 2\delta\lambda\left(\delta\upsilon - \frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}\delta\sigma - \frac{\delta\upsilon}{\delta\tau}\delta\tau - \frac{\delta\upsilon}{\delta x}\delta x - \frac{\delta\upsilon}{\delta y}\delta y - \frac{\delta\upsilon}{\delta z}\delta z - \frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}\delta\chi\right) -$$

$$-\lambda^3\left(\sigma^2\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\sigma^2} + 2\sigma\tau\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\sigma\delta\tau} + \tau^2\frac{\delta^2\upsilon}{\delta\tau^2}\right)\left((\sigma\upsilon - \frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma}\delta\sigma - \text{ и т. д.}\right)^2, \tag{10.29}$$

где

$$\delta\lambda = \lambda^2\left(\sigma\delta\frac{\delta\upsilon}{\delta\sigma} + \tau\delta\frac{\delta\upsilon}{\delta\tau} - \frac{\delta\upsilon}{\delta x}\delta x - \frac{\delta\upsilon}{\delta y}\delta y - \frac{\delta\upsilon}{\delta z}\delta z - \frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}\delta\chi\right). \tag{10.30}$$

Формула (10.29) эквивалентна двадцати восьми соотношениям для частных производных функции Ω второго порядка. Из нее следует, например, что

$$\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon^2} = \frac{\sigma^2\delta^2\upsilon/\delta\sigma^2 + 2\sigma\tau\delta^2\upsilon/\delta\sigma\delta\tau + \tau^2\delta^2\upsilon/\delta\tau^2}{(\sigma\delta\upsilon/\delta\sigma + \tau\delta\upsilon/\delta\tau - \upsilon)^3}. \tag{10.31}$$

Поскольку вид взаимосвязанных функций Ω, υ, v, каждая из которых выражает оптические свойства конечной среды, может быть выведен из вида характеристической функции V методом, изложенным в п. 2, не подлежит сомнению, что и частные производные этих функций любых порядков не только связаны между собой, но и могут быть выведены из частных производных характеристической функции.

Общая формула для отражения и преломления, обыкновенного или необыкновенного. Приращения функций V, W, T. Разность ΔV равна нулю; разность $\Delta W = \Delta T$ – однородная функция степени 1 разностей $\Delta\sigma$, $\Delta\tau$, $\Delta\upsilon$, зависящая от формы и положения отражающей или преломляющей поверхности. Теорема о максимумах и минимумах для исключения переменных, связанных с падающим лучом. Комбинации отражений и преломлений. Сложные комбинации и их компоненты.

11. Попытаемся теперь улучшить нашу теорию характеристической и связанных с ней функций и воспользуемся методами этого мемуара для усовершенствования приведенного в первом "Дополнении" способа определения резких изменений этих функций и их частных производных при отражении или преломлении, обыкновенном или необыкновенном.

Общая формула таких изменений или приращений, вытекающая из самой природы характеристической функции V, имеет вид

$$\Delta V = V_2 - V_1 = 0, \tag{11.1}$$

где V_1 и V_2 – вид функции V на последовательных участках луча до и после отражения или преломления. Координаты x, y, z конечной точки, от которых зависят функции V_1 и V_2, связаны уравнением

$$u(x, y, z) = 0\,. \tag{11.2}$$

отражающей или преломляющей поверхности. Формула (11.1) допускает любое число дифференцирований по координатам начальной и конечной точек и показателю цвета с учетом связи (11.2). В сочетании со свойствами конечной среды, однородной или неоднородной, такое дифференцирование позволяет установить общие законы отражения и преломления, причем при всех условиях, необходимых для определения приращений частных производных характеристической функции V и, следовательно, связанных с ними частных производных функций W и T, а также законов изменения самих функций V, W, T.

Например, для производных первого порядка справедлива общая формула

$$\delta V_2 - \delta V_1 = \delta \Delta V = \lambda \delta u, \tag{11.3}$$

которая с учетом множителя λ и определений (2.4) распадается на семь уравнений

$$\Delta\sigma = \lambda\frac{\delta u}{\delta x},\ \ \Delta\tau = \lambda\frac{\delta u}{\delta y}, \Delta\upsilon = \lambda\frac{\delta u}{\delta z},\ \ \Delta\sigma' = 0,\ \ \Delta\tau' = 0,\ \ \Delta\upsilon' = 0,\ \ \Delta\frac{\delta V}{\delta\chi} = 0. \tag{11.4}$$

Символ Δ, как и в (11.1), относится к конечным приращениям, вызванным отражением или преломлением на поверхности (11.2), так что $\Delta\sigma$, $\Delta\tau$, $\Delta\upsilon$ означают разности $\sigma_2 - \sigma_1$, $\tau_2 - \tau_1$, $\upsilon_2 - \upsilon_2$ между новыми и старыми значениями σ, τ, υ, т.е. частные производные первого порядка характеристической функции V по координатам конечной точки. Три первых уравнения (11.4) содержат общие законы скачкообразного изменения прямолинейного или искривленного луча при отражении или преломлении, обыкновенном или необыкновенном. Этих уравнений в сочетании с уравнением вида (2.5)

$$\Omega_2(\sigma_2, \tau_2, \upsilon_2, x, y, z, \chi) = 0, \tag{11.5}$$

выражающим природу конечной среды, вообще говоря, достаточно для того, чтобы (при известной конечной среде) определить или по крайней мере ограничить финитным набором новые значения σ_2, τ_2, υ_2 величин σ, τ, υ, от которых зависит направление отраженного или преломленного луча, если известны старые значения $\sigma_1, \tau_1, \upsilon_1$, зависящие от направления падающего луча и от свойств содержащей его среды, и если известны также χ, x, y, z и отношения $\delta u/\delta x$, $\delta u/\delta y$, $\delta u/\delta z$, т.е. цвет, точка падения и нормаль к отражающей или преломляющей поверхности в этой точке. С замечательным случаем неопределенности или, точнее, с двумя такими случаями мы встретимся в дальнейшем при рассмотрении внешней и внутренней конической рефракции.

Что касается нового вида V_2 характеристической функции V, то его следует определять из двух условий: во-первых, из условия, что на поверхности (11.2) должно выполняться уравнение в конечных разностях (11.1), т.е. из условия совпадения со старым видом V_1, когда координаты x, y, z конечной точки связаны уравнением $u = 0$, и, во-вторых, из условия, что функция V_2 (координаты конечной точки считаются произвольными) должна удовлетворять дифференциальному урав-

нению в частных производных вида (2.2):

$$\Omega_2 = \left(\frac{\delta V_2}{\delta x}, \frac{\delta V_2}{\delta y}, \frac{\delta V_2}{\delta z}, x, y, z, \chi \right) = 0, \tag{11.6}$$

если конечная среда неоднородна, и более простому дифференциальному уравнению в частных производных вида (5.3), если конечная среда однородна. Как уже было показано, эти дифференциальные уравнения в частных производных относительно характеристической функции V могут быть преобразованы, а в случае однородных сред и проинтегрированы с помощью вспомогательных функций W, T. Полезно поэтому рассмотреть здесь приращения этих вспомогательных функций, представляющих к тому же и самостоятельный интерес.

Из определений вспомогательных функций W, T нетрудно вывести, что приращения этих двух функций при отражении или преломлении равны и могут быть представлены в виде

$$\Delta W = \Delta T = x\Delta\sigma + y\Delta\tau + z\Delta\upsilon. \tag{11.7}$$

Поскольку разности $\Delta\sigma$, $\Delta\tau$, $\Delta\upsilon$ в силу общих уравнений отражения или преломления (11.4) пропорциональны величинам $\delta u/\delta x$, $\delta u/\delta y$, $\delta u/\delta z$, мы можем рассматривать эти разности как проекции на оси прямоугольных координат x, y, z отрезка прямой $[(\Delta\sigma)^2 + (\Delta\tau)^2 + (\Delta\upsilon)^2]^{1/2}$, перпендикулярной отражающей или преломляющей поверхности в точке падения [луча] и образующей с осями координат углы, косинусы которых обозначим n_x, n_y, n_z. Тогда

$$\Delta\sigma = n_x \sqrt{(\Delta\sigma)^2 + (\Delta\tau)^2 + (\Delta\upsilon)^2},$$

$$\Delta\tau = n_y \sqrt{(\Delta\sigma)^2 + (\Delta\tau)^2 + (\Delta\upsilon)^2},$$

$$\Delta\upsilon = n_z \sqrt{(\Delta\sigma)^2 + (\Delta\tau)^2 + (\Delta\upsilon)^2},$$

$$\Delta W = \Delta T = (xn_x + yn_y + zn_z)\sqrt{(\Delta\sigma)^2 + (\Delta\tau)^2 + (\Delta\upsilon)^2}. \tag{11.8}$$

Величина $xn_x + yn_y + zn_z$ с точностью до знака равна длине перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость, касательную к отражающей или преломляющей поверхности в точке падения луча. Следовательно, если отражающая или преломляющая поверхность вырождается в плоскость, то указанная величина постоянна, а в общем случае ее можно считать функцией отношений разностей $\Delta\sigma$, $\Delta\tau$, $\Delta\upsilon$, так как если эти отношения заданы, то направление нормали известно, а коль скоро поверхность искривлена и задана, известна и точка падения луча или по крайней мере мы можем утверждать, что ею может быть одна из конечного числа точек. Таким образом, в общем случае справедливо соотношение

$$\Delta W = \Delta T = f(\Delta\sigma, \Delta\tau, \Delta\upsilon), \tag{11.9}$$

где f – однородная функция степени 1. Вид функции f зависит от формы и положения отражающей или преломляющей поверхности и определяется из уравнения (11.2) этой поверхности путем исключения переменных x, y, z, λ из уравнений

(11.2), (11.7) и трех первых уравнений (11.4). Проделав необходимые выкладки, получим

$$\frac{f}{\Delta \nu} = \varphi\left(\frac{\Delta\sigma}{\Delta\upsilon}, \ \frac{\Delta\tau}{\Delta\upsilon}\right), \quad \frac{\Delta\sigma}{\Delta\upsilon} = -\frac{\delta z}{\delta x}, \quad \frac{\Delta\tau}{\Delta\upsilon} = -\frac{\delta z}{\delta y},$$

$$z - x\frac{\delta z}{\delta x} - y\frac{\delta z}{\delta y} = \varphi\left(-\frac{\delta z}{\delta x}, \ -\frac{\delta z}{\delta y}\right). \tag{11.10}$$

Таким образом, вид функции f без труда определяется из уравнения поверхности (11.2), если его предварительно разрешить относительно $z - x\delta z/\delta x - y\delta z/\delta y$, выразив последнее выражение как функцию φ от $-\delta z/\delta x$, $-\delta z/\delta y$. Функция φ постоянна, если поверхность вырождается в плоскость [9], и для вариации однородной функции f мы получаем простое выражение

$$\delta f = x\delta\Delta\sigma + y\delta\Delta\tau + z\delta\Delta\upsilon. \tag{11.11}$$

Если же отражающая или преломляющая поверхность искривлена, соотношение (11.11) распадается на следующие замечательные выражения для координат точки падения [луча]:

$$x = \frac{\delta f}{\delta\Delta\sigma}, \quad y = \frac{\delta f}{\delta\Delta\tau}, \quad z = \frac{\delta f}{\delta\Delta\upsilon}. \tag{11.12}$$

Таким образом, эти координаты, которые прежде в случае искривленной поверхности были известны как функции отношений $\Delta\sigma$, $\Delta\tau$, $\Delta\upsilon$, оказываются для такой поверхности частными производными функциями f. Если поверхность (11.2) вырождается в плоскость, то разности $\Delta\sigma$, $\Delta\tau$, $\Delta\upsilon$ перестают быть независимыми, так как их отношения заданы, и хотя выражение (11.11) для δf по-прежнему остается в силе, оно более не распадается на три уравнения (11.12).

Таким образом, изучив некоторые из основных свойств общего приращения f, получаемого функциями W, T при отражении или преломлении, мы тем самым подготовились к исследованию новых видов W_2, T_2 функций W, T, зависящих не от старых переменных σ_1, τ_1, υ_1, а от новых σ_2, τ_2, υ_2. Для такого исследования мы располагаем, во-первых, соотношениями

$$W_2 = W_1 + f(\sigma_2 - \sigma_1, \tau_2 - \tau_1, \upsilon_2 - \upsilon_1),$$

$$T_2 = T_1 + f(\sigma_2 - \sigma_1, \tau_2 - \tau_1, \upsilon_2 - \upsilon_1), \tag{11.13}$$

позволяющими представить W_2, T_2 на отражающей или преломляющей поверхности в виде явных функций от σ_1, τ_1, υ_1, σ_2, τ_2, υ_2. Функция W_2, кроме того, зависит от x', y', z' χ, а функция T_2 – от σ', τ', υ', χ. Чтобы исключить из выражений для W_2 и T_2 величины σ_1, τ_1, υ_1, относящиеся к падающему лучу, у нас, если поверхность искривлена, имеются следующие соотношения (символ $\delta_{\sigma_1,\tau_1,\upsilon_1}$ относится к вариациям величин σ_1, τ_1, υ_1, характеризующих падающий луч):

$$\delta_{\sigma_1,\tau_1,\upsilon_1} f = -x\delta\sigma_1 - y\delta\tau_1 - z\delta\upsilon_1 = -\delta_{\sigma_1,\tau_1,\upsilon_1} W_1 = -\delta_{\sigma_1,\tau_1,\upsilon_1} T_1, \tag{11.14}$$

и следовательно,

$$\delta_{\sigma_1,\tau_1,\upsilon_1} W_2 = 0, \quad \delta_{\sigma_1,\tau_1,\upsilon_1} T_2 = 0.$$

Таким образом, параметры падающего луча необходимо исключить из выражений для W_2, T_2, обратив каждое из этих выражений в максимум или минимум по этим величинам с учетом связывающего их уравнения $\Omega_1 = 0$. Выражение "максимум" или "минимум" употреблено нами в обычном широком смысле. Если [отражающая или преломляющая] поверхность плоская, то изложенный выше метод исключения переменных, характеризующих падающий луч, неприменим. Вид функции f не поддается определению из-за того, что в этом случае отношения приращений $\Delta\sigma$, $\Delta\tau$, $\Delta\upsilon$ постоянны в силу соотношений (11.10) или (11.4). Но эти же самые соотношения в сочетании с уравнением $\Omega_1 = 0$, связывающим величины σ_1, τ_1, υ_1, позволяют исключить эти величины из функций W_2, T_2. Определив таким образом новый вид W_2, T_2 – функций W, T в точках отражающей или преломляющей поверхности, мы можем продолжить W_2, T_2 на другие точки конечной среды, если эта среда однородна, потому что в этом случае конечные лучи прямолинейны и для любого такого луча величины σ_2, τ_2, υ_2, W_2, T_2 постоянны. Если же конечная среда неоднородна, то конечные лучи искривлены и общий вид функций W_2, T_2 для произвольных точек среды подлежит определению из комбинаций дифференциальных уравнений в частных производных и уравнений в конечных разностях, аналогичных комбинациям таких уравнений для функции V_2 и легко выводимых из изложенных выше принципов.

Предыдущие замечания нетрудно обобщить на любую комбинацию отражений или преломлений и показать, например, что при любой комбинации однородных сред, порождающих любую систему ломаных лучей, обыкновенных или необыкновенных, вспомогательная функция T имеет вид

$$T = \sum f(\Delta\sigma, \Delta\tau, \Delta\upsilon), \tag{11.15}$$

т.е. равна сумме всех однородных функций f разностей величин σ, τ, υ, полученных при рассмотрении последовательных отражающих или преломляющих поверхностей. Промежуточные величины σ, τ, υ следует исключать из суммы (11.15), обращая ее в максимум или минимум по этим промежуточным величинам с учетом тех соотношений между ними, которые обусловлены свойствами среды, и используя для плоских поверхностей другой метод исключения, основанный на отношениях величин $\Delta\sigma$, $\Delta\tau$, $\Delta\upsilon$. Коль скоро функция T известна, другую вспомогательную функцию W и характеристическую функцию V мы можем вывести из нее так, как это сделано в п. 4.

В общем случае для любых оптических комбинаций независимо от того, однородны среды или неоднородны, из определений функций V, W, T и результатов, полученных в предыдущих разделах, следует, что выполняются соотношения [10]

$$V = \int_0^s \mathrm{v}\, ds, \qquad T = \int_0^s \left(x\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta x} + y\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta y} + z\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta z} \right) ds,$$

$$W = x'\sigma' + y'\tau' + z'\upsilon' + \int_0^s \left(x\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta x} + y\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta y} + z\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta z} \right) ds, \tag{11.16}$$

где ds по-прежнему означает элемент искривленного или ломаного луча. Мы видим, таким образом, что любую полную комбинацию из $m + n - 1$ сред, однородную или неоднородную, можно рассматривать как результат объединения двух частичных комбинаций из m и из n сред, при котором конечная среда первой частичной комбинации (из m сред) является начальной средой второй частичной комбинации (из n сред), а конечные лучи первой частичной комбинации служат начальными лучами второй частичной комбинации. Тогда функции V и T (но, вообще говоря, не функция W) полной комбинации представимы в виде сумм соответствующих функций частичных комбинаций. Из общих выражений для вариаций этих функций следует также, что промежуточные переменные, относящиеся к конечной среде первой частичной комбинации или к начальной среде второй частичной комбинации, подлежат исключению из условия обращения суммы в максимум или минимум по этим промежуточным переменным. Аналогичные замечания применимы и к сложным комбинациям, состоящим из более чем двух частичных комбинаций. Указанные свойства функций V, T для полных или результирующих комбинаций оказываются полезными в теории двойных и тройных объектов и других сложных оптических приборов [[11]].

Приращения частных производных второго порядка функций V, W, T, обусловленные отражением или преломлением

12. Что касается приращений частных производных второго порядка характеристической функции V и, следовательно, связанных с ней функций W, T при отражении или преломлении, то эти приращения могут быть выведены из формулы

$$\delta^2 \Delta V = \delta^2 (\lambda u) = \lambda \delta^2 u + 2\delta\lambda\delta u, \tag{12.1}$$

аналогичной формуле (11.3). Величины λ и u имеют здесь такой же смысл, как и в соотношениях (11.2), (11.3). Множитель λ, который был введен в первом "Дополнении" и рассматривался там как функция координат x, y, z конечной точки, теперь зависит и от координат x', y', z' начальной точки, а также от показателя цвета χ. Семь вариаций $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x', \delta y', \delta z', \delta\chi$, входящих в формулу (12.1), можно считать независимыми, если придать вариации $\delta\lambda$ надлежащее значение, выбрав ее линейной функцией семи остальных вариаций. При этом мы получим из формулы (12.1) следующие семь уравнений:

$$\Delta\delta\frac{\delta V}{\delta x} = \lambda\delta\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta\lambda}{\delta x}\delta u + \frac{\delta u}{\delta x}\delta\lambda,$$
$$\Delta\delta\frac{\delta V}{\delta y} = \lambda\delta\frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta\lambda}{\delta y}\delta u + \frac{\delta u}{\delta y}\delta\lambda,$$
$$\Delta\delta\frac{\delta V}{\delta z} = \lambda\delta\frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta\lambda}{\delta z}\delta u + \frac{\delta u}{\delta z}\delta\lambda,$$

$$\Delta\delta\frac{\delta V}{\delta x'}=\frac{\delta\lambda}{\delta x'}\delta u,\quad \Delta\delta\frac{\delta V}{\delta y'}=\frac{\delta\lambda}{\delta y'}\delta u,\quad \Delta\delta\frac{\delta V}{\delta z'}=\frac{\delta\lambda}{\delta z'}\delta u,$$

$$\Delta\delta\frac{\delta V}{\delta\chi}=\frac{\delta\lambda}{\delta\chi}\delta u. \tag{12.2}$$

В свою очередь каждое из этих уравнений может быть разложено на семь других уравнений. Но из сорока девяти возникающих при этом уравнений для приращений двадцати восьми частных производных второго порядка характеристической функции V различны лишь двадцать восемь. Они содержат семь пока неизвестных множителей, а именно: семь частных производных от λ. Но мы можем определить эти семь множителей и двадцать восемь частных производных второго порядка характеристической функции V_2, если введем семь дополнительных уравнений, которые получаются при дифференцировании дифференциального уравнения в частных производных (11.6) по $x, y, z, x', y', z', \chi$.

Дифференциал уравнения (11.6) имеет вид

$$\frac{\delta\Omega_2}{\delta\sigma_2}\delta\frac{\delta V_2}{\delta x}+\frac{\delta\Omega_2}{\delta\tau_2}\delta\frac{\delta V_2}{\delta y}+\frac{\delta\Omega_2}{\delta\upsilon_2}\delta\frac{\delta V_2}{\delta z}+$$
$$+\frac{\delta\Omega_2}{\delta x}\delta x+\frac{\delta\Omega_2}{\delta y}\delta y+\frac{\delta\Omega_2}{\delta z}\delta z+\frac{\delta\Omega_2}{\delta\chi}\delta\chi=0, \tag{12.3}$$

что в сочетании с тремя первыми уравнениями (12.2) приводит к формуле

$$\frac{\delta\Omega_2}{\delta\sigma_2}\delta\frac{\delta V_1}{\delta x}+\frac{\delta\Omega_2}{\delta\tau_2}\delta\frac{\delta V_1}{\delta y}+\frac{\delta\Omega_2}{\delta\upsilon_2}\delta\frac{\delta V_1}{\delta z}+$$
$$+\frac{\delta\Omega_2}{\delta x}\delta x+\frac{\delta\Omega_2}{\delta y}\delta y+\frac{\delta\Omega_2}{\delta z}\delta z+\frac{\delta\Omega_2}{\delta\chi}\delta\chi+$$
$$+\lambda\left(\frac{\delta\Omega_2}{\delta\sigma_2}\delta\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta\Omega_2}{\delta\tau_2}\delta\frac{\delta u}{\delta y}+\frac{\delta\Omega_2}{\delta\upsilon_2}\delta\frac{\delta u}{\delta z}\right)+$$
$$+\delta u\left(\frac{\delta\Omega_2}{\delta\sigma_2}\frac{\delta\lambda}{\delta x}+\frac{\delta\Omega_2}{\delta\tau_2}\frac{\delta\lambda}{\delta y}+\frac{\delta\Omega_2}{\delta\upsilon_2}\frac{\delta\lambda}{\delta z}\right)+$$
$$+\delta\lambda\left(\frac{\delta\Omega_2}{\delta\sigma_2}\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta\Omega_2}{\delta\tau_2}\frac{\delta u}{\delta y}+\frac{\delta\Omega_2}{\delta\upsilon_2}\frac{\delta u}{\delta z}\right)=0, \tag{12.4}$$

которая распадается на семь отдельных уравнений, достаточных для определения семи множителей

$$\frac{\delta\lambda}{\delta x},\ \frac{\delta\lambda}{\delta y},\ \frac{\delta\lambda}{\delta z},\ \frac{\delta\lambda}{\delta x'},\ \frac{\delta\lambda}{\delta y'},\ \frac{\delta\lambda}{\delta z'},\ \frac{\delta\lambda}{\delta\chi}.$$

Три из семи уравнений, на которые разлагается соотношение (12.4), если их

скомбинировать надлежащим образом, задают значение трехчлена

$$\frac{\delta\Omega_2}{\delta\sigma_2}\frac{\delta\lambda}{\delta x}+\frac{\delta\Omega_2}{\delta\tau_2}\frac{\delta\lambda}{\delta y}+\frac{\delta\Omega_2}{\delta\upsilon_2}\frac{\delta\lambda}{\delta z},$$

что позволяет исключить трехчлен из соотношения (12.4) и тем самым определить значение вариации $\delta\lambda$. Последнее в сочетании с соотношением (12.1) порождает следующую формулу, эквивалентную двадцати восьми отдельным выражениям для двадцати восьми частных производных второго порядка функции V_2:

$$\left\{\left(\frac{\delta\Omega_2}{\delta\sigma_2}\right)^2\left(\frac{\delta^2 V_1}{\delta x^2}+\lambda\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}\right)+2\frac{\delta\Omega_2}{\delta\tau_2}\frac{\delta\Omega_2}{\delta\upsilon_2}\left(\frac{\delta^2 V_1}{\delta y\delta z}+\lambda\frac{\delta^2 u}{\delta y\delta z}\right)+\right.$$

$$+\left(\frac{\delta\Omega_2}{\delta\tau_2}\right)^2\left(\frac{\delta^2 V}{\delta y^2}+\lambda\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}\right)+2\frac{\delta\Omega_2}{\delta\upsilon_2}\frac{\delta\Omega_2}{\delta\sigma_2}\left(\frac{\delta^2 V_1}{\delta z\delta x}+\lambda\frac{\delta^2 u}{\delta z\delta x}\right)+$$

$$+\left(\frac{\delta\Omega_2}{\delta\upsilon_2}\right)^2\left(\frac{\delta^2 V}{\delta z^2}+\lambda\frac{\delta^2 u}{\delta z^2}\right)+2\frac{\delta\Omega_2}{\delta\sigma_2}\frac{\delta\Omega_2}{\delta\tau_2}\left(\frac{\delta^2 V_1}{\delta x\delta y}+\lambda\frac{\delta^2 u}{\delta x\delta y}\right)+$$

$$\left.+\frac{\delta\Omega_2}{\delta\sigma_2}\frac{\delta\Omega_2}{\delta x}+\frac{\delta\Omega_2}{\delta\tau_2}\frac{\delta\Omega_2}{\delta y}+\frac{\delta\Omega_2}{\delta\upsilon_2}\frac{\delta\Omega_2}{\delta z}\right\}\delta u^2-$$

$$-2\left(\frac{\delta\Omega_2}{\delta\sigma_2}\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta\Omega_2}{\delta\tau_2}\frac{\delta u}{\delta y}+\frac{\delta\Omega_2}{\delta\upsilon_2}\frac{\delta u}{\delta z}\right)\delta u\times$$

$$\times\left\{\frac{\delta\Omega_2}{\delta\sigma_2}\left(\delta\frac{\delta V_1}{\delta x}+\lambda\delta\frac{\delta u}{\delta x}\right)+\frac{\delta\Omega_2}{\delta\tau_2}\left(\delta\frac{\delta V_1}{\delta y}+\lambda\delta\frac{\delta u}{\delta y}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\delta\Omega_2}{\delta\upsilon_2}\left(\delta\frac{\delta V_1}{\delta z}+\lambda\delta\frac{\delta u}{\delta z}\right)+\frac{\delta\Omega_2}{\delta x}\delta x+\frac{\delta\Omega_2}{\delta y}\delta y+\frac{\delta\Omega_2}{\delta z}\delta z+\frac{\delta\Omega_2}{\delta\chi}\delta\chi\right\}=$$

$$=\left(\delta^2 V_2-\delta^2 V_1-\lambda\delta^2 u\right)\left(\frac{\delta\Omega_2}{\delta\sigma_2}\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta\Omega_2}{\delta\tau_2}\frac{\delta u}{\delta y}+\frac{\delta\Omega_2}{\delta\upsilon_2}\frac{\delta u}{\delta z}\right)^2. \tag{12.5}$$

Формула (12.5) предполагает, что лучи отражаются или преломляются в неоднородную среду, но ее можно приспособить и к более простому предположению, согласно которому отражение и преломление происходят в однородную среду: для этого достаточно лишь положить величины $\delta\Omega_2 / \delta x$, $\delta\Omega_2 / \delta y$, $\delta\Omega_2 / \delta z$ равными нулю. Независимо от того, неоднородна конечная среда или однородна, из формулы (12.5) следует, что

$$\delta'^2 V_2=\delta'^2 V_1. \tag{12.6}$$

Символ δ', как и в предыдущих разделах этого "Дополнения", относится только к вариациям переменных x', y', z', χ, т.е. к вариациям координат начальной точки и

показателя цвета, а координатами конечной точки x, y, z могут быть координаты любой точки на отражающей или преломляющей поверхности.

Таким образом, десять частных производных второго порядка характеристической функции V так же, как и четыре производные первого порядка, по координатам начальной точки и показателю цвета не претерпевают скачкообразных приращений при отражении или преломлении, в то время как ее частные производные первого и второго порядков по координатам конечной точки скачком принимают новые значения. Каким образом определять эти значения, было показано выше. Найденные частные производные функций W_2 и T_2 остаются неизменными на протяжении всего последнего отраженного или преломленного участка луча, если этот участок прямолинеен (конечная среда однородна). Что же касается частных производных функции V_2, то при переходе от точки к точке они изменяются плавно даже на прямолинейном участке луча по законам, выводимым из уже рассмотренной нами связи этих производных с производными функции W_2, которые в этом случае постоянны.

Частные производные функций W_2 и T_2 второго и более высокого порядка могут быть также вычислены независимо от того, однородна конечная среда или неоднородна, путем дифференцирования выражений (11.13) и исключения вариаций величин σ_1, τ_1, υ_1 с помощью уже упоминавшихся условий обращения в максимум или минимум.

Еще один способ вычисления приращений частных производных второго порядка характеристической функции V при отражении или преломлении, обыкновенном или необыкновенном, в среду, однородную или неоднородную, состоит в разложении второго дифференциала общей формулы (11.1) в предположении, что приращение ΔV – функция семи переменных $x, y, z, x', y', z', \chi$, а сами x, y, z – функции двух независимых переменных (например, z – функция от x и y), вид которых определяется уравнением отражающей или преломляющей поверхности. Таким способом мы наряду с формулой (12.6), эквивалентной десяти уравнениям, получаем еще одиннадцать уравнений

$$\frac{\delta^2\Delta V}{\delta x^2}+2\frac{\delta^2\Delta V}{\delta x\delta z}\frac{\delta z}{\delta x}+\frac{\delta^2\Delta V}{\delta z^2}\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)^2+\frac{\delta\Delta V}{\delta z}\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}=0,$$

$$\frac{\delta^2\Delta V}{\delta y^2}+2\frac{\delta^2\Delta V}{\delta y\delta z}\frac{\delta z}{\delta y}+\frac{\delta^2\Delta V}{\delta z^2}\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)^2+\frac{\delta\Delta V}{\delta z}\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}=0,$$

$$\frac{\delta^2\Delta V}{\delta x\delta y}+\frac{\delta^2\Delta V}{\delta x\delta z}\frac{\delta z}{\delta y}+\frac{\delta^2\Delta V}{\delta y\delta z}\frac{\delta z}{\delta x}+\frac{\delta^2\Delta V}{\delta z^2}\frac{\delta z}{\delta x}\frac{\delta z}{\delta y}+\frac{\delta\Delta V}{\delta z}\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}=0,$$

$$\frac{\delta^2\Delta V}{\delta x\delta x'}+\frac{\delta^2\Delta V}{\delta z\delta x'}\frac{\delta z}{\delta x}=0,\qquad \frac{\delta^2\Delta V}{\delta y\delta x'}+\frac{\delta^2\Delta V}{\delta z\delta x'}\frac{\delta z}{\delta y}=0,$$

$$\frac{\delta^2\Delta V}{\delta x\delta y'}+\frac{\delta^2\Delta V}{\delta z\delta y'}\frac{\delta z}{\delta x}=0,\qquad \frac{\delta^2\Delta V}{\delta y\delta y'}+\frac{\delta^2\Delta V}{\delta z\delta y'}\frac{\delta z}{\delta y}=0,$$

$$\frac{\delta^2 \Delta V}{\delta x \delta z'} + \frac{\delta^2 \Delta V}{\delta z \delta z'} \frac{\delta z}{\delta x} = 0, \quad \frac{\delta^2 \Delta V}{\delta y \delta z'} + \frac{\delta^2 \Delta V}{\delta z \delta z'} \frac{\delta z}{\delta y} = 0,$$

$$\frac{\delta^2 \Delta V}{\delta x \delta \chi} + \frac{\delta^2 \Delta V}{\delta z \delta \chi} \frac{\delta z}{\delta x} = 0, \quad \frac{\delta^2 \Delta V}{\delta y \delta \chi} + \frac{\delta^2 \Delta V}{\delta z \delta \chi} \frac{\delta z}{\delta y} = 0. \qquad (12.7)$$

Уравнения (12.7) можно представить также в виде

$$\Delta \left\{ \frac{\delta^2 V}{\delta x^2} + 2 \frac{\delta^2 V}{\delta x \delta z} \frac{\delta z}{\delta x} + \frac{\delta^2 V}{\delta z^2} \left(\frac{\delta z}{\delta x} \right)^2 + \frac{\delta V}{\delta z} \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} \right\} = 0 \qquad (12.8)$$

и т. д.

и выводить путем дифференцирования из аналогичных уравнений первого порядка

$$\Delta \left(\frac{\delta V}{\delta x} + \frac{\delta V}{\delta z} + \frac{\delta z}{\delta x} \right) = 0, \quad \Delta \left(\frac{\delta V}{\delta y} + \frac{\delta V}{\delta z} \frac{\delta z}{\delta y} \right) = 0. \qquad (12.9)$$

Одиннадцати полученных таким образом уравнений в сочетании с двумя уравнениями, задаваемыми соотношением (12.6), и семью уравнениями, на которые разлагается соотношение (12.3), в общем случае достаточно для определения двадцати восьми частных производных второго порядка функции V_2.

Приращения, связанные с преобразованием координат. Почти все предыдущие результаты допускают обобщение на случай косоугольных координат. Основная формула представима в таком виде, который позволяет распространить ее на полярную систему координат и любые другие способы задания положения, после чего найти новые вспомогательные функции, аналогичные функциям W, T и включающие их в себя, и вывести новые общие дифференциальные и интегральные уравнения для искривленных и ломаных лучей, обыкновенных и необыкновенных

13. Во всех предыдущих исследованиях предполагалось, что координаты конечной и начальной точек x, y, z, x', y', z' отнесены к одной общей системе прямоугольных координат. Но поскольку положение начальной и конечной точек часто бывает удобнее задавать иным способом, мы выразим сейчас старые прямоугольные координаты в виде линейных функций новых, более общих координат x, y, z и x', y', z', которые могут быть или не быть прямоугольными и отнесенными или не отнесенными к одной общей системе конечных и начальных осей.

Для этого мы воспользуемся следующими формулами:

$$x = x_0 + x_{x_,} x_, + x_{y_,} y_, + x_{z_,} z_, , \qquad x' = x'_0 + x'_{x'_,} x'_, + x'_{y'_,} y'_, + x'_{z'_,} z'_, ,$$

$$y = y_0 + y_{x_,} x_, + y_{y_,} y_, + y_{z_,} z_, , \qquad y' = y'_0 + y'_{x'_,} x'_, + y'_{y'_,} y'_, + y'_{z'_,} z'_, ,$$

$$z = z_0 + z_{x_,} x_, + z_{y_,} y_, + z_{z_,} z_, , \qquad z' = z'_0 + z'_{x'_,} x'_, + z'_{y'_,} y'_, + z'_{z'_,} z'_, , \tag{13.1}$$

где каждый из восемнадцати коэффициентов вида $x_{x_,}$ – косинус угла между направлениями соответствующих полуосей. Вследствие прямоугольности старых координат эти коэффициенты связаны между собой шестью соотношениями

$$x_{x_,}^2 + y_{x_,}^2 + z_{x_,}^2 = 1, \qquad x'^2_{x'_,} + y'^2_{x'_,} + z'^2_{x'_,} = 1,$$

$$x_{y_,}^2 + y_{y_,}^2 + z_{y_,}^2 = 1, \qquad x'^2_{y'_,} + y'^2_{y'_,} + z'^2_{y'_,} = 1,$$

$$x_{z_,}^2 + y_{z_,}^2 + z_{z_,}^2 = 1, \qquad x'^2_{z'_,} + y'^2_{z'_,} + z'^2_{z'_,} = 1. \tag{13.2}$$

По аналогии с обозначениями в предыдущих разделах введем следующие определения, аналогичные определениям (3.2):

$$\alpha_, = \frac{dx_,}{ds}, \quad \beta_, = \frac{dy_,}{ds}, \quad \gamma_, = \frac{dz_,}{ds},$$

$$\alpha'_, = \frac{dx'_,}{ds}, \quad \beta'_, = \frac{dy'_,}{ds}, \quad \gamma'_, = \frac{dz'_,}{ds} \tag{13.3}$$

и определениям (2.4):

$$\sigma_, = \frac{\delta V}{\delta x_,}, \quad \tau_, = \frac{\delta V}{\delta y_,}, \quad \upsilon_, = \frac{\delta V}{\delta z_,},$$

$$\sigma'_, = -\frac{\delta V}{\delta x'_,}, \quad \tau'_, = -\frac{\delta V}{\delta y'_,}, \quad \upsilon'_, = -\frac{\delta V}{\delta z'_,}. \tag{13.4}$$

Тогда

$$\alpha = \alpha_, x_{x_,} + \beta_, x_{y_,} + \gamma_, x_{z_,} , \qquad \alpha' = \alpha'_, x'_{x'_,} + \beta'_, x'_{y'_,} + \gamma'_, x'_{z'_,} ,$$

$$\beta = \alpha_, y_{x_,} + \beta_, y_{y_,} + \gamma_, y_{z_,} , \qquad \beta' = \alpha'_, y'_{x'_,} + \beta'_, y'_{y'_,} + \gamma'_, y'_{z'_,} ,$$

$$\gamma = \alpha_, z_{x_,} + \beta_, z_{y_,} + \gamma_, z_{z_,} , \qquad \gamma' = \alpha'_, z'_{x'_,} + \beta'_, z'_{y'_,} + \gamma'_, z'_{z'_,} \tag{13.5}$$

и

$$\sigma_, = \sigma x_{x_,} + \tau y_{x_,} + \upsilon z_{x_,}, \quad \sigma'_, = \sigma' x'_{x'_,} + \tau' y'_{x'_,} + \upsilon' z'_{x'_,},$$

$$\tau_, = \sigma x_{y_,} + \tau y_{y_,} + \upsilon z_{y_,}, \quad \tau'_, = \sigma' x'_{y'_,} + \tau' y'_{y'_,} + \upsilon' z'_{y'_,},$$

$$\upsilon_, = \sigma x_{z_,} + \tau y_{z_,} + \upsilon z_{z_,}, \quad \upsilon'_, = \sigma' x'_{z'_,} + \tau' y'_{z'_,} + \upsilon' z'_{z'_,}. \qquad (13.6)$$

Подставляя в прежние однородные функции среды v, v′ вместо α, β, γ, α', β', γ' правые части равенств (13.5), мы получим v в новом виде – как однородную функцию степени 1 переменных $\alpha_,, \beta_,, \gamma_,$, а v′ – в виде однородной функции той же степени переменных $\alpha'_,, \beta'_,, \gamma'_,$.

Дифференцируя новые функции v, v′ по новым переменным, мы получаем из соотношений (13.5) следующие соотношения между старыми и новыми производными:

$$\frac{\delta v}{\delta \alpha_,} = \frac{\delta v}{\delta \alpha} x_{x_,} + \frac{\delta v}{\delta \beta} y_{x_,} + \frac{\delta v}{\delta \gamma} z_{x_,}, \quad \frac{\delta v'}{\delta \alpha'_,} = \frac{\delta v'}{\delta \alpha_,} x'_{x'_,} + \frac{\delta v'}{\delta \beta_,} y'_{x'_,} + \frac{\delta v'}{\delta \gamma_,} z'_{x'_,},$$

$$\frac{\delta v}{\delta \beta_,} = \frac{\delta v}{\delta \alpha} x_{y_,} + \frac{\delta v}{\delta \beta} y_{y_,} + \frac{\delta v}{\delta \gamma} z_{y_,}, \quad \frac{\delta v'}{\delta \beta'_,} = \frac{\delta v'}{\delta \alpha_,} x'_{y'_,} + \frac{\delta v'}{\delta \beta_,} y'_{y'_,} + \frac{\delta v'}{\delta \gamma_,} z'_{y'_,},$$

$$\frac{\delta v}{\delta \gamma_,} = \frac{\delta v}{\delta \alpha} x_{z_,} + \frac{\delta v}{\delta \beta} y_{z_,} + \frac{\delta v}{\delta \gamma} z_{z_,}, \quad \frac{\delta v'}{\delta \gamma'_,} = \frac{\delta v'}{\delta \alpha_,} x'_{z'_,} + \frac{\delta v'}{\delta \beta_,} y'_{z'_,} + \frac{\delta v'}{\delta \gamma_,} z'_{z'_,}. \qquad (13.7)$$

Из соотношений (13.7) в сочетании с (13.4), (13.6) и (2.1), (2.4) из п. 2 мы можем вывести обобщения равенств (2.1)

$$\frac{\delta V}{\delta x_,} = \frac{\delta v}{\delta \alpha_,}, \quad \frac{\delta V}{\delta y_,} = \frac{\delta v}{\delta \beta_,}, \quad \frac{\delta V}{\delta z_,} = \frac{\delta v}{\delta \gamma_,},$$

$$-\frac{\delta V}{\delta x'_,} = \frac{\delta v'}{\delta \alpha'_,}, \quad -\frac{\delta V}{\delta y'_,} = \frac{\delta v'}{\delta \beta'_,}, \quad -\frac{\delta V}{\delta z'_,} = \frac{\delta v'}{\delta \gamma'_,} \qquad (13.8)$$

и важное обобщение основной формулы (1.1)

$$\delta V = \frac{\delta v}{\delta \alpha_,} \delta x_, - \frac{\delta v'}{\delta \alpha'_,} \delta x'_, + \frac{\delta v}{\delta \beta_,} \delta y_, - \frac{\delta v'}{\delta \beta'_,} + \frac{\delta v}{\delta \gamma_,} \delta z_, - \frac{\delta v'}{\delta \gamma'_,} \delta z'_,, \qquad (13.9)$$

которая, как показано, распространяется и на косоугольные координаты без предположения о совпадении начальных осей с конечными.

Почти все предыдущие рассуждения и результаты могут быть воспроизведены и при более общем подходе. Например, мы располагаем дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка по V, аналогичными уравнениями (2.2) и имеющими вид

$$\Omega_,\left(\frac{\delta V}{\delta x_,},\ \frac{\delta V}{\delta y_,},\ \frac{\delta V}{\delta z_,}, x_,, y_,, z_,, \chi\right)=0,$$

$$\Omega'_,\left(-\frac{\delta V}{\delta x'_,},\ -\frac{\delta V}{\delta y'_,},\ -\frac{\delta V}{\delta z'_,}, x'_,, y'_,, z'_,, \chi\right)=0. \qquad (13.10)$$

Эти уравнения приводят к дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка, аналогичному уравнению (2.3). Если уравнения (13.10) записать в виде

$$\Omega_,(\sigma_,, \tau_,, \upsilon_,, x_,, y_,, z_,, \chi)=0, \qquad \Omega'_,(\sigma'_,, \tau'_,, \upsilon'_,, x'_,, y'_,, z'_,, \chi)=0 \qquad (13.11)$$

и предположить, что они специальным образом "подготовлены" с помощью метода, изложенного в п. 2, т.е. что $\Omega_, + 1$ – однородная функция степени 1 по $\sigma_,$, $\tau_,$, $\upsilon_,$, а $\Omega'_, + 1$ – однородная функция той же степени по $\sigma'_,$, $\tau'_,$, $\upsilon'_,$, то

$$\frac{\alpha_,}{\mathrm{v}}=\frac{\delta\Omega_,}{\delta\sigma_,},\quad \frac{\beta_,}{\mathrm{v}}=\frac{\delta\Omega_,}{\delta\tau_,},\quad \frac{\gamma_,}{\mathrm{v}}=\frac{\delta\Omega_,}{\delta\upsilon_,},$$

$$\frac{\alpha'_,}{\mathrm{v}'}=\frac{\delta\Omega'_,}{\delta\sigma'_,},\quad \frac{\beta'_,}{\mathrm{v}'}=\frac{\delta\Omega'_,}{\delta\tau'_,},\quad \frac{\gamma'_,}{\mathrm{v}'}=\frac{\delta\Omega'_,}{\delta\upsilon'_,}. \qquad (13.12)$$

Кроме того, выполняются многие другие соотношения, аналогичные приведенным в п. 2. Дифференциальные уравнения искривленного луча, обыкновенного или необыкновенного, из п. 3 допускают следующее обобщение:

$$\frac{d}{ds}\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta\alpha_,}=\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta x_,},\quad \frac{d}{ds}\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta\beta_,}=\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta y_,},\quad \frac{d}{ds}\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta\gamma_,}=\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta z_,}. \qquad (13.13)$$

Интегралы их, записанные в виде

$$\frac{\delta V}{\delta x'_,}=\mathrm{const},\quad \frac{\delta V}{\delta y'_,}=\mathrm{const},\quad \frac{\delta V}{\delta z'_,}=\mathrm{const}, \qquad (13.14)$$

могут быть распространены и на косоугольные координаты. Кроме того, если конечный участок луча прямолинеен, то для него выполняются еще и соотношения

$$\frac{\delta V}{\delta x_,}=\mathrm{const},\quad \frac{\delta V}{\delta y_,}=\mathrm{const},\quad \frac{\delta V}{\delta z_,}=\mathrm{const}. \qquad (13.15)$$

Формула (11.1) отражения или преломления, обыкновенного и необыкновенного, а именно $\Delta V = 0$, также распространяется и на косоугольные координаты. Если ввести новые вспомогательные функции $W_,, T_,$, аналогичные вспомогательным функциям W, T и определяемые новыми соотношениями

$$W_, = -V + x_,\sigma_, + y_,\tau_, + z_,\upsilon_,, \quad T_, = W_, - x'_,\sigma'_, - y'_,\tau'_, - z'_,\upsilon'_,, \tag{13.16}$$

аналогичными определениям (4.4), (4.5), то с учетом смысла и свойств символов $\sigma_,, \tau_,, \upsilon_,, \sigma'_,, \tau'_,, \upsilon'_,$ мы получим для вариаций функций $V, W_,, T_,$ выражения

$$\delta V = \sigma_,\delta x_, - \sigma'_,\delta x'_, + \tau_,\delta y_, - \tau'_,\delta y'_, + \upsilon_,\delta z_, - \upsilon'_,\delta z'_, + \frac{\delta V}{\delta\chi}\delta\chi,$$

$$\delta W_, = x_,\delta\sigma_, + \sigma'_,\delta x'_, + y_,\delta\tau_, + \tau'_,\delta y'_, + z_,\delta\upsilon_, + \upsilon'_,\delta z'_, - \frac{\delta V}{\delta\chi}\delta\chi,$$

$$\delta T_, = x_,\delta\sigma_, - x'_,\delta\sigma'_, + y_,\delta\tau_, - y'_,\delta\tau'_, + z_,\delta\upsilon_, - z'_,\delta\upsilon'_, - \frac{\delta V}{\delta\chi}\delta\chi, \tag{13.17}$$

напоминающие выражения (4.1) – (4.3) и приводящие к аналогичным результатам. Например, частные производные новых вспомогательных функций $W_,, T_,$ с помощью методов, аналогичных тем, которые были использованы выше, могут быть выведены из новых производных характеристической функции V, в свою очередь выводимых из старых производных функции V по общей формуле

$$\left(\frac{\delta}{\delta x_,}\right)^i \left(\frac{\delta}{\delta y_,}\right)^{i'} \left(\frac{\delta}{\delta z_,}\right)^{i''} \left(\frac{\delta}{\delta x'_,}\right)^k \left(\frac{\delta}{\delta y'_,}\right)^{k'} \left(\frac{\delta}{\delta z'_,}\right)^{k''} \left(\frac{\delta}{\delta\chi}\right)^l V =$$

$$= \left(x_{x_,}\frac{\delta}{\delta x} + y_{x_,}\frac{\delta}{\delta y} + z_{x_,}\frac{\delta}{\delta z}\right)^i \left(x'_{x'_,}\frac{\delta}{\delta x'} + y'_{x'_,}\frac{\delta}{\delta y'} + z'_{x'_,}\frac{\delta}{\delta z'}\right)^k \times$$

$$\times \left(x_{y_,}\frac{\delta}{\delta x} + y_{y_,}\frac{\delta}{\delta y} + z_{y_,}\frac{\delta}{\delta z}\right)^{i'} \left(x'_{y'_,}\frac{\delta}{\delta x'} + y'_{y'_,}\frac{\delta}{\delta y'} + z'_{y'_,}\frac{\delta}{\delta z'}\right)^{k'} \times$$

$$\times \left(x_{z_,}\frac{\delta}{\delta x} + y_{z_,}\frac{\delta}{\delta y} + z_{z_,}\frac{\delta}{\delta z}\right)^{i''} \left(x'_{z'_,}\frac{\delta}{\delta x'} + y'_{z'_,}\frac{\delta}{\delta y'} + z'_{z'_,}\frac{\delta}{\delta z'}\right)^{k''} \frac{\delta^l V}{\delta\chi^l}. \tag{13.18}$$

Уравнения прямолинейного конечного луча представимы в виде

$$\frac{1}{\alpha_,}\left(x_, - \frac{\delta W_,}{\delta\sigma_,}\right) = \frac{1}{\beta_,}\left(y_, - \frac{\delta W_,}{\delta\tau_,}\right) = \frac{1}{\gamma_,}\left(z_, - \frac{\delta W_,}{\delta\upsilon_,}\right),$$

$$\frac{1}{\alpha_,}\left(x_, - \frac{\delta T_,}{\delta\sigma_,}\right) = \frac{1}{\beta_,}\left(y_, - \frac{\delta T_,}{\delta\tau_,}\right) = \frac{1}{\gamma_,}\left(z_, - \frac{\delta T_,}{\delta\upsilon_,}\right), \tag{13.19}$$

в то время как уравнения прямолинейного начального луча представимы в ином виде, а именно:

$$\frac{1}{\alpha'_{,}}\left(x'_{,}+\frac{\delta T_{,}}{\delta\sigma'_{,}}\right)=\frac{1}{\beta'_{,}}\left(y'_{,}+\frac{\delta T_{,}}{\delta\tau'_{,}}\right)=\frac{1}{\gamma'_{,}}\left(z'_{,}+\frac{\delta T_{,}}{\delta\upsilon'_{,}}\right). \tag{13.20}$$

Новые уравнения (13.19), (13.20) аналогичны уравнениям (6.5) и (6.11). Ясно, что произвольные постоянные, вводимые такими преобразованиями, во многих случаях должны способствовать упрощению решений оптических задач. Например, при сравнении данного ломаного луча, обыкновенного или необыкновенного, любой данной системы с другими близкими лучами той же системы часто бывает удобно выбрать конечный участок данного ломаного луча за ось $z_{,}$, а начальный участок за ось $z'_{,}$. При таком выборе осей $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\alpha'_{,}$, $\beta'_{,}$ и многие из новых частных производных обращаются в нуль, однако достигаемое при этом упрощение нисколько не умаляет общность.

Мы можем производить указанные преобразования и дальше, ввести полярные координаты или задавать положение начального и конечного участков какими-нибудь другими способами и тем не менее получать результаты, во многом аналогичные предыдущим.

Действительно, предположим, что координаты x, y, z конечного участка – функции трех величин ρ, ϑ, φ, а координаты x', y', z' начального участка – функции трех других величин ρ', ϑ', φ'. Тогда

$$\delta x=\frac{\delta x}{\delta\rho}\delta\rho+\frac{\delta x}{\delta\vartheta}\delta\vartheta+\frac{\delta x}{\delta\varphi}\delta\varphi,\quad \delta x'=\frac{\delta x'}{\delta\rho'}\delta\rho'+\frac{\delta x'}{\delta\vartheta'}\delta\vartheta'+\frac{\delta x'}{\delta\varphi'}\delta\varphi',$$

$$\delta y=\frac{\delta y}{\delta\rho}\delta\rho+\frac{\delta y}{\delta\vartheta}\delta\vartheta+\frac{\delta y}{\delta\varphi}\delta\varphi,\quad \delta y'=\frac{\delta y'}{\delta\rho'}\delta\rho'+\frac{\delta y'}{\delta\vartheta'}\delta\vartheta'+\frac{\delta y'}{\delta\varphi'}\delta\varphi',$$

$$\delta z=\frac{\delta z}{\delta\rho}\delta\rho+\frac{\delta z}{\delta\vartheta}\delta\vartheta+\frac{\delta z}{\delta\varphi}\delta\varphi,\quad \delta z'=\frac{\delta z'}{\delta\rho'}\delta\rho'+\frac{\delta z'}{\delta\vartheta'}\delta\vartheta'+\frac{\delta z'}{\delta\varphi'}\delta\varphi',$$

$$dx=\frac{\delta x}{\delta\rho}d\rho+\frac{\delta x}{\delta\vartheta}d\vartheta+\frac{\delta x}{\delta\varphi}d\varphi,\quad dx'=\frac{\delta x'}{\delta\rho'}d\rho'+\frac{\delta x'}{\delta\vartheta'}d\vartheta'+\frac{\delta x'}{\delta\varphi'}d\varphi',$$

$$dy=\frac{\delta y}{\delta\rho}d\rho+\frac{\delta y}{\delta\vartheta}d\vartheta+\frac{\delta y}{\delta\varphi}d\varphi,\quad dy'=\frac{\delta y'}{\delta\rho'}d\rho'+\frac{\delta y'}{\delta\vartheta'}d\vartheta'+\frac{\delta y'}{\delta\varphi'}d\varphi',$$

$$dz=\frac{\delta z}{\delta\rho}d\rho+\frac{\delta z}{\delta\vartheta}d\vartheta+\frac{\delta z}{\delta\varphi}d\varphi,\quad dz'=\frac{\delta z'}{\delta\rho'}d\rho'+\frac{\delta z'}{\delta\vartheta'}d\vartheta'+\frac{\delta z'}{\delta\varphi'}d\varphi'. \tag{13.21}$$

Мы можем рассматривать V как функцию переменных ρ, ϑ, φ, ρ', ϑ',φ',χ, получающуюся при подстановке вместо x, y, z, x',y', z' их значений. Подставив также значения дифференциалов dx, dy, dz в дифференциал dV, или $\mathrm{v}ds$, который прежде был однородной функцией степени 1 от dx, dy, dz такой, что в силу нашей основной формулы имеет место

$$\frac{\delta dV}{\delta dx}=\frac{\delta(\mathrm{v}\,ds)}{\delta dx}=\frac{\delta\,\mathrm{v}}{\delta\alpha}=\frac{\delta V}{\delta x},$$

$$\frac{\delta dV}{\delta dy}=\frac{\delta(\mathrm{v}\,ds)}{\delta dy}=\frac{\delta\,\mathrm{v}}{\delta\beta}=\frac{\delta V}{\delta y},$$

$$\frac{\delta dV}{\delta dz}=\frac{\delta(\mathrm{v}\,ds)}{\delta dz}=\frac{\delta\,\mathrm{v}}{\delta\gamma}=\frac{\delta V}{\delta z}, \tag{13.22}$$

мы можем считать, что $dV = \mathrm{v}ds$ становится однородной функцией степени 1 дифференциалов $d\rho$, $d\vartheta$, $d\varphi$, для которой выполняются соотношения

$$\frac{\delta(\mathrm{v}\,ds)}{\delta d\rho}=\frac{\delta dV}{\delta d\rho}=\frac{\delta V}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta\rho}+\frac{\delta V}{\delta y}\frac{\delta y}{\delta\rho}+\frac{\delta V}{\delta z}\frac{\delta z}{\delta\rho}=\frac{\delta V}{\delta\rho},$$

$$\frac{\delta(\mathrm{v}\,ds)}{\delta d\vartheta}=\frac{\delta dV}{\delta d\vartheta}=\frac{\delta V}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta\vartheta}+\frac{\delta V}{\delta y}\frac{\delta y}{\delta\vartheta}+\frac{\delta V}{\delta z}\frac{\delta z}{\delta\vartheta}=\frac{\delta V}{\delta\vartheta},$$

$$\frac{\delta(\mathrm{v}\,ds)}{\delta d\varphi}=\frac{\delta dV}{\delta d\varphi}=\frac{\delta V}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta\varphi}+\frac{\delta V}{\delta y}\frac{\delta y}{\delta\varphi}+\frac{\delta V}{\delta z}\frac{\delta z}{\delta\varphi}=\frac{\delta V}{\delta\varphi}, \tag{13.23}$$

где символ d по-прежнему относится к движению по лучу. Аналогичным образом начальный дифференциал функции V, т.е. $\mathrm{v}'ds'$, можно рассматривать как однородную функцию степени 1 переменных $d\rho'$, $d\vartheta'$, $d\varphi'$. Мы обнаружим, что частные производные первого порядка этой функции равны соответственно

$$-\frac{\delta V}{\delta\rho'},\ -\frac{\delta V}{\delta\vartheta'},\ -\frac{\delta V}{\delta\varphi'}.$$

Следовательно, основная формула (1.1) допускает обобщение

$$\delta V=\frac{\delta(\mathrm{v}\,ds)}{\delta d\rho}\delta\rho+\frac{\delta(\mathrm{v}\,ds)}{\delta d\vartheta}\delta\vartheta+\frac{\delta(\mathrm{v}\,ds)}{\delta d\varphi}\delta\varphi-$$

$$-\frac{\delta(\mathrm{v}'ds')}{\delta d\rho'}\delta\rho'-\frac{\delta(\mathrm{v}'ds')}{\delta d\vartheta'}\delta\vartheta'-\frac{\delta(\mathrm{v}'ds')}{\delta d\varphi'}\delta\varphi'+\frac{\delta V}{\delta\chi}\delta\chi. \tag{13.24}$$

Вспомогательные функции W, T соответствуют более общим функциям

$$-V+\rho\frac{\delta V}{\delta\rho}+\vartheta\frac{\delta V}{\delta\vartheta}+\varphi\frac{\delta V}{\delta\varphi}$$

и

$$-V+\rho\frac{\delta V}{\delta\rho}+\vartheta\frac{\delta V}{\delta\vartheta}+\varphi\frac{\delta V}{\delta\varphi}+\rho'\frac{\delta V}{\delta\rho'}+\vartheta'\frac{\delta V}{\delta\vartheta'}+\varphi'\frac{\delta V}{\delta\varphi'},$$

из которых первая зависит от

$$\frac{\delta V}{\delta\rho},\ \frac{\delta V}{\delta\vartheta},\ \frac{\delta V}{\delta\varphi},\ \rho',\vartheta',\varphi',\chi,$$

а вторая – от

$$\frac{\delta V}{\delta\rho},\ \frac{\delta V}{\delta\vartheta},\ \frac{\delta V}{\delta\varphi},\ -\frac{\delta V}{\delta\rho'},\ -\frac{\delta V}{\delta\vartheta'},\ -\frac{\delta V}{\delta\varphi'},\ \chi.$$

Нетрудно также установить общие дифференциальные уравнения искривленного луча, обыкновенного или необыкновенного, и общие интегралы, аналогичные полученным ранее в прямоугольных и косоугольных координатах и включающих их как частные случаи:

$$d\frac{\delta dV}{\delta d\rho}=\frac{\delta dV}{\delta\rho},\quad d\frac{\delta dV}{\delta d\vartheta}=\frac{\delta dV}{\delta\vartheta},\quad d\frac{\delta dV}{\delta d\varphi}=\frac{\delta dV}{\delta\varphi},$$

$$\frac{\delta V}{\delta\rho'}=\text{const},\quad \frac{\delta V}{\delta\vartheta'}=\text{const},\quad \frac{\delta V}{\delta\varphi'}=\text{const}. \qquad (13.25)$$

Общие геометрические соотношения для бесконечно близких лучей. Классификация двадцати четырех независимых коэффициентов, входящих в алгебраические выражения этих общих соотношений. Разделение общего обсуждения на четыре основные проблемы

14. Важная общая проблема математической оптики, являющаяся частным случаем фундаментальной проблемы, сформулированной в п. 2, состоит в *исследовании общих соотношений между бесконечно близкими лучами,* или путями света, в частности в выяснении того, *как изменяются начальное и конечное направления при бесконечно малых изменениях начальной и конечной точек и цвета,* т.е. в обозначениях настоящего "Дополнения" в исследовании общей зависимости вариаций $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, $\delta\alpha'$, $\delta\beta'$, $\delta\gamma'$ от δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta\chi$. Этот частный случай нашей фундаментальной проблемы легко решается с помощью наших общих методов и частных производных первого и второго порядка характеристических и связанных с ней функций. (Та же проблема может быть решена и с помощью частных производных первых трех порядков одной лишь характеристической функции V.) Из этих производных мы можем в общем случае вывести шесть линейных выражений для $\delta\alpha,\delta\beta,\delta\gamma,\delta\alpha',\delta\beta',\delta\gamma'$ через $\delta x,\delta y,\delta z,\delta x',\delta y',\delta z',\delta\chi$ с сорока двумя коэффициентами, из которых лишь двадцать четыре независимых, поскольку коэффициенты связаны четырнадцатью соотношениями, содержащимися в формулах $\alpha\delta\alpha+\beta\delta\beta+\gamma\delta\gamma=0$, $\alpha'\delta\alpha'+\beta'\delta\beta'+\gamma'\delta\gamma'=0$, и еще четырьмя соотношениями, заключенными в условиях, согласно которым конечное направление остается неизменным, когда

начальная точка перемещается в новое положение на данном пути света, равно как и начальное направление, когда конечная точка перемещается в новое положение на данном пути.

Таким образом, если взять характеристическую функцию V и функции среды v, v′ (конечную и начальную), то из соотношений (2.1) мы получаем общие соотношения

$$\delta\frac{\delta V}{\delta x}=\delta\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta\alpha},\quad \delta\frac{\delta V}{\delta y}=\delta\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta\beta},\quad \delta\frac{\delta V}{\delta z}=\delta\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta\gamma},$$

$$-\delta\frac{\delta V}{\delta x'}=\delta\frac{\delta \mathrm{v}'}{\delta\alpha'},\quad -\delta\frac{\delta V}{\delta y'}=\delta\frac{\delta \mathrm{v}'}{\delta\beta'},\quad -\delta\frac{\delta V}{\delta z'}=\delta\frac{\delta \mathrm{v}'}{\delta\gamma'}. \tag{14.1}$$

Как показано в предыдущем разделе, мы можем по своему усмотрению по-разному выбирать начало координат и принимать различные косоугольные направления за оси начальных и конечных координат, если новые соответствующие значения указателей конечного и начального направлений α, β, γ, α', β', γ' выбрать так, чтобы по-прежнему выполнялись условия (3.2):

$$\alpha=\frac{dx}{ds},\quad \beta=\frac{dy}{ds},\quad \gamma=\frac{dz}{ds},\quad \alpha'=\frac{dx'}{ds'},\quad \beta'=\frac{dy'}{ds'},\quad \gamma'=\frac{dz'}{ds'},$$

где ds, как и прежде, означает конечный, а ds' – начальный элемент искривленного или ломаного пути. Например, мы можем предположить, что обе системы координат прямоугольные, но начала конечной и начальной систем координат выбраны соответственно в конечной и начальной точках данного обыкновенного или необыкновенного пути, а положительные полуоси z, z' совпадают с конечным и начальным направлениями. Тогда

$$x=0,\ y=0,\ z=0,\ \alpha=0,\ \beta=0,\ \gamma=1,\ \delta\gamma=0,$$

$$x'=0,\ y'=0,\ z'=0,\ \alpha'=0,\ \beta'=0,\ \gamma'=1,\ \delta\gamma'=0, \tag{14.2}$$

и шесть уравнений (14.1), из которых различны лишь четыре, сводятся к следующим четырем уравнениям:

$$\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha^2}\delta\alpha+\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha\delta\beta}\delta\beta=\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta x'}\delta x'+\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y'}\delta y'+\left(\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta\chi}-\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha\delta\chi}\right)\delta\chi+$$

$$+\left(\frac{\delta^2 V}{\delta x^2}-\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha\delta x}\right)\delta x+\left(\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y}-\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha\delta y}\right)\delta y+\left(\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta x}-\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha\delta z}\right)\delta z,$$

$$\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha\delta\beta}\delta\alpha+\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\beta^2}\delta\beta=\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta x'}\delta x'+\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta y'}\delta y'+\left(\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta\chi}-\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\beta\delta\chi}\right)\delta\chi+$$

$$+\left(\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y}-\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\beta\delta x}\right)\delta x+\left(\frac{\delta^2 V}{\delta y^2}-\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\beta\delta y}\right)\delta y+\left(\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta y}-\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\beta\delta z}\right)\delta z,$$

$$-\frac{\delta^2 v'}{\delta\alpha'^2}\delta\alpha' - \frac{\delta^2 v'}{\delta\alpha'\delta\beta'}\delta\beta' = \frac{\delta^2 V}{\delta x\delta x'}\delta x + \frac{\delta^2 V}{\delta y\delta x'}\delta y + \left(\frac{\delta^2 V}{\delta x'\delta\chi} + \frac{\delta^2 v'}{\delta\alpha'\delta\chi}\right)\delta\chi +$$

$$+\left(\frac{\delta^2 V}{\delta x'^2} + \frac{\delta^2 v'}{\delta\alpha'\delta x'}\right)\delta x' + \left(\frac{\delta^2 V}{\delta x'\delta y'} + \frac{\delta^2 v'}{\delta\alpha'\delta y'}\right)\delta y' - \left(\frac{\delta v'}{\delta x'} - \frac{\delta^2 v'}{\delta\alpha'\delta z'}\right)\delta z',$$

$$-\frac{\delta^2 v'}{\delta\alpha'\delta\beta'}\delta\alpha' - \frac{\delta^2 v'}{\delta\beta'^2}\delta\beta' = \frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y'}\delta x + \frac{\delta^2 V}{\delta y\delta y'}\delta y + \left(\frac{\delta^2 V}{\delta y'\delta\chi} + \frac{\delta^2 v'}{\delta\beta'\delta\chi}\right)\delta\chi +$$

$$+\left(\frac{\delta^2 V}{\delta x'\delta y'} + \frac{\delta^2 v'}{\delta\beta'\delta x'}\right)\delta x' + \left(\frac{\delta^2 V}{\delta y'^2} + \frac{\delta^2 v'}{\delta\beta'\delta y'}\right)\delta y' - \left(\frac{\delta v'}{\delta y'} - \frac{\delta^2 v'}{\delta\beta'\delta z'}\right)\delta z'. \qquad (14.3)$$

После несложного исключения переменных из уравнений (14.3) получаются выражения для вариаций $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\alpha'$, $\delta\beta'$, имеющие вид

$$\delta\alpha = \frac{\delta\alpha}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\alpha}{\delta y}\delta y + \frac{\delta\alpha}{\delta z}\delta z + \frac{\delta\alpha}{\delta x'}\delta x' + \frac{\delta\alpha}{\delta y'}\delta y' + \frac{\delta\alpha}{\delta\chi}\delta\chi,$$

$$\delta\beta = \frac{\delta\beta}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\beta}{\delta y}\delta y + \frac{\delta\beta}{\delta z}\delta z + \frac{\delta\beta}{\delta x'}\delta x' + \frac{\delta\beta}{\delta y'}\delta y' + \frac{\delta\beta}{\delta\chi}\delta\chi,$$

$$\delta\alpha' = \frac{\delta\alpha'}{\delta x'}\delta x' + \frac{\delta\alpha'}{\delta y'}\delta y' + \frac{\delta\alpha'}{\delta z'}\delta z' + \frac{\delta\alpha'}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\alpha'}{\delta y}\delta y + \frac{\delta\alpha'}{\delta\chi}\delta\chi,$$

$$\delta\beta' = \frac{\delta\beta'}{\delta x'}\delta x' + \frac{\delta\beta'}{\delta y'}\delta y' + \frac{\delta\beta'}{\delta z'}\delta z' + \frac{\delta\beta'}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\beta'}{\delta y}\delta y + \frac{\delta\beta'}{\delta\chi}\delta\chi. \qquad (14.4)$$

Эти линейные выражения содержат двадцать четыре коэффициента и позволяют полностью определить геометрические соотношения между касательными к бесконечно близким путям света в конечной и начальной точках.

Если конечная и начальная среды обыкновенные, т.е. если функции v, v' не зависят от направления лучей, то

$$v = \mu\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \quad v' = \mu'\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}, \qquad (14.5)$$

где μ, μ' – функции показателя цвета χ. Кроме того, если конечная и начальная среды – атмосферы, то μ зависит только от конечных, а μ' – только от начальных координат. В этом случае из уравнений (14.3) непосредственно следует, что

$$\delta\alpha = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\delta^2 V}{\delta x^2}\delta x + \frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y}\delta y + \frac{\delta\mu}{\delta x}\delta z + \frac{\delta^2 V}{\delta x\delta x'}\delta x' + \frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y'}\delta y' + \frac{\delta^2 V}{\delta x\delta\chi}\delta\chi\right),$$

$$\delta\beta = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y}\delta x + \frac{\delta^2 V}{\delta y^2}\delta y + \frac{\delta\mu}{\delta y}\delta z + \frac{\delta^2 V}{\delta y\delta x'}\delta x' + \frac{\delta^2 V}{\delta y\delta y'}\delta y' + \frac{\delta^2 V}{\delta y\delta\chi}\delta\chi\right),$$

$$\delta\alpha' = -\frac{1}{\mu'}\left(\frac{\delta^2 V}{\delta x'^2}\delta x' + \frac{\delta^2 V}{\delta x'\delta y'}\delta y' - \frac{\delta\mu'}{\delta x'}\delta z' + \frac{\delta^2 V}{\delta x \delta x'}\delta x + \frac{\delta^2 V}{\delta y \delta x'}\delta y + \frac{\delta^2 V}{\delta x' \delta\chi}\delta\chi\right),$$

$$\delta\beta' = -\frac{1}{\mu'}\left(\frac{\delta^2 V}{\delta x'\delta y'}\delta x' + \frac{\delta^2 V}{\delta y'^2}\delta y' - \frac{\delta\mu'}{\delta y'}\delta z' + \frac{\delta^2 V}{\delta x \delta y'}\delta x + \frac{\delta^2 V}{\delta y \delta y'}\delta y + \frac{\delta^2 V}{\delta y' \delta\chi}\delta\chi\right). \qquad (14.6)$$

Мы видим, что в общем случае двадцать четыре коэффициента выражений (14.4) могут быть легко выведены с помощью уравнений (14.3) из частных производных первого и второго порядков характеристической функции V и функции v, v′ конечной и начальной сред. Например,

$$\frac{\delta\alpha}{\delta x} = \frac{1}{\mathrm{v}''}\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\beta^2}\left(\frac{\delta^2 V}{\delta x^2} - \frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha\delta x}\right) - \frac{1}{\mathrm{v}''}\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha\delta\beta}\left(\frac{\delta^2 V}{\delta x \delta y} - \frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\beta\delta x}\right),$$

$$\frac{\delta\alpha}{\delta y} = \frac{1}{\mathrm{v}''}\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\beta^2}\left(\frac{\delta^2 V}{\delta x \delta y} - \frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha\delta y}\right) - \frac{1}{\mathrm{v}''}\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha\delta\beta}\left(\frac{\delta^2 V}{\delta y^2} - \frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\beta\delta y}\right),$$

$$\frac{\delta\beta}{\delta x} = \frac{1}{\mathrm{v}''}\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha^2}\left(\frac{\delta^2 V}{\delta x \delta y} - \frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\beta\delta x}\right) - \frac{1}{\mathrm{v}''}\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha\delta\beta}\left(\frac{\delta^2 V}{\delta x^2} - \frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha\delta x}\right),$$

$$\frac{\delta\beta}{\delta y} = \frac{1}{\mathrm{v}''}\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha^2}\left(\frac{\delta^2 V}{\delta y^2} - \frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\beta\delta y}\right) - \frac{1}{\mathrm{v}''}\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha\delta\beta}\left(\frac{\delta^2 V}{\delta x \delta y} - \frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha\delta y}\right), \qquad (14.7)$$

где v″ имеет такой же смысл, как и в п. 10. Те же двадцать четыре коэффициента линейных выражений (14.4) могут, как уже говорилось, быть выведены из частных производных первого и второго порядков других, связанных с характеристической и вспомогательной функциями, или даже из частных производных первого, второго и третьего порядков одной лишь характеристической функции V. Предположим поэтому, что двадцать четыре коэффициента выражений (14.4) известны, и попытаемся выяснить, каков их геометрический смысл и приложения, т.е. их связь с вопросами относительно бесконечно малых вариаций начального и конечного направлений, или касательных к путям света в начальной и конечной точках, возникающих вследствие бесконечно малого смещения концов и изменения цвета.

При обсуждении этих вопросов заведомо допустимо (в силу линейности дифференциальных выражений (14.4)) рассматривать в отдельности одно за другим влияние семи вариаций δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta\chi$ конечных и начальных координат и показателя цвета или любых наборов из этих семи вариаций на четыре вариации $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\alpha'$, $\delta\beta'$ конечных и начальных направляющих косинусов. Пусть, например, требуется сравнить конечное и начальное направления данного пути обыкновенного или необыкновенного света, имеющего показатель цвета χ и идущего из начальной точки A в начальную точку B (такой путь мы обозначим

$$(A, B)_\chi) \qquad (14.8)$$

с конечным и начальным направлениями бесконечно близкого пути, имеющего бесконечно близкий показатель цвета $\chi + \delta\chi$ и идущего из бесконечно близкой начальной точки A' в бесконечно близкую точку B' (такой путь мы по аналогии с исходным обозначим

$$(A', B')_{\chi+\delta\chi}). \tag{14.9}$$

Мы можем добиться желаемого, сравнивая отдельно конечное и начальное направления данного пути (A, B) с конечными и начальными направлениями трех других бесконечно близких путей, а именно:

$$\text{1-го } (A, B)_{\chi+\delta\chi}, \qquad \text{2-го } (A, B')_{\chi}, \qquad \text{3-го } (A', B)_{\chi}. \tag{14.10}$$

Эти пути получаются из исходного при последовательном изменении в отдельности показателя цвета χ, конечной точки B и начальной точки A. При таком подходе нам необходимо рассматривать в отдельности одну за другой три группы из двадцати четырех коэффициентов линейных соотношений (14.4):

$$\begin{aligned} &\text{1-я группа:} \quad \frac{\delta\alpha}{\delta\chi}, \frac{\delta\beta}{\delta\chi}, \frac{\delta\alpha'}{\delta\chi}, \frac{\delta\beta'}{\delta\chi}, \\ &\text{2-я группа:} \quad \frac{\delta\alpha}{\delta x}, \frac{\delta\alpha}{\delta y}, \frac{\delta\alpha}{\delta z}, \frac{\delta\beta}{\delta x}, \frac{\delta\beta}{\delta y}, \frac{\delta\beta}{\delta z}, \frac{\delta\alpha'}{\delta x}, \frac{\delta\alpha'}{\delta y}, \frac{\delta\beta'}{\delta x}, \frac{\delta\beta'}{\delta y}, \\ &\text{3-я группа:} \quad \frac{\delta\alpha}{\delta x'}, \frac{\delta\alpha}{\delta y'}, \frac{\delta\beta}{\delta x'}, \frac{\delta\beta}{\delta y'}, \frac{\delta\alpha'}{\delta y'}, \frac{\delta\alpha'}{\delta z'}, \frac{\delta\beta'}{\delta x'}, \frac{\delta\beta'}{\delta y'}, \frac{\delta\beta'}{\delta z'}. \end{aligned} \tag{14.11}$$

Мы можем упростить и усовершенствовать план нашего исследования, исходя из следующих соображений.

Ясно, что из трех сравнений исходного пути (14.8) с тремя близкими путями (14.10) третье по существу аналогично второму и его не следует рассматривать как отдельное, поскольку безразлично, какой из двух концов пути света считать начальной точкой, а какой – конечной. Следовательно, мы можем опустить сравнение с третьим путем из (14.10) и ограничиться сравнением исходного пути с первым и с третьим. Это означает, что при создании теории общих соотношений для бесконечно близких лучей мы можем не рассматривать третий набор коэффициентов из (14.11). По аналогичной причине мы можем опустить два последних коэффициента в первом наборе из (14.11) и тем самым свести исследование двадцати четырех коэффициентов к рассмотрению лишь их половины.

Сравнение с вторым из путей (14.10) удобно производить в два приема. Действительно, вместо произвольного бесконечно малого отрезка пути BB', соединяющего конечную точку B с бесконечно близкой точкой B', удобно рассматривать две проекции такого отрезка: одну на элемент конечного участка пути света или касательную к нему в конечной точке и другую на плоскость, перпендикулярную такому элементу, т.е. положить

$$BB'^2 = BB_d^2 + BB_\delta^2, \tag{14.12}$$

где BB_d – проекция на пути, а BB_δ – проекция на перпендикулярную плоскость.

Далее мы можем рассмотреть в отдельности две близкие точки B_d, B_δ (на элементе пути и на плоскости) и два соответствующих пути

$$(A, B_d)_\chi, \quad (A, B_\delta)_\chi, \tag{14.13}$$

вместо того чтобы рассматривать одну более общую близкую точку B' и один близкий путь $(A, B')_\chi$. Тем самым мы приходим к необходимости рассмотрения в отдельности как одного подкласса, или подмножества, порождаемого путем $(A, B_d)_\chi$, системы двух коэффициентов $\delta\alpha/\delta z$, $\delta\beta/\delta z$. Эти коэффициенты мы отличаем от восьми остальных коэффициентов 2-го набора из (14.11), соответствующих другому близкому пути $(A, B_\delta)_\chi$. В свою очередь эти восемь коэффициентов удобно подразделить на два различных класса в зависимости от того, рассматриваем ли мы изменения конечного или начального направления.

Таким образом, двенадцать оставшихся коэффициентов линейных выражений (14.4) могут быть разделены на *четыре новых множества*, или класса, соответствующих *четырем отдельным задачам*:

$$\text{1-е множество: } \frac{\delta\alpha}{\delta\chi}, \frac{\delta\beta}{\delta\chi};$$

$$\text{2-е множество: } \frac{\delta\alpha}{\delta z}, \frac{\delta\beta}{\delta z};$$

$$\text{3-е множество: } \frac{\delta\alpha}{\delta x}, \frac{\delta\alpha}{\delta y}, \frac{\delta\beta}{\delta x}, \frac{\delta\beta}{\delta y};$$

$$\text{4-е множество: } \frac{\delta\alpha'}{\delta x}, \frac{\delta\alpha'}{\delta y}, \frac{\delta\beta'}{\delta x}, \frac{\delta\beta'}{\delta y}. \tag{14.14}$$

В каждой из этих четырех задач начальная точка считается заданной и рассматривается как точечный источник света, общий для всех бесконечно близких путей, направления которых на конечных участках мы сравниваем. В первой задаче, кроме начальной, считается заданной и конечная точка, а показатель цвета переменный. Исследованию подлежит хроматическая дисперсия конечных участков различных близких путей неоднородного света, связывающих данную конечную точку с данным точечным источником света. В трех остальных задачах свет считается однородным, а пути света отличаются вариацией конечной точки. Во второй задаче новая конечная точка B_d находится на исходном пути или на его продолжении, и мы исследуем, изменяется ли и каким именно образом конечное направление в зависимости от конечной кривизны исходного пути. В третьей задаче новая конечная точка B_δ расположена на бесконечно малом отрезке

$$\delta l = BB_\delta, \tag{14.15}$$

проведенном из заданной конечной точки исходного пути перпендикулярно заданному конечному элементу этого пути, а именно элементу

$$ds = BB_d, \tag{14.16}$$

и мы исследуем взаимное расположение и соотношения конечной системы прямых линий, совпадающих с конечными направлениями (и указывающих их) близких

путей света в нескольких близких точках B_δ, в которых эти прямые пересекают заданную конечную плоскость, перпендикулярную заданному элементу ds. В четвертой задаче мы рассматриваем начальную систему прямых линий, указывающих в точке, где находится источник света, начальные направления тех же близких путей однородного света, и сравниваем эти начальные направления с положениями точек B_δ. Рассмотрим в отдельности теперь эти четыре основные задачи о геометрических отношениях между бесконечно близкими лучами.

Обсуждение четырех основных проблем. Элементы относительного расположения лучей вблизи путей света. Ось и постоянная хроматической дисперсии. Ось кривизны луча. Направляющий параболоид и постоянная девиации. Направляющие плоскости и сопряженные направляющие оси

15. *Первая* из четырех основных задач, а именно та, в которой требуется определить конечную хроматическую дисперсию по двум коэффициентам $\delta\alpha/\delta\chi$, $\delta\beta/\delta\chi$, легко решается, поскольку для величины и плоскости дисперсии мы располагаем следующими уравнениями:

$$\textit{Конечный угол хроматической дисперсии} = \xi\delta\chi, \qquad \xi = \sqrt{(\delta\alpha/\delta\chi)^2 + (\delta\beta/\delta\chi)^2}$$

$$\textit{Конечная плоскость дисперсии} \quad y\,\delta\alpha/\delta\chi = x\,\delta\beta/\delta\chi. \tag{15.1}$$

Эффект от такой дисперсии можно построить геометрически, поворачивая данную конечную прямую, задающую направление исходного луча света, на малый угол $\xi\delta\chi$ (ξ – величина, которую можно назвать *постоянной конечной хроматической дисперсии*) вокруг прямой

$$x\frac{\delta\alpha}{\delta\chi} + y\frac{\delta\beta}{\delta\chi} = 0, \quad z = 0, \tag{15.2}$$

которую можно назвать *осью конечной хроматической дисперсии.*

Вторая задача, связанная с конечной кривизной данного пути света, решается с помощью аналогичных уравнений:

$$\textit{Конечная кривизна луча} = \sqrt{(\delta\alpha/\delta z)^2 + (\delta\beta/\delta z)^2},$$

$$\textit{Плоскость кривизны} \quad y\,\delta\alpha/\delta z = x\,\delta\beta/\delta z. \tag{15.3}$$

Мы имеем также уравнения для оси кривизны, т.е. для оси окружности кривизны, или конечной окружности, соприкасающейся с данным путем света:

$$x\frac{\delta\alpha}{\delta z} + y\frac{\delta\beta}{\delta z} = 1, \quad z = 0. \tag{15.4}$$

Во всех этих уравнениях кривизны коэффициенты $\delta\alpha/\delta z$, $\delta\beta/\delta z$, следуя обозначениям, принятых в настоящем "Дополнении", могут быть выражены через ве-

личины $d\alpha/dz$, $d\beta/dz$, так как те связаны с движением по данному пути света. Ясно, что эти коэффициенты обращаются в нуль, если конечный участок пути прямолинеен. Но если конечный участок искривлен, то влияние кривизны на конечное направление можно учесть с помощью геометрического построения, поворачивая конечный элемент ds на бесконечно малый угол вокруг конечной оси кривизны.

Две остальные задачи более сложные, так как каждая из них включает в себя две независимые вариации δx, δy, а именно прямоугольные координаты близкой точки B_δ на конечной плоскости xy (точка B_δ принимается за конечную точку близкого пути света). Уравнения прямой, совпадающей с конечным участком этого близкого пути или конечной касательной к нему, имеют вид

$$x = \delta x + z\left(\frac{\delta\alpha}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\alpha}{\delta y}\delta y\right), \quad y = \delta y + z\left(\frac{\delta\beta}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\beta}{\delta y}\delta y\right), \tag{15.5}$$

а уравнения прямой, совпадающей с начальным участком того же близкого пути или начальной касательной к нему,

$$x' = \delta x' + z'\left(\frac{\delta\alpha'}{\delta x'}\delta x' + \frac{\delta\alpha'}{\delta y'}\delta y'\right), \quad y' = \delta y' + z'\left(\frac{\delta\beta'}{\delta x'}\delta x' + \frac{\delta\beta'}{\delta y'}\delta y'\right). \tag{15.6}$$

Наша *третья* задача состоит в исследовании геометрических соотношений как между прямыми системы (15.5), которые мы назовем *конечными линиями лучей*, так и между этими прямыми и координатами δx, δy, а наша *четвертая* задача – в исследовании связи между теми же координатами или вариациями и прямыми системы (15.6), которые можно назвать *начальными линиями лучей*.

Третью задачу также можно считать решенной, если указать такую поверхность, что конечные линии лучей либо являются нормалями к ней, либо однозначно связаны с ней каким-нибудь другим известным геометрическим соотношением. Имея это в виду, попытаемся выяснить, являются ли линии лучей системы (15.5) нормалями к общей поверхности, проходящей через данную конечную точку исходного пути света. Если эти линии совпадают с нормалями, то поверхность в рассматриваемом нами приближении можно считать перпендикулярной к самим конечным лучам. В общем случае, когда лучи данного цвета расходятся от данной светящейся точки и претерпевают любое число обыкновенных или необыкновенных и постепенных или резких отражений или преломлений, они в своем конечном состоянии перпендикулярны или неперпендикулярны общей поверхности в зависимости от того, интегрируемо или не интегрируемо дифференциальное уравнение

$$\alpha\delta x + \beta\delta y + \gamma\delta z = 0, \tag{15.7}$$

и если существует хотя бы одна поверхность, перпендикулярная ко всем конечным лучам, то существует семейство таких поверхностей, описываемое интегралом уравнения (15.7). Следовательно, в рассматриваемом нами случае искомая нормальная поверхность (если она вообще существует) такова, что удовлетворяет условиям $\delta z = 0$ и

$$\delta^2 z + \delta\alpha\delta x + \delta\beta\delta y = 0, \tag{15.8}$$

т.е. поверхность (если она существует) должна касаться заданной конечной плоскости xy и должна иметь касание второго порядка с параболоидом

$$z+\frac{\delta\alpha}{\delta x}x^2+\left(\frac{\delta\alpha}{\delta y}+\frac{\delta\beta}{\delta x}\right)xy+\frac{\delta\beta}{\delta y}y^2=0. \tag{15.9}$$

Нормали к этому параболоиду вблизи его вершины, т.е. вблизи конечной точки данного пути света, или начала конечных координат, определяются приближенными уравнениями

$$x=\delta x+z\left(\frac{\delta\alpha}{\delta x}\delta x+\frac{\delta\alpha}{\delta y}\delta y\right)+zn\delta y,\qquad y=\delta y+z\left(\frac{\delta\beta}{\delta x}\delta x+\frac{\delta\beta}{\delta y}\delta y\right)-zn\delta x, \tag{15.10}$$

если обозначить для краткости

$$n=\frac{1}{2}\left(\frac{\delta\beta}{\delta x}-\frac{\delta\alpha}{\delta y}\right). \tag{15.11}$$

Отсюда следует, что эти нормали совпадают с линиями лучей (15.5), если выполняется условие

$$\frac{\delta\beta}{\delta x}=\frac{\delta\alpha}{\delta y}, \tag{15.12}$$

которое является не чем иным, как условием интегрируемости дифференциального уравнения (15.7), поскольку мы выбрали ось z так, чтобы α и β обращались в нуль. Если конечная среда обыкновенная, то условие (15.12) выполняется в силу соотношений (14.6). В этом случае конечные лучи, как прямолинейные, так и искривленные, перпендикулярны семейству поверхностей, задаваемому уравнением

$$V=\text{const}. \tag{15.13}$$

Для обыкновенных лучей оно является интегралом уравнения (15.7) и (как приближенное уравнение нормальной поверхности в начале координат) приводит к уравнению

$$\delta V+\frac{1}{2}\delta^2 V=0,\ \text{или}\ \mu z+\frac{1}{2}\frac{\delta^2 V}{\delta x^2}x^2+\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y}xy+\frac{1}{2}\frac{\delta^2 V}{\delta y^2}y^2=0, \tag{15.14}$$

которое в силу соотношений (14.6) согласуется с уравнением параболоида (15.9). В общем случае условие (15.12) существования нормальной поверхности с учетом соотношений (14.7) может быть представлено в виде

$$\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha^2}\left(\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y}-\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\beta\delta x}\right)-\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha\delta\beta}\left(\frac{\delta^2 V}{\delta x^2}-\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha\delta x}\right)=$$

$$=\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\beta^2}\left(\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y}-\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha\delta y}\right)-\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha\delta\beta}\left(\frac{\delta^2 V}{\delta y^2}-\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\beta\delta y}\right). \tag{15.15}$$

Для необыкновенных лучей это условие не выполняется, за исключением нескольких особых случаев. Однако мы всегда можем рассматривать параболоид (15.9) как вспомогательную поверхность, с которой конечные линии лучей введенной нами системы (15.5) связаны замечательным и вместе с тем простым соотношением. Действительно, если взаимно перпендикулярные плоскости кривизны параболоида принять за координатные плоскости xy, yz и обозначить две кривизны соответственно через r и t, то для того, чтобы уравнение параболоида приводилось к виду

$$z = \frac{1}{2}rx^2 + \frac{1}{2}ty^2, \tag{15.16}$$

необходимо удовлетворить условию

$$\frac{\delta\alpha}{\delta x} + \frac{\delta\beta}{\delta y} = 0. \tag{15.17}$$

Мы можем воспользоваться следующими выражениями для четырех коэффициентов нашей задачи:

$$\frac{\delta\alpha}{\delta x} = -r, \quad \frac{\delta\alpha}{\delta y} = -n, \quad \frac{\delta\beta}{\delta x} = +n, \quad \frac{\delta\beta}{\delta y} = -t. \tag{15.18}$$

Линии лучей системы (15.5) задаются в этом случае уравнениями

$$x = \delta x - z(r\delta x + n\delta y), \qquad y = \delta y - z(t\delta y - n\delta x), \tag{15.19}$$

а нормали к параболоиду – уравнениями

$$x = \delta x - zr\delta x, \qquad y = \delta y - zt\delta y, \tag{15.20}$$

из которых следует, что угол $\delta\nu$ между линией луча (15.19) и соответствующей нормалью (15.20) представим в виде

$$\delta\nu = n\delta l, \quad \text{где} \quad \delta l = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2} \tag{15.21}$$

(δl, как и прежде, означает малый отрезок BB_δ) и что плоскость этого угла $\delta\nu$, или, иначе, плоскость, в которой лежат линия луча и нормаль, определяется уравнением

$$x\delta x + y\delta y = \delta l^2 - z(r\delta x^2 + t\delta y^2). \tag{15.22}$$

Следовательно, в этой плоскости лежит и прямая, задаваемая уравнениями

$$x\delta x + y\delta y = 0, \quad z = \frac{\delta l^2}{r\delta x^2 + t\delta y^2}, \tag{15.23}$$

т.е. ось соприкасающейся окружности кривизны нормального, или диаметрального, сечения параболоида, элементом которого является отрезок δl. Таким образом, *нормаль может быть совмещена с линией луча путем поворота вокруг элемента* δl *на угол* $\delta\nu$, *пропорциональный* δl *и равный элементу* δl, *умноженному на постоянную* n (направление вращения зависит от знака постоянной). Этот простой закон отклонения конечных линий лучей от нормалей параболоида позволяет нам

назвать параболоид ***направляющей поверхностью***, а постоянную n – ***постоянной девиации***. Можно считать, что теория направляющего параболоида и постоянной девиации содержит адекватное решение нашей третьей общей задачи, возникающей при рассмотрении геометрических соотношений бесконечно близких лучей, поскольку эта теория адекватно передает общее расположение конечной системы линий лучей (15.5) и геометрический смысл третьего класса коэффициентов (14.14), а именно: $\delta\alpha/\delta x$, $\delta\alpha/\delta y$, $\delta\beta/\delta x$, $\delta\beta/\delta y$.

Вытекающее из этой теории геометрическое построение может быть еще больше упрощено, если заметить, что все бесконечно близкие нормали к ведущей поверхности проходят через две взаимно перпендикулярные прямые, а именно через оси двух главных кругов кривизны поверхности. Следовательно, достаточно провести через любую заданную точку B_δ две плоскости, содержащие соответственно эти две оси кривизны, а затем повернуть линию пересечения плоскостей вокруг данного малого отрезка δl, или BB_δ, на такой же малый угол $n\delta l$, как и прежде, чтобы получить искомую конечную линию луча при заданной конечной точке [12].

Наконец, чтобы сравнить, как это требуется в *четвертой* задаче, начальную систему линий лучей (15.6) с соответствующими конечными точками B_δ на данной конечной плоскости, мы можем сопоставить этим начальным линиям лучей уравнения

$$x' = z'\delta\vartheta'\cos\varphi', \quad y' = z'\delta\vartheta'\sin\varphi'. \tag{15.24}$$

Если положить

$$\delta\alpha' = \delta\vartheta'\cos\varphi', \quad \delta\beta' = \delta\vartheta'\sin\varphi' \tag{15.25}$$

и аналогичным образом

$$\delta x = \delta l\cos\varphi, \qquad \delta y = \delta l\sin\varphi, \tag{15.26}$$

то получим следующие соотношения между φ, φ', δl, $\delta\vartheta'$ и четвертым множеством частных производных (14.14):

$$\delta\vartheta'\cos\varphi' = \left(\frac{\delta\alpha'}{\delta x}\cos\varphi + \frac{\delta\alpha'}{\delta y}\sin\varphi\right)\delta l, \qquad \delta\vartheta'\sin\varphi' = \left(\frac{\delta\beta'}{\delta x}\cos\varphi + \frac{\delta\beta'}{\delta y}\sin\varphi\right)\delta l. \tag{15.27}$$

Из этих соотношений следует, что

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{\delta\beta'/\delta x + (\delta\beta'/\delta y)\operatorname{tg}\varphi}{\delta\alpha'/\delta x + (\delta\alpha'/\delta y)\operatorname{tg}\varphi}. \tag{15.28}$$

Тем самым они позволяют нам определять при любом заданном значении φ, т.е. при любом заданном направлении малого конечного отрезка δl или BB_δ, соответствующее значение φ', т.е. направление начальной плоскости линий лучей, описываемых уравнением

$$y' = x'\operatorname{tg}\varphi'. \tag{15.29}$$

Таким образом, конечная линия δl и начальная плоскость φ' поворачиваются вместе [13], но, вообще говоря, не с одинаковой быстротой, и произвольные взаимно пер-

пендикулярные направления одной в общем случае не соответствуют взаимно перпендикулярным положениям другой, поскольку из условий

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\delta\beta'/\delta x + (\delta\beta'/\delta y)\operatorname{tg}\varphi_1}{\delta\alpha'/\delta x + (\delta\alpha'/\delta y)\operatorname{tg}\varphi_1}, \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\delta\beta'/\delta x + (\delta\beta'/\delta y)\operatorname{tg}\varphi_2}{\delta\alpha'/\delta x + (\delta\alpha'/\delta y)\operatorname{tg}\varphi_2},$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2, \quad \varphi_2' = \varphi_1' + \pi/2 \tag{15.30}$$

(где π – длина полуокружности единичного радиуса) следует, что угол φ_1 должен удовлетворять соотношению

$$2\left(\frac{\delta\beta'}{\delta x}\frac{\delta\beta'}{\delta y} + \frac{\delta\alpha'}{\delta x}\frac{\delta\alpha'}{\delta y}\right)\operatorname{ctg}2\varphi_1 = \left(\frac{\delta\beta'}{\delta x}\right)^2 - \left(\frac{\delta\beta'}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta\alpha'}{\delta x}\right)^2 - \left(\frac{\delta\alpha'}{\delta y}\right)^2, \tag{15.31}$$

которое, вообще говоря, не выполняется при произвольных значениях этого угла. Но и в общем случае существуют два определяемых соотношением (15.31) взаимно перпендикулярных конечных направления, которые соответствуют двум перпендикулярным начальным плоскостям. Приняв эти взаимно перпендикулярные направления и плоскости соответственно за направления осей x, y и плоскости $x'z'$, $y'z'$, мы получим

$$\delta\alpha'/\delta y = 0, \quad \delta\beta'/\delta x = 0. \tag{15.32}$$

В общем случае при подходящем выборе полуосей координат мы можем одновременно удовлетворить и другим условиям, а именно:

$$\frac{\delta\beta'}{\delta y} > 0, \quad \frac{\delta\alpha'}{\delta x} > \frac{\delta\beta'}{\delta y}. \tag{15.33}$$

При таком выборе координат соотношения (15.27) упрощаются и принимают вид

$$\delta\vartheta'\cos\varphi' = \frac{\delta\alpha'}{\delta x}\delta l\cos\varphi, \quad \delta\vartheta'\sin\varphi' = \frac{\delta\beta'}{\delta y}\delta l\sin\varphi, \tag{15.34}$$

в то время как уравнения (15.6) начальных линий лучей сводятся к уравнениям

$$x' = z'\frac{\delta\alpha'}{\delta x}\delta x, \quad y' = z'\frac{\delta\beta'}{\delta y}\delta y. \tag{15.35}$$

Это означает, что если начальные линии лучей образуют круговой конус, имеющий уравнение

$$x'^2 + y'^2 = z'^2\delta\vartheta'^2, \tag{15.36}$$

то соответствующее геометрическое место конечных точек B_δ на конечной плоскости xy в общем случае имеет вид не окружности, а эллипса, задаваемого уравнением

$$\left(\frac{\delta\alpha'}{\delta x}\right)^2\delta x^2 + \left(\frac{\delta\beta'}{\delta y}\right)^2\delta y^2 = \delta\vartheta'^2. \tag{15.37}$$

В силу неравенств (15.33) ось x совпадает с малой, а ось y – с большой осью эллипса. Наоборот, если геометрическое место конечных точек есть окружность,

описываемая уравнением

$$\delta x^2 + \delta y^2 = \delta l^2, \qquad (15.38)$$

то конус начальных линий лучей определяется уравнением

$$x'^2\left(\frac{\delta\alpha'}{\delta x}\right)^{-2} + y'^2\left(\frac{\delta\beta'}{\delta y}\right)^{-2} = z'^2\,\delta l^2, \qquad (15.39)$$

поэтому сечения, перпендикулярные его оси, имеют вид эллипсов, большие оси которых лежат в плоскости $x'z'$, а малые – в плоскости $y'z'$. Ясно, что окружность, равная конечной окружности (15.38), может быть получена из эллиптического конуса (15.39) при сечении его любой из следующих четырех плоскостей:

$$z' = \pm\left(\frac{\delta\alpha'}{\delta x}\right)^{-1} \pm y'\left[\left(\frac{\delta\alpha'}{\delta x}\right)^{2}\left(\left(\frac{\delta\beta'}{\delta y}\right)^{-2} - 1\right)\right]^{1/2}, \qquad (15.40)$$

и аналогичным образом все четыре эллиптических сечения кругового конуса (15.36) теми же четырьмя плоскостями одинаковы и подобны конечному эллипсу (15.37). В общем случае, исходя из уравнений начальных линий лучей (15.35), нетрудно доказать, что если геометрическое место конечных точек B_δ по предположению задано уравнением

$$\delta y = f(\delta x), \qquad (15.41)$$

то соответствующий начальный конус

$$\frac{y'}{z'}\left(\frac{\delta\beta'}{\delta y}\right)^{-1} = f\left(\frac{x'}{z'}\left(\frac{\delta\alpha'}{\delta x}\right)^{-1}\right) \qquad (15.42)$$

имеет четыре сечения, равных и подобных геометрическому месту конечных точек, а именно сечения четырьмя плоскостями (15.40). Следовательно, их можно считать *четырьмя направляющими плоскостями* для исходного луча, так как *каждая из них содержит при любой заданной конечной кривой, или геометрическом месте* (15.41) *конечных точек B_δ, равную и подобную направляющую кривую, или геометрическое место, являющуюся сечением искомого начального конуса и позволяющую тем самым определить его.* Зная эти четыре *направляющие плоскости* или любую из них и соответствующую систему конечных и начальных взаимно перпендикулярных направлений, или *сопряженных направляющих осей*, два из которых определяются направляющей плоскостью, мы можем построить начальную линию луча или начальный конус, соответствующие любому заданному положению конечной точки B_δ или геометрическому месту конечных точек. Тем самым четвертая и последняя основная задача из числа задач, сформулированных нами выше, может считаться решенной с помощью теории направляющих плоскостей и направляющих осей.

Мы видим, что для полного сравнения конечных и начальных направлений любых двух близких путей света

$$(A, B)_\chi, \qquad (A', B')_{\chi+\delta\chi},$$

где A – начальная, B – конечная точка данного пути, A' – любая другая начальная, а B' – любая другая конечная точка, бесконечно близкая соответственно к точке A и B, необходимо и достаточно знать следующие геометрические *элементы расположения* или эквивалентные им данные:

1) конечную и начальную оси хроматической дисперсии, а также соответствующие конечные и начальные постоянные ξ, ξ' с надлежащими знаками, дабы определить направления и величины дисперсии;

2) конечную и начальную оси кривизны данного пути света;

3) конечную и начальную пару осей кривизны направляющих параболоидов на концах данного пути света, а также конечные и начальные постоянные девиации n, n';

4) направляющую плоскость начальных линий лучей и направляющую плоскость конечных линий лучей вместе с конечной и начальной системой взаимно перпендикулярных направлений, или сопряженных осей, связанных с этими направляющими плоскостями.

Коль скоро эти различные элементы конечных и начальных линий лучей известны, мы можем извлечь из них зависимость $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\alpha'$, $\delta\beta'$ или, более общо, $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, $\delta\alpha'$, $\delta\beta'$, $\delta\gamma'$ от δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$. Наоборот, если последняя зависимость выведена из частных производных характеристической функции или связанных с ней функций, то, зная ее, мы можем определить упомянутые выше геометрические элементы.

Приложение элементов относительного расположения лучей. Связь двух вергенций, конечной и начальной, плоскости вергенции и направляющих линий с двумя главными кривизнами и плоскостями кривизны направляющего параболоида и с постоянной девиации. Плоскости кривизны как плоскости предельной проекции конечной и начальной линий лучей

16. В качестве примера приложения геометрических элементов расположения [лучей] воспользуемся ими для определения *условий пересечения двух близких конечных линий лучей*, соответствующих данному цвету и данному источнику света. Предположим для простоты, что одна из этих двух прямых линий лучей является конечным участком данного пути света $(A, B)_\chi$ или совпадает с касательной, проведенной к нему в конечной точке, а другая соответствует (как в третьей из предыдущих задач) конечной точке B_δ на данной конечной плоскости, перпендикулярной данному пути в точке B. Тогда если постоянная девиации n равна нулю, вследствие чего конечные линии лучей совпадают с нормалями к направляющему параболоиду, то условие пересечения, как нетрудно видеть, требует, чтобы близкая точка B_δ принадлежала одной из двух главных диаметральных плоскостей, т.е. находилась на одной из двух взаимно перпендикулярных касательных к линиям кривизны на поверхности параболоида, и соответствующая точка пересечения должна быть одним из двух центров кривизны. Если же постоянная n отлична от нуля, то отклонение линий лучей от нормалей вынуждает нас внести надлежащие изменения в предыдущее утверждение. Близкая линия луча пересекает данную

линию луча не в направлениях линий кривизны, а в других направлениях (если таковые имеются), для которых угловое отклонение $n\delta l$ линии луча от нормали равно и противоположно угловому отклонению нормали от соответствующей плоскости нормального сечения, т.е. от соответствующей плоскости диаметрального сечения направляющего параболоида. Как явствует из общих свойств нормалей, последнее отклонение с точностью до знака равно полуразности кривизн, умноженной на элемент нормального сечения δl и синус удвоенного угла наклона этого элемента к любой из линий кривизны. Следовательно, это отклонение не может уничтожить отклонение $n\delta l$ линии луча от нормали, за исключением того случая, когда полуразность двух главных кривизн параболоида по абсолютной величине больше или по крайней мере не меньше постоянной девиации n. Именно в этом и состоит необходимое условие пересечения. В тех же случаях, когда полуразность кривизн по абсолютной величине больше чем n, существуют два различных направления P_1 и P_2 нормали, или диаметральной плоскости сечения, симметрично расположенные относительно двух главных плоскостей кривизны и такие, что если элемент сечения δl принадлежит любой из двух плоскостей P_1 или P_2 (утверждение неверно, если элемент δl принадлежит любой нормальной плоскости), то соответствующая линия луча, проведенная из конца элемента, лежит в той же нормальной плоскости P_1 или P_2 и, как и требуется, пересекает данную линию луча. Точка пересечения этих двух близких линий лучей есть центр кривизны соответствующего нормального сечения, поэтому мы можем назвать кривизны этих двух диаметральных сечений двумя *вергенциями* конечных линий лучей, а две соответствующие плоскости P_1 и P_2 – *двумя плоскостями вергенций* [14].

К тем же выводам можно прийти и алгебраическим путем из уравнений (15.19), приводящих к следующим условиям пересечения близкой линии луча с данной линией луча, или осью z:

$$(z^{-1} - r)\delta x - n\delta y = 0, \qquad (z^{-1} - t)\delta y + n\delta x = 0, \tag{16.1}$$

где z – ордината пересечения, которую требуется найти, в силу чего z^{-1} – вергенция. Исключая z^{-1}, мы получаем для определения отношения δx к δy, т.е. направления элемента δl, квадратное уравнение

$$(t - r)\delta x\delta y = n(\delta y^2 + \delta x^2), \tag{16.2}$$

которое можно представить в виде

$$\sin 2\varphi = 2n/(t - r), \tag{16.3}$$

где, как и в (15.26), φ – угол наклона элемента δl к оси x, т.е. к одной из касательных к линиям кривизны; r, t – две кривизны направляющего параболоида. Следовательно, в зависимости от того, какое из соотношений

$$\left(\frac{t-r}{2}\right)^2 > n^2, \quad \left(\frac{t-r}{2}\right)^2 = n^2 \quad \text{или} \quad \left(\frac{t-r}{2}\right)^2 < n^2 \tag{16.4}$$

выполняется, число вещественных направлений элемента δl равно двум, одному или нулю. Таким образом, мы снова приходим к тем же условиям вещественности и

такому же симметричному расположению двух плоскостей вергенции, которые мы получили раньше с помощью рассуждений более геометрического характера. К тем же условиям приводит и рассмотрение квадратного уравнения для вергенции

$$(z^{-1} - r)(z^{-1} - t) + n^2 = 0, \tag{16.5}$$

которое следует из уравнений (16.1) и показывает, что сумма и произведение двух вергенций могут быть выражены через кривизны r, t и постоянную девиации n:

$$z_1^{-1} + z_2^{-1} = r + t, \quad z_1^{-1} z_2^{-1} = rt + n^2. \tag{16.6}$$

Кроме того, исключив из уравнений (16.1) постоянную n, получим

$$z^{-1} = r \cos^2\varphi + t \sin^2\varphi. \tag{16.7}$$

Мы видим, как и прежде, что две вергенции (если они вещественны) конечных линий луча являются кривизнами двух соответствующих сечений направляющего параболоида. В общем случае центр кривизны любого сечения этой поверхности нормальной плоскостью, проведенной через данную линию луча, является общим *фокусом вследствие проектирования* всех близких линий лучей из точек этого сечения, т.е. все проекции близких линий лучей на указанную плоскость проходят через центр кривизны. *Две взаимно перпендикулярные плоскости кривизны, или главные диаметральные плоскости, направляющего параболоида уместно поэтому назвать плоскостями крайней проекции.* Именно с этой точки зрения они были рассмотрены в "Первом дополнении" для случая однородной среды и были представлены как пара *естественных координатных плоскостей*, проходящих через любой данный прямой луч. Две плоскости вергенции для случая прямых конечных лучей также были рассмотрены в "Первом дополнении" в связи с двумя развертывающимися пучками, или поверхностями лучей, проходящими через данный прямой луч: две касательные плоскости к таким поверхностям содержат бесконечно близкие лучи и, следовательно, совпадают с двумя плоскостями вергенции.

Если плоскости вергенции вещественны и различны, то независимо от того, прямолинейны или искривлены конечные лучи, существуют две *направляющие линии* [15], перпендикулярные данной линии луча. Каждую из этих линий пересекают все близкие линии лучей, идущих из точек B_δ на данной конечной плоскости xy. Следовательно, направляющих линий достаточно для того, чтобы определить геометрическое расположение и соотношения системы конечных линий лучей. Для доказательства существования и определения положения двух направляющих линий выясним, какие условия необходимы и достаточны для того, чтобы прямая, задаваемая уравнениями

$$y = x \operatorname{tg} \Phi, \quad z = Z, \tag{16.8}$$

пересекалась со всеми близкими конечными линиями лучей системы (15.19). Такими условиями служат соотношения

$$Z^{-1} = r + n \operatorname{ctg} \Phi = t - n \operatorname{tg} \Phi. \tag{16.9}$$

Из них следует, что

$$\sin 2\Phi = 2n/(t - r) \qquad (16.10)$$

и

$$(Z^{-1} - r)(Z^{-1} - t) + n^2 = 0. \qquad (16.11)$$

Если

$$(t - r)^2 > 4n^2, \qquad (16.12)$$

т.е. если вещественны две вергенции, то существуют две вещественные направляющие линии того самого рода, о котором говорилось выше. Эти две направляющие линии лежат в плоскостях вергенции и пересекают конечную линию луча в тех же двух точках, в которых ее пересекают другие линии лучей той же системы. Пересечение каждой направляющей линии с данной линией луча является точкой схождения или расхождения близких линий луча, лежащих в плоскости вергенции, которой принадлежит другая направляющая линия. Если постоянная девиации n равна нулю, то эти направляющие линии обязательно вещественны и являются осями двух главных кругов кривизны направляющего параболоида. В тех случаях, когда конечные лучи прямолинейны, независимо от того, равна ли нулю или отлична от нуля постоянная девиации n, *две направляющие линии* (если они вещественны) *являются касательными к двум каустическим поверхностям* (*т.е. к двум поверхностям, которых касаются конечные лучи*) *и геометрическими местами двух точек вергенции.* Если же направляющие линии мнимые, то точки вергенции также мнимые и конечные лучи перестают быть касательными к общей для всей поверхности. К резюме теории каустических и линейчатых поверхностей мы еще вернемся в дальнейшем.

Если выполняется соотношение

$$t - r = \pm 2n, \qquad (16.13)$$

но ни $t - r$, ни n не равны нулю в отдельности, то обе плоскости вергенции сливаются в одну плоскость, делящую пополам одну пару прямых углов, образуемых двумя главными плоскостями кривизны направляющего параболоида. Две вергенции вырождаются в одну, которая отвечает этой единственной плоскости и равна полусумме двух кривизн той же поверхности, а две направляющие линии сливаются в одну направляющую линию, проходящую через соответствующую точку вергенции или дивергенции, и также обладает свойством пересекаться со всеми близкими конечными линиями лучей, хотя само по себе это свойство недостаточно для того, чтобы определить систему линий лучей.

Но если правая и левая части соотношения (16.13) равны нулю в отдельности, т.е. если равны нулю разность кривизн и постоянная девиации, то направляющий параболоид является поверхностью вращения с вершиной в данной конечной точке B, а все близкие конечные линии – нормали к этому параболоиду вращения и (в том же приближении) к соприкасающейся сфере в его вершине, причем все нормали проходят через центр соприкасающейся сферы. Наоборот, если существует одна точка $0, 0, Z$, через которую проходят все конечные линии лучей, то уравнения

(15.19) приводят к соотношениям

$$n = 0, \quad t = r = Z^{-1} \tag{16.14}$$

и из более общих уравнений (15.5) с произвольно выбранными осями прямоугольных координат x и y мы получаем

$$\frac{\delta\alpha}{\delta x} = \frac{\delta\beta}{\delta y} = -Z^{-1}, \quad \frac{\delta\alpha}{\delta y} = 0, \quad \frac{\delta\beta}{\delta x} = 0, \tag{16.15}$$

т.е. (с учетом соотношений (14.7) или (14.3))

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x^2} + Z^{-1}\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha^2} = \frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha\delta x},$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y} + Z^{-1}\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha\delta\beta} = \frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha\delta y} = \frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\beta\delta x},$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta y^2} + Z^{-1}\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\beta^2} = \frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\beta\delta y}. \tag{16.16}$$

Если конечные лучи прямые и удовлетворяют условиям (16.16), которые в этом случае сводятся к следующим:

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x^2} + Z^{-1}\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha^2} = 0, \quad \frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y} + Z^{-1}\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha\delta\beta} = 0, \quad \frac{\delta^2 V}{\delta y^2} + Z^{-1}\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\beta^2} = 0, \tag{16.17}$$

то данный конечный луч становится одним из тех, которые мы в предыдущих мемуарах называли *главными лучами*, а точка вергенции или дивергенции 0, 0, Z – тем, что мы называли *главным фокусом*.

Второе приложение элементов. Относительное расположение линий лучей из наклонной плоскости, близких к конечной и начальной линиям. Обобщение теории направляющего параболоида и постоянной девиации. Общая теория прогибов поверхностей. Окружности и оси прогиба. Взаимно перпендикулярные плоскости и оси экстремального прогиба. Линии прогиба, проходящие через эти оси и имеющие центры прогиба своими центрами проекции. Сопряженные плоскости прогиба и индикаторный цилиндр прогиба

17. Предыдущие теоремы относительно взаимосвязей между конечными линиями лучей предполагают, что близкая конечная точка B_δ находится на данной плоскости, перпендикулярной данному пути света $(A, B)_\chi$ в данной конечной точке B. Однако аналогичные теоремы могут быть доказаны и для более общего случая, когда близкая конечная точка B' лежит не в данной перпендикулярной плоскости. Для доказательства достаточно воспользоваться комбинацией решений второй и третьей из четырех основных задач, введенных нами выше, т.е. рассмотреть совместно второе и третье множество коэффициентов (14.14), или, что то же,

следующие уравнения для конечной линии луча:

$$x = \delta x + z\left(\frac{\delta\alpha}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\alpha}{\delta y}\delta y + \frac{\delta\alpha}{\delta z}\delta z\right),$$

$$y = \delta y + z\left(\frac{\delta\beta}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\beta}{\delta y}\delta y + \frac{\delta\beta}{\delta z}\delta z\right). \qquad (17.1)$$

Если в этих уравнениях не налагать никакого соотношения между $\delta x, \delta y$ и δz, то система конечных линий лучей (17.1) есть то, что было названо (в моей "Теории систем лучей") системой третьего класса [[16]], поскольку уравнения линии луча в этой системе содержат *три* произвольных элемента положения, а именно координаты $\delta x, \delta y$, δz близкой точки B'. Но для того, чтобы нам было удобнее изучать общие свойства полной системы третьего класса, мы разложим ее на *частные системы второго класса*, т.е. на системы, содержащие лишь два произвольных элемента положения, предположив, что между тремя координатами $\delta x, \delta y$, δz существует некоторое соотношение, зависящее от произвольного параметра, т.е., иначе говоря, что геометрическим местом близких точек B' служит некоторая произвольная и изменяемая поверхность. Например, в качестве такого геометрического места мы можем принять наклонную плоскость, проходящую через данную точку B и определяемую уравнением

$$\delta z = p\delta x + q\delta y, \qquad (17.2)$$

в котором один из двух параметров p, q произволен, а другой зависит от него по некоторому заранее заданному закону. При каждом предположении о том, что геометрическое место [конечных точек B'] является наклонной плоскостью (17.2), необходимо рассмотреть частную систему второго класса, выводимую из полной системы третьего класса (17.1) и содержащуюся в ней, а именно систему, в которой уравнения линии луча имеют вид

$$x = \delta x + z\left(\frac{\delta\alpha}{\delta x} + p\frac{\delta\alpha}{\delta z}\right)\delta x + z\left(\frac{\delta\alpha}{\delta y} + q\frac{\delta\alpha}{\delta z}\right)\delta y,$$

$$y = \delta y + z\left(\frac{\delta\beta}{\delta x} + p\frac{\delta\beta}{\delta z}\right)\delta x + z\left(\frac{\delta\beta}{\delta y} + q\frac{\delta\beta}{\delta z}\right)\delta y. \qquad (17.3)$$

Итак, рассмотрим геометрическое расположение и свойства системы конечных лучей (17.3), когда в качестве геометрического места конечных точек B' выбрана наклонная плоскость (17.2).

Система (17.3) линий лучей, идущих из произвольной наклонной плоскости (17.2), в частности, включает в себя систему лучей, идущих из плоскости без наклона, т.е. систему (15.5), рассмотренную в предыдущем разделе. Было установлено, что существует замечательная связь между линиями лучей менее общей системы (15.5) и направляющим параболоидом (15.9), касающимся выбранной в качестве геометрического места близких конечных точек B_δ данной плоскости и удовлетворяющим дифференциальному условию второго рода (15.8). Можно показать, что линии

лучей более общей системы (17.3) аналогичным образом связаны с более общим параболоидом, который удовлетворяет тому же дифференциальному условию (15.8) и касается геометрического места более общего вида (наклонной плоскости (17.2)) в данной конечной точке B:

$$z = px + qy + \tfrac{1}{2}rx^2 + sxy + \tfrac{1}{2}ty^2, \tag{17.4}$$

где p и q сохраняют свой прежний смысл, а коэффициенты r, s, t определяются выражениями

$$r = -\left(\frac{\delta\alpha}{\delta x} + p\frac{\delta\alpha}{\delta z}\right), \quad t = -\left(\frac{\delta\beta}{\delta y} + q\frac{\delta\beta}{\delta z}\right),$$

$$s = -\frac{1}{2}\left(\frac{\delta\beta}{\delta x} + \frac{\delta\alpha}{\delta y} + p\frac{\delta\beta}{\delta z} + q\frac{\delta\alpha}{\delta z}\right). \tag{17.5}$$

Но для того, чтобы установить эту более общую связь между линиями лучей (17.3) и параболоидом (17.4), полезно предварительно доказать некоторые общие теоремы относительно прогибов искривленных поверхностей. В качестве частных случаев они содержат и некоторые известные теоремы о кривизнах и плоскостях кривизны.

Рассмотрим параболоид (17.4) или какую-нибудь другую искривленную поверхность, имеющую в начале координат полное касание с параболоидом (17.4) и, следовательно, представимую тем же уравнением, т.е., иначе говоря (если принять во внимание произвольное положение начала координат и произвольные коэффициенты p, q, r, s, t), любую поверхность непрерывной кривизны вблизи произвольно выбранной на ней точки. Касательная плоскость в этой произвольной точке или начале координат имеет уравнение

$$z = px + qy. \tag{17.6}$$

Уклонение, измеряемое от касательной плоскости в направлении произвольной оси z (которую мы будем называть *осью уклонения*) или в любом бесконечно близком направлении для точки B', бесконечно близкой к точке касания B, определяется выражением

$$\textit{Уклонение} = \tfrac{1}{2}\delta^2 z = \tfrac{1}{2}r\delta x^2 + s\delta x\delta y + \tfrac{1}{2}t\delta y^2. \tag{17.7}$$

Следовательно, уклонение так зависит от расстояния δl по перпендикуляру от близкой точки B' до оси прогиба и от направления плоскости, проходящей через эту точку и ось, что если положить, как в (15.26),

$$\delta x = \delta l \cos\varphi, \quad \delta y = \delta l \sin\varphi$$

и назвать *прогибом* (англ. deflexure по аналогии с известным термином curvature – кривизна) частную производную $\delta^2 z / \delta l^2$, т.е. двукратное уклонение, деленное на квадрат расстояния по перпендикуляру от оси уклонения, то получится следующая

зависимость *прогиба*, который мы обозначим буквой f, от угла φ:

$$\textit{Прогиб} = f = \frac{\delta^2 z}{\delta l^2} = r\cos^2\varphi + 2r\cos\varphi\sin\varphi + t\sin^2\varphi. \tag{17.8}$$

Следовательно, существуют ***две взаимно перпендикулярные плоскости экстремального прогиба***, соответствующие углам φ_1 и φ_2, которые определяются по формуле

$$\mathrm{tg}2\varphi = 2s/(r - t). \tag{17.9}$$

Приняв эти плоскости за координатные плоскости xz, yz и обозначив ***два экстремальных прогиба*** через f_1 и f_2, получим

$$r = f_1, \quad s = 0, \quad t = f_2, \tag{17.10}$$

и общая формула для прогиба примет вид

$$f = f_1\cos^2\varphi + f_2\sin^2\varphi. \tag{17.11}$$

Соотношение (17.11) аналогично известной формуле для кривизны нормального сечения и содержит последнюю в качестве частного случая. Подобно тому как обычно для каждой точки искривленной поверхности принято рассматривать систему кругов кривизны, а именно соприкасающиеся окружности нормальных сечений этой поверхности, мы можем теперь рассматривать более общую систему ***кругов прогиба***, а именно в каждой плоскости прогиба φ окружность, проходящую через данную точку поверхности и имеющую кривизну, равную прогибу f. Радиус этой окружности (или ордината ее центра), который можно назвать ***радиусом прогиба***, равен $1/f$, поэтому уравнения круга прогиба имеют вид

$$y = x\,\mathrm{tg}\varphi, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{2z}{f}. \tag{17.12}$$

Мы можем также назвать ***осью прогиба*** ось окружности (17.12), т.е. прямую, задаваемую уравнениями

$$y = -x\,\mathrm{ctg}\varphi, \quad z = \frac{1}{f}. \tag{17.13}$$

Нетрудно видеть, что существуют ***два главных круга прогиба***, аналогичных двум главным кругам кривизны, а именно окружности, задаваемые уравнениями:

первая: $y = 0, \quad x^2 + y^2 = 2z/f_1,$

вторая: $x = 0, \quad y^2 + z^2 = 2z/f_2,$ (17.14)

и две главные взаимно перпендикулярные оси прогиба:

первая: $x = 0, \quad z = 1/f_1;$ *вторая* $y = 0, \quad z = 1/f_2.$ (17.15)

Главные оси прогиба аналогичны главным осям кривизны, т.е. осям двух главных соприкасающихся окружностей нормальных сечений в менее общей теории нормалей. По аналогии с этой теорией, в которой все близкие нормали проходят через

две главные оси кривизны, можно рассматривать более общую систему прямых (мы будем называть их ***прямыми с уклоном***) вблизи произвольной оси уклонения. Все такие прямые проходят через две соответствующие оси прогиба и, следовательно, задаются уравнениями

$$x = \delta x - z f_1 \delta x, \qquad y = \delta y - z f_2 \delta x \tag{17.16}$$

(координаты выбраны, как прежде). В рассматриваемом приближении прямые с уклоном являются нормалями к геометрическому месту кругов прогиба (17.12), т.е. к поверхности четвертой степени

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{2z(x^2 + y^2)}{f_1 x^2 + f_2 y^2}, \tag{17.17}$$

и определяются либо этим условием, либо условием, согласно которому они в том же приближении являются нормалями к параболоиду

$$z = \tfrac{1}{2}(f_1 x^2 + f_2 y^2), \tag{17.18}$$

соприкасающемуся с геометрическим местом (17.17) кругов прогиба и обладающему тем свойством, что его ординаты указывают величину уклонений (17.7) данной поверхности.

Прямая с уклоном системы (17.16) принадлежит соответствующей плоскости прогиба

$$y \delta x = x \delta y, \tag{17.19}$$

если эта плоскость совпадает с любой из тех двух главных взаимно перпендикулярных плоскостей прогиба, которые мы приняли за координатные плоскости. В противном случае прямая с уклоном образует с плоскостью прогиба бесконечно малый угол $\delta\psi$, представимый следующим образом:

$$\delta\psi = \tfrac{1}{2}(f_1 - f_2)\delta l \sin 2\varphi. \tag{17.20}$$

Таким образом, этот угол равен полуразности экстремальных прогибов, умноженный на расстояние по перпендикуляру от оси прогиба и на синус удвоенного угла наклона φ этого перпендикуляра (или проходящей через него плоскости прогиба) к одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей экстремальных прогибов. В этом общем случае прямая с уклоном (17.16) не пересекает данную ось прогиба, которую мы приняли за ось z, но прямая с уклоном (17.16) всегда пересекает свою собственную ось прогиба (17.13) в точке, координаты которой можно представить в виде

$$x = -\frac{\delta\psi}{f}\sin\varphi, \qquad y = \frac{\delta\psi}{f}\cos\varphi, \qquad z = \frac{1}{f}, \tag{17.21}$$

где символы f, φ и $\delta\psi$ сохраняют свои прежние значения. Нетрудно также видеть, что если близкую прямую с уклоном спроектировать на соответствующую плоскость прогиба, то проекция пересечет ось прогиба в центре круга прогиба. Сле-

довательно, этот центр прогиба можно считать *фокусом вследствие проектирования, а плоскости экстремальных прогибов являются плоскостями крайних проекций.*

Изложенные выше результаты относительно прогибов и линий с уклоном искривленной поверхности вблизи любой данной точки на ней и при любой данной оси уклонения могут быть легко выражены общими формулами, распространяющимися на случай произвольного начала координат и произвольных осей координат. Если для простоты мы будем считать оси координат прямоугольными и выберем за начало координат данную точку на поверхности и ось уклонения за ось z, но оставим произвольными взаимно перпендикулярные плоскости координат xz и yz, так что коэффициент s в уравнении поверхности, вообще говоря, будет отличен от нуля, то уравнение прямой с уклоном примет вид

$$x = \delta x - z(r\delta x + s\delta y), \qquad y = \delta y - z(s\delta x + t\delta y), \tag{17.22}$$

поскольку уравнение параболоида (17.18) преобразуется к виду

$$z = \tfrac{1}{2} rx^2 + sxy + \tfrac{1}{2} ty^2 \tag{17.23}$$

(наши прямые с уклоном являются почти нормалями к этому параболоиду, а его ординаты задают величину уклонений (17.7) данной поверхности).

Прогиб для любой плоскости φ задается общей формулой (17.8), а круг и радиус прогиба – общими соотношениями (17.12), (17.13). Две главные плоскости прогиба φ_1 и φ_2, как и прежде, определяются формулой (17.9). Соответствующие экстремальные прогибы f_1 и f_2 мы находим как корни квадратного уравнения

$$f^2 - f(t + r) + rt - s^2 = 0. \tag{17.24}$$

Угловое отклонение $\delta\psi$ прямой с уклоном от плоскости прогиба вычисляется по формуле

$$\delta\psi = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)\sin(2\varphi - 2\varphi_1)\delta l = \left(\frac{r-t}{2}\sin 2\varphi - s\cos 2\varphi\right)\delta l. \tag{17.25}$$

Прежде чем мы перейдем к приложениям этих общих замечаний о прогибах поверхностей к той оптической задаче, которой посвящен этот раздел, т.е. к изучению связи между линиями лучей (17.3) и параболоидом (17.4), нельзя не упомянуть о том, что теория *индикатрис и сопряженных касательных к* поверхности, развитая г-ном Дюпеном в его превосходном труде "Développements de la géométrie"[6], может быть распространена с кривизн на прогибы. Действительно, если считать, что уклонение ($\tfrac{1}{2}\delta^2 z = \tfrac{1}{2} f\delta l^2$) в данном произвольном направлении z равно данной бесконечно малой величине второго порядка, т.е. если провести сечение данной поверхности плоскостью

$$z - px - qy = \tfrac{1}{2}\delta^2 z = \textit{Уклонение} = \text{const}, \tag{17.26}$$

---

[6] *Dupin Ch.* Développements de la géométrie. Paris: Courcier, 1813.

параллельной данной касательной плоскости (17.6) и бесконечно близкой к ней, то мы получим в общем случае плоскую кривую сечения, которую можно считать квадратичной, а именно *индикатрису*, рассмотренную г-ном Дюпеном. Оси индикатрисы своими направлениями и длинами характеризуют форму данной поверхности в окрестности данной точки, указывая ее кривизны и плоскости кривизны. Индикатриса лежит на *цилиндре второго порядка*, бесконечная ось которого совпадает с осью уклонения (мы будем называть его *индикатрисным цилиндром прогиба*):

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = \delta^2 z = \text{const}. \tag{17.27}$$

Нетрудно видеть, что две главные оси прогиба φ_1 и φ_2 являются главными диаметральными плоскостями индикатрисного цилиндра и что два главных прогиба f_1 и f_2, положительных или отрицательных, равны двукратному прогибу $\delta^2 z$, деленному соответственно на квадраты вещественных или мнимых полудиаметров, или полуосей, цилиндра, перпендикулярных к бесконечной оси. В общем случае положительный или отрицательный прогиб f, соответствующий любой плоскости прогиба φ, равен данному двукратному уклонению $\delta^2 z$, деленному на квадрат вещественного или мнимого полудиаметра цилиндра, лежащего в этой плоскости прогиба и перпендикулярного оси уклонения, т.е. бесконечной оси цилиндра. Отсюда следует, что для любых двух сопряженных диаметральных плоскостей φ_1 и φ_2, которые мы назовем *сопряженными плоскостями прогиба* и которые связаны соотношением

$$r + s(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi') + t\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\varphi' = 0, \tag{17.28}$$

сумма двух соответствующих сопряженных радиусов прогиба $1/f_1 + 1/f_2$ *постоянна и равна сумме двух экстремальных, или главных, радиусов, т.е.*

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}. \tag{17.29}$$

Соотношение (17.29) можно было бы также вывести из общего выражения для прогиба, при этом отпала бы необходимость использовать индикатрисный цилиндр. Заметим, что любые сопряженные плоскости прогиба, связанные соотношением (17.28), пересекают касательную плоскость к поверхности по двум сопряженным касательным того рода, который рассматривал г-н Дюпен.

Обратимся теперь снова к системе линий лучей (17.3), которые в силу соотношений (17.5) представимы в виде

$$x = \delta x - z(r\delta x + s\delta y) - zn\delta y, \qquad y = \delta y - z(s\delta x + t\delta y) + zn\delta x, \tag{17.30}$$

если положить

$$n = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta\beta}{\delta x} - \frac{\delta\alpha}{\delta y} + p\frac{\delta\beta}{\delta z} - q\frac{\delta\alpha}{\delta z}\right). \tag{17.31}$$

Сравним эти линии лучей и прямые с уклоном вспомогательного параболоида (17.4), задаваемые уравнениями (17.22)

$$x = \delta x - z(r\delta x + s\delta y), \qquad y = \delta y - z(s\delta x + t\delta y).$$

Из сравнения видно, что бесконечно малый угол отклонения $\delta\nu$ линии луча (17.30) от соответствующей прямой с уклоном (17.22) по-прежнему определяется той же формулой (15.21) $\delta\nu = n\delta l$, как и в более простой теории направляющего параболоида, изложенной в предыдущем разделе, т.е. угловое отклонение $\delta\nu$ по-прежнему равно расстоянию по перпендикуляру δl от близкой конечной точки до данной конечной линии луча, умноженному на постоянную девиации n. Плоскость этого угла $\delta\nu$, т.е. плоскость, в которой лежат линия луча (17.30) и прямая с уклоном (17.22), задана уравнением

$$x\delta x + y\delta y = \delta l^2 + (r\delta x^2 + 2s\delta x\delta y + t\delta y^2) \tag{17.32}$$

и, следовательно, содержит прямую, определяемую уравнениями

$$x\delta x + y\delta y = 0, \qquad z = \frac{\delta x^2 + \delta y^2}{r\delta x^2 + 2s\delta x\delta y + t\delta y^2}, \tag{17.33}$$

т.е. ось прогиба (17.13). Все эти результаты аналогичны приведенным в п. 15 (см. уравнения (15.22), (15.23)). Конечную линию луча (17.30) мы можем построить путем поворота по аналогии с тем, как это уже делалось, а именно вращая линию с уклоном (17.22), проходящую через две взаимно перпендикулярные оси прогиба вспомогательного параболоида (17.4), вокруг перпендикуляра δl на бесконечно малый угол $\delta\nu$, пропорциональный длине этого перпендикуляра. Мы видим, что изложенная в п. 15 теория направляющего параболоида и постоянной девиации для линий лучей, идущих от близких точек B_δ на перпендикулярной конечной плоскости, с небольшими изменениями распространяется на линии лучей, идущих от точек B' на наклонной конечной плоскости, проходящей через данную конечную точку, путем использования более общего вспомогательного параболоида и рассмотрения прогибов и прямых с уклоном вместо кривизн и нормалей. На этот более общий вспомогательный параболоид и на связанную с ним постоянную девиации мы можем перенести все, что говорилось в п. 16 относительно системы конечных линий, в частности рассуждения относительно фокусов вследствие проектирования и условия пересечения таких линий лучей. При любых данных значениях p, q, т.е. при любом данном положении наклонной плоскости (17.2), мы можем построить новый вспомогательный параболоид (17.4) и вычислить его новую постоянную девиации (17.31) по коэффициентам

$$\frac{\delta\alpha}{\delta x}, \quad \frac{\delta\beta}{\delta x}, \quad \frac{\delta\alpha}{\delta y}, \quad \frac{\delta\beta}{\delta y}, \quad \frac{\delta\alpha}{\delta z}, \quad \frac{\delta\beta}{\delta z}.$$

Таким образом, знание прежнего направляющего параболоида (15.9) и прежней постоянной девиации (15.11), а также величины и плоскости кривизны (15.3)

конечного луча позволяет свести теорию геометрического расположения и соотношений системы конечных линий лучей (17.3), идущих из наклонной плоскости (17.2), к теории *элементов относительного расположения*, изложенной в п. 15.

Построение нового вспомогательного параболоида (или соприкасающегося гиперболоида) и вывод новой постоянной девиации для линий лучей из наклонной плоскости по прежним элементам относительного расположения

18. Для построения нового вспомогательного параболоида (17.4) по прежним элементам относительного расположения можно воспользоваться тем, что новый параболоид не только касается данной наклонной плоскости (17.2) в данной конечной точке B исходного пути света, но и соприкасается по всем направлениям в данной точке с гиперболоидом

$$z = px + qy + \frac{1}{2} r_0 x^2 + s_0 xy + \frac{1}{2} t_0 y^2 - \frac{1}{2} z\left(x\frac{\delta\alpha}{\delta z} + y\frac{\delta\beta}{\delta z}\right), \tag{18.1}$$

где r_0, s_0, t_0 – конкретные значения

$$r_0 = -\frac{\delta\alpha}{\delta x}, \quad s_0 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\delta\alpha}{\delta y} + \frac{\delta\beta}{\delta x}\right), \quad t_0 = -\frac{\delta\beta}{\delta y} \tag{18.2}$$

коэффициентов r, s, t, которые получаются из общих выражений (17.5), если в них положить

$$p = 0, \quad q = 0, \tag{18.3}$$

т.е. перейти к случаю, когда плоскость не имеет наклона. Уравнение (15.9) направляющего параболоида при этом приводится к виду

$$z = \tfrac{1}{2} r_0 x^2 + s_0 xy + \tfrac{1}{2} t_0 y^2, \tag{18.4}$$

включающему в себя как частный случай уравнение (15.16). Верно и обратное утверждение: искомый параболоид (17.4) является единственным параболоидом с бесконечной осью, параллельной данной линии луча, соприкасающимся по всем направлениям в данной точке с гиперболоидом (18.1). Следовательно, достаточно построить этот соприкасающийся гиперболоид, чтобы получить искомый параболоид (17.4). Мы могли бы даже воспользоваться гиперболоидом как новой направляющей поверхностью для линий лучей, идущих из наклонной плоскости, вместо того чтобы прибегать к параболоиду, так как эти две соприкасающиеся поверхности обладают одинаковыми прогибами и линиями с уклоном вблизи данной точки соприкосновения.

Для того чтобы построить соприкасающийся гиперболоид (18.1) по наклонной плоскости (17.2) или (17.6) и по прежним элементам относительного расположения, т.е. по направляющему параболоиду (18.4) и по коэффициентам $\delta\alpha/\delta z$, $\delta\beta/\delta z$, определяющим величину и плоскость кривизны конечного луча, мы можем сравнить

искомый гиперболоид (18.1) с новым параболоидом

$$z = px + qy + \tfrac{1}{2}r_0x^2 + s_0xy + \tfrac{1}{2}t_0y^2, \qquad (18.5)$$

который можно назвать *сдвинутым направляющим параболоидом*, поскольку он равен и подобен направляющему параболоиду (18.4) и может быть получен, если последний перенести, не вращая, в такое новое положение, в котором он касается данной наклонной плоскости в данной точке. Пересечение гиперболоида (18.1) и параболоида (18.5) в общем случае состоит из эллипса или гиперболы на данной плоскости

$$z = 0, \qquad (18.6)$$

перпендикулярной данному конечному лучу, и параболы на плоскости

$$x\frac{\delta\alpha}{\delta z} + y\frac{\delta\beta}{\delta z} = 0, \qquad (18.7)$$

которая проходит через конечную линию луча, или касательную к лучу, и перпендикулярна конечной плоскости кривизны. Если эту конечную плоскость кривизны принять за плоскость xz (тогда ее уравнение примет вид

$$y = 0, \qquad (18.8)$$

а из (15.3) будет следовать, что

$$\delta\beta/\delta z = 0), \qquad (18.9)$$

то для двух кривых пересечения мы получим следующие уравнения: во-первых, для эллипса или гиперболы

$$z = 0, \quad px + qy + \tfrac{1}{2}r_0x^2 + s_0xy + \tfrac{1}{2}t_0y^2 = 0 \qquad (18.10)$$

и, во-вторых, для параболы

$$x = 0, \quad z = qy + \tfrac{1}{2}t_0y^2. \qquad (18.11)$$

Эти две кривые можно считать известными, так как они являются пересечениями двух известных плоскостей с известным направляющим параболоидом, сдвинутым в известное положение. Дабы проследить, насколько поверхность второго порядка ограничена условием, согласно которому она должна содержать эти две известные кривые, и выяснить, какие еще условия необходимы для того, чтобы эта поверхность стала искомым гиперболоидом, воспользуемся следующим общим видом уравнения поверхности второго порядка:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Iz + K = 0 \qquad (18.12)$$

и будем искать соотношения, ограничивающие это уравнение, когда описываемая им поверхность должна содержать две известные кривые. Если поверхность содержит параболу (18.11), то

$$K = 0, \quad H = -Iq, \quad E = 0, \quad C = 0, \quad B = -\tfrac{1}{2}It_0, \qquad (18.13)$$

т.е. одно лишь это условие сводит общее уравнение (18.12) к виду

$$z = qy + \frac{1}{2}t_0 y^2 - \frac{x}{I}(G + Fx + Dy + Ax). \qquad (18.14)$$

Для того чтобы менее общая поверхность второго порядка (18.14) содержала эллипс или гиперболу (18.10), необходимы и достаточны соотношения

$$G = -Ip, \quad D = -Is, \quad A = -\tfrac{1}{2}Ir_0. \qquad (18.15)$$

Следовательно, общее уравнение всех поверхностей второго порядка, которым одновременно принадлежат обе известные кривые (18.10), (18.11), содержит лишь один произвольный коэффициент и его можно представить в виде

$$z = px + qy + \tfrac{1}{2}r_0 x^2 + s_0 xy + \tfrac{1}{2}t_0 y^2 + \lambda xz. \qquad (18.16)$$

Это общее уравнение с произвольным коэффициентом λ соответствует сдвинутому направляющему параболоиду, т.е. поверхности (18.5), если

$$\lambda = 0. \qquad (18.17)$$

То же самое уравнение описывает (в силу (18.9)) искомый гиперболоид (18.1), если

$$\lambda = -\tfrac{1}{2}\delta\alpha / \delta z. \qquad (18.18)$$

Для того чтобы последнее условие представить в геометрическом виде, рассмотрим пересечение гиперболоида с третьей координатной плоскостью xz (по аналогии с тем, как мы рассматривали его пересечения с двумя взаимно перпендикулярными плоскостями xy и xz), т.е. с плоскостью кривизны (18.8) данного конечного луча. Таким пересечением является гипербола

$$y = 0, \quad z = px + \frac{1}{2}r_0 x^2 - \frac{1}{2}\frac{\delta\alpha}{\delta z}xz, \qquad (18.19)$$

а соответствующим пересечением для поверхности (18.16)

$$y = 0, \quad z = px + \tfrac{1}{2}r_0 x^2 + \lambda xz. \qquad (18.20)$$

Таким образом, условие (18.18) эквивалентно совпадению этих двух пересечений. Потребовав, чтобы поверхность второго порядка (18.12) содержала три кривые (18.10), (18.11), (18.19) в трех взаимно перпендикулярных координатных плоскостях, мы тем самым потребуем, чтобы она была искомым гиперболоидом (18.1). Задавать гиперболу (18.19) в качестве третьей кривой на этом гиперболоиде отнюдь не необходимо, хотя и достаточно, поскольку в общем случае, если мы знаем пересечения поверхности второго порядка с двумя известными плоскостями, то в уравнении этой поверхности остается лишь один неопределенный коэффициент, и пересечения с третьей известной плоскостью более чем достаточно, чтобы однозначно установить его. В рассматриваемой задаче, если пересечение (18.20) отлично от параболы

$$y = 0, \quad z = px + \tfrac{1}{2}r_0 x^2, \qquad (18.21)$$

т.е. если поверхность (18.16), содержащая две известные кривые (18.10), (18.11), отлична от известного сдвинутого направляющего параболоида, который содержит те же самые две кривые, то пересечение (18.20) с плоскостью кривизны луча в общем есть гипербола, касающаяся известной параболы (18.21) в известном начале координат и пересекающая эту параболу в известной точке оси x, т.е. на радиусе кривизны известного конечного луча, а именно в точке

$$x = -2p / r_0, \quad y = 0, \quad z = 0. \tag{18.22}$$

Гипербола (18.20) имеет также асимптоту, параллельную известной конечной линии луча, или оси z, а именно асимптоту, задаваемую уравнениями

$$x = 1/\lambda, \quad y = 0, \tag{18.23}$$

и полностью определена, если, помимо перечисленных выше свойств, нам известна прямая, параллельная ее другой асимптоте, задаваемой уравнениями

$$x = -2\left(\frac{\lambda}{r_0}\right)z - \frac{1}{\lambda} - \frac{2}{r_0}, \quad y = 0. \tag{18.24}$$

Гипербола (18.20) должна при этом совпадать с гиперболой (18.19), если только потребовать, чтобы вторая асимптота (18.24) была параллельна известной прямой

$$x = \frac{z}{r_0}\,\frac{\delta\alpha}{\delta z}, \quad y = 0 \tag{18.25}$$

с коэффициентом

$$\frac{1}{r_0}\,\frac{\delta\alpha}{\delta z} = \frac{\textit{Кривизна конечного луча}}{\textit{Прогиб направляющего параболоида}} \tag{18.26}$$

(плоскость прогиба r_0 есть плоскость кривизны луча). Мы видим, таким образом, что последнее условие (относительно направления второй асимптоты (18.24) гиперболического сечения (18.20)) достаточно (если его комбинировать с условиями принадлежности [рассматриваемой поверхности] двух известных кривых (18.10), (18.11)) для того, чтобы искомый гиперболоид (18.1) был полностью определен. При определении поверхности второго порядка условия принадлежности ей двух кривых (18.10), (18.11) не вполне различны и независимы, а их совместность невозможна, если две точки пересечения параболы (18.11) с осью y (т.е. с линией пересечения плоскостей двух кривых) – начало координат и точка

$$x = 0, \quad y = -2q / t_0, \quad z = 0 \tag{18.27}$$

не лежат на эллипсе или гиперболе (18.10). Но мы можем ограничиться последними выбранными нами условиями и рассматривать две известные кривые как линии пересечения гиперболоида с двумя известными плоскостями и принять известные направления для асимптот гиперболической линии пересечения с третьей известной плоскостью как адекватные и достаточно простые условия построения искомого гиперболоида, а тем самым и вспомогательного параболоида (17.4), с которым со-

прикасается гиперболоид. Что же касается новой постоянной девиации n, связанной со вспомогательным параболоидом, то общее выражение для нее (17.31) можно представить в виде

$$n = n_0 + \frac{1}{2} p \frac{\delta\beta}{\delta z} - \frac{1}{2} q \frac{\delta\alpha}{\delta z}, \tag{18.28}$$

где n_0 – частное значение:

$$n_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta\beta}{\delta x} - \frac{\delta\alpha}{\delta y} \right), \tag{18.29}$$

соответствующее плоскости без наклона, т.е. значению (15.11), связанному с направляющим параболоидом (15.9) в теории элементов относительно расположения, изложенной в предыдущем разделе. Следовательно, новую постоянную n можно определить геометрически как ординату z плоскости

$$z = px + qy + n_0, \tag{18.30}$$

параллельной данной наклонной плоскости (17.2) и проходящей через точку

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = n_0 \tag{18.31}$$

(вследствие чего эта плоскость пересекает ось z на расстоянии от начала координат, равном старой постоянной девиации n_0). Остальные координаты x, y, соответствующие ординате $z = n$, принимают значения

$$x = \frac{1}{2} \frac{\delta\beta}{\delta z}, \quad y = -\frac{1}{2} \frac{\delta\alpha}{\delta z}, \tag{18.32}$$

поэтому длина отрезка $\sqrt{x^2 + y^2}$ равна половине кривизны луча, а сам отрезок перпендикулярен радиусу кривизны.

Мы вдавались во все эти детали лишь для того, чтобы сделать более прозрачным предмет наших рассмотрений, связав его более тесно с геометрическими представлениями, однако новый вспомогательный параболоид и новую постоянную девиации можно считать достаточно определенными и с помощью их алгебраических выражений, приведенных выше.

Условие пересечения двух линий лучей, близких к конечной и начальной линиям. Коническое геометрическое место точек, близких к конечной, в неоднородной среде, удовлетворяющей условию пересечения. Исследования Малюса. Условие пересечения на примере теории вспомогательного параболоида для линий лучей, идущих из наклонной плоскости

19. Возвращаясь теперь к системе конечных линий лучей (17.3), идущих из наклонной плоскости (17.2), рассмотрим условие, необходимое для того, чтобы одна из близких конечных линий лучей (17.3) могла пересекать данную конечную линию луча, или ось z. Это условие может быть сразу же получено, если в уравнениях

(17.3) положить x и y равными нулю и исключить затем z. Следовательно, интересующее нас условие представимо в виде соотношения

$$\delta x\left\{\left(\frac{\delta\beta}{\delta x}+p\frac{\delta\beta}{\delta z}\right)\delta x+\left(\frac{\delta\beta}{\delta y}+q\frac{\delta\beta}{\delta z}\right)\delta y\right\}=\delta y\left\{\left(\frac{\delta\alpha}{\delta x}+p\frac{\delta\alpha}{\delta z}\right)\delta x+\left(\frac{\delta\alpha}{\delta y}+q\frac{\delta\alpha}{\delta z}\right)\delta y\right\}, \quad (19.1)$$

или, точнее (с учетом уравнения наклонной плоскости (17.2)),

$$\delta x\left(\frac{\delta\beta}{\delta x}\delta x+\frac{\delta\beta}{\delta y}\delta y+\frac{\delta\beta}{\delta z}\delta z\right)=\delta y\left(\frac{\delta\alpha}{\delta x}\delta x+\frac{\delta\alpha}{\delta y}\delta y+\frac{\delta\alpha}{\delta z}\delta z\right), \quad (19.2)$$

т.е.

$$\delta x\delta\beta=\delta y\delta\alpha. \quad (19.3)$$

Таким образом, *для искомого пересечения необходимо и достаточно, чтобы близкая конечная точка B′ принадлежала конической поверхности второго порядка,* задаваемой уравнением (19.2) между координатами $\delta x,\delta y,\delta z$. Коническую поверхность такого рода, по-видимому, впервые открыл Малюс. Этому превосходному математику и наблюдателю представился случай высказать в своем "Traité d'optique"[7] несколько замечаний относительно общих свойств системы прямых в пространстве, заданных уравнениями вида

$$\frac{x-x'}{m}=\frac{y-y'}{n}=\frac{z-z'}{o},$$

где m, n, o – заданные функции координат x', y', z' точки, через которую по предположению проходит прямая и которой она по предположению определяется. Малюс заметил, что условие пересечения заданной таким образом прямой с соответствующей близкой прямой, идущей из бесконечно близкой точки, выражается уравнением второго порядка между дифференциалами координат x', y', z', которое можно рассматривать как уравнение конической поверхности второго порядка – геометрического места бесконечно близких точек.

Развитая Малюсом теория систем лучей сильно отличается по форме и содержанию от теории, предложенной в настоящем "Дополнении", в частности потому, что в теории Малюса коэффициенты, задающие направление луча, оставались независимыми и не связанными между собой функциями, в то время как в нашей теории они, как показано выше, связаны между собой и выводятся с помощью единообразных методов из одной характеристической функции. Но одно лишь рассмотрение существования некоторых функциональных законов, связанных между собой или произвольных, зависимости коэффициентов m, n, o от координат x', y', z' или величин α, β, γ от координат x, y, z, как мы уже видели, легко приводит к конической поверхности типа (19.2). Этот же результат можно проиллюстрировать и на приведенной выше теории геометрических соотношений между близкими конечными линиями лучей, идущими от наклонной плоскости, и прямыми с уклоном

[7] *Malus E.* Traité d'optique // Mém. présentés Inst. par divers savans. Sci. math. et phys. 1811. T. 2. P. 214–302.

некоторого вспомогательного параболоида и некоторым законом постоянной девиации.

Действительно, согласно теории таких соотношений линия луча из близкой конечной точки B' на данной наклонной плоскости, проведенной через данную точку B, пересекает или не пересекает данную конечную линию луча из точки B в зависимости от того, компенсирует или не компенсирует отклонение $\delta\nu$ от его собственной прямой с уклоном девиацию $\delta\psi$ этой прямой с уклоном от соответствующей плоскости прогиба, ибо эти два отклонения должны быть равны по величине, но противоположны по направлению. Таким образом, условие пересечения представимо в виде равенства

$$\delta\nu + \delta\psi = 0, \qquad (19.4)$$

или, если вместо $\delta\nu$ и $\delta\psi$ мы подставим их выражения, выведенные в п. 17,

$$n = \frac{t-r}{2}\sin 2\varphi + s\cos 2\varphi, \qquad (19.5)$$

т.е.

$$n(\delta x^2 + \delta y^2) = (t-r)\delta x\delta y + s(\delta x^2 - \delta y^2). \qquad (19.6)$$

Условие пересечения (19.6), полученное при рассмотрении двух равных по величине и противоположных отклонений, если учесть смысл величин n, r, s, t, задаваемых соотношениями (17.5), (17.31), эквивалентно уравнению (19.1) и, следовательно, уравнению (19.2) конической поверхности второго порядка. Отсюда, а также из изложенного выше не столь общего геометрического метода нетрудно заключить, что две плоскости вергенции для линий лучей, идущих из наклонной плоскости (задаваемых соотношением (19.5) или (19.6) и аналогичных двум менее общим плоскостям вергенции, которые мы рассматривали в п. 16), пересекают наклонную плоскость по тем же двум линиям, по которым эта плоскость пересекает коническую поверхность второго порядка (плоскость проходит через вершину конуса), и что плоскости вергенции становятся мнимыми, когда наклонная плоскость не пересекает коническую поверхность.

Можно заметить, что пересечение наклонной плоскости с конусом или близкой конечной линии луча от наклонной плоскости с данной конечной линией луча невозможно, если постоянная девиации, соответствующая наклонной плоскости больше (по абсолютной величине) полуразности экстремальных прогибов вспомогательного параболоида, поскольку при этом становится невозможной компенсация двух отклонений $\delta\nu$ и $\delta\psi$: близкая линия луча всегда отклоняется от соответствующей прямой с уклоном больше, чем эта прямая с уклоном от соответствующей плоскости прогиба.

Когда же компенсация отклонений и, следовательно, пересечение линий становятся возможными вследствие того, что постоянная девиации оказывается меньше полуразности двух экстремальных прогибов, то две вещественные плоскости схождения близких конечных линий лучей располагаются симметрично относительно двух взаимно перпендикулярных плоскостей экстремального прогиба. По причинам, о которых мы уже упоминали, последние плоскости можно назвать плоскостями крайних проекций конечных линий лучей.

Другие геометрические примеры условия пересечения и элементов относительного расположения. Композиция частичных отклонений. Вращение вокруг оси кривизны конечного луча

20. Условие пересечения двух близких конечных линий лучом можно было бы продемонстрировать и вывести с помощью других геометрических соображений, на которых мы остановимся несколько подробнее, поскольку они помогут нам проиллюстрировать и усовершенствовать теорию элементов относительного расположения [лучей].

В п. 14 мы уже обращали внимание на то, что сравнение данного пути света $(A, B)_\chi$ с близким путем $(A', B')_{\chi+\delta\chi}$ в общем случае сводится к нескольким сравнениям в частных случаях, таких, как сравнение менее общих близких путей $(A, B_d)_\chi$, $(A, B_\delta)_\chi$ и других, вследствие линейности выражений (14.4) для вариаций $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\alpha'$, $\delta\beta'$ бесконечно малых направляющих косинусов, позволяющей нам рассматривать в отдельности одно за другим влияние вариаций начальных и конечных координат и цвета или влияния любых групп таких вариаций. Проведя на основе этого замечания *анализ*, мы свели общее рассмотрение геометрических соотношений между бесконечно близкими лучами к четырем менее общим задачам, которые были рассмотрены нами в п. 15.

Приложения (в п. 16) к вопросам, касающимся взаимных пересечений конечных линий лучей, идущих от конечной плоскости, перпендикулярной данному лучу, можно рассматривать как иллюстрацию к одной лишь третьей из четырех основных задач и следствий из нее. Вопросы же, которые мы рассматривали затем (относительно линий лучей от наклонной плоскости), требуют комбинации решений второй и третьей из четырех основных задач и, следовательно, служат примером *синтеза* тех элементов относительного расположения близких лучей, которые были установлены с помощью проведенного выше анализа. Однако в предыдущих разделах подобный синтез проводился *алгебраически* (а именно путем алгебраического сложения некоторых частных вариаций), хотя многие результаты были сформулированы геометрически и хорошо сочетались с геометрическими понятиями. Но *геометрическая* идея и *геометрический* метод синтеза элементов относительного расположения [лучей] могут быть получены, если рассмотреть в общем виде геометрическую структуру частных отклонений.

Разбиение отклонений на простейшие станет понятнее, если мы вспомним, что наша теория элементов относительного расположения лучей позволяет переходить от крайних направлений данного пути света $(A, B)_\chi$ к следующим четырем наборам близких крайних положений путем решения четырех задач, рассмотренных в п. 15.

Первый набор. Крайние направления близкого пути $(A, B)_{\chi+\delta\chi}$, имеющего те же начальную и конечную точки A и B, но отличающегося от исходного хроматической дисперсией.

Второй набор. Конечное направление пути $(A, B_d)_\chi$, т.е. исходного пути, продолженного до конца, и начальное направление $(A_d, B)_\chi$, т.е. того же пути, про-

долженного до начала. Эти близкие направления, начальное и конечное, в общем случае зависят от кривизны.

Третий набор. Конечное направление пути $(A, B_\delta)_\chi$ и начальное направление пути $(A_\delta, B)_\chi$ (малые отрезки AA_δ, BB_δ перпендикулярны данному пути в конечных точках).

Четвертый набор. Начальное направление пути $(A, B_\delta)_\chi$ и конечное направление пути $(A_\delta, B)_\chi$.

Мы видели также, что начальное направление пути $(A, B_d)_\chi$ и конечное направление пути $(A_d, B)_\chi$ не отличаются от направлений начального и конечного участков исходного пути света.

Если бы мы захотели применить эту теорию к определению конечного направления произвольного близкого пути $(A', B')_{\chi+\delta\chi}$, то нам следовало бы рассмотреть и образовать алгебраически или геометрически композицию следующих частных отклонений от данного конечного направления данного пути $(A, B)_\chi$: во-первых, хроматического отклонения конечного направления близкого пути $(A, B)_{\chi+\delta\chi}$ от данного конечного направления; во-вторых, отклонения кривизны конечного направления пути $(A, B_d)_\chi$; в-третьих, конечное отклонение пути $(A, B_\delta)_\chi$ следовало бы определить по теории направляющих плоскостей и сопряженных направляющих осей. Аналогичная композиция четырех частных отклонений потребовалась бы и для определения начального направления того же произвольного близкого пути $(A', B')_{\chi+\delta\chi}$.

Дабы образовать геометрически композицию четырех только что перечисленных частных отклонений конечной линии луча, можно поступить следующим образом. Каждое частное отклонение мы можем построить, проведя через данную конечную точку B соответствующую отклоненную конечную линию луча или параллельную ей линию. Проведенный отрезок будет мало отличаться по направлению от данной конечной линии луча, или оси z. Если его длину принять за единицу, то его малая проекция на данную конечную плоскость xy, которой он почти перпендикулярен, будет служить мерой величины и указывать направление отклонения. Если сложить все такие проекции по обычному геометрическому правилу сложения сил, то в результате получится проекция равного отрезка, задающего по направлению результирующее, или полное, отклонение. Аналогичным образом можно было бы сложить четыре частных отклонения близкой начальной линии луча.

Геометрический синтез частных отклонений может быть осуществлен и другими способами. Например, каждое частное отклонение вполне допустимо считать обусловленным соответствующим частным, или составляющим, вращением и складывать несколько таких вращений геометрическими методами, подходящими для такого сложения.

В частности, мы можем образовать композицию конечного отклонения кривизны с любым из других частных отклонений, повернув отклоненную линию луча, полученную без рассмотрения конечной кривизны луча, на бесконечно малый угол вокруг оси конечной кривизны, т.е. вокруг оси конечной соприкасающейся окружности данного конечного луча. При таком повороте проекция B_δ близкой конечной точки B' на конечной перпендикулярной плоскости перейдет в положение B', и при

том же повороте линия близкого конечного луча, полученная путем абстрагирования из конечной кривизны и принятия точки B_δ за конечную точку, перейдет одновременно в положение линии искомого луча, соответствующей конечной точке в B'.

Применяя эти общие принципы к частному вопросу относительно условия пересечения линий двух близких конечных лучей из двух близких конечных точек B, B' (показатель цвета χ и начальная точка A считаются общими и заданными), мы видим, что если проекция B_δ точки B известна, то небольшой проектирующий перпендикуляр $B'B_\delta$, или δz, и, следовательно, сама близкая точка B' могут быть в общем случае определены так, чтобы удовлетворялось условие пересечения, ибо линию конечного луча из B_δ в общем случае можно повернуть на бесконечно малый угол вокруг оси кривизны данного конечного луча в такое положение, в котором она пересекалась бы с линией данного конечного луча. Мы видим также, что угловая величина поворота и, следовательно, длина $\delta z = B_\delta B'$ зависят от положения проекции B_δ, т.е. от координат δx, δy, и что, следовательно, должна существовать какая-то определенная поверхность как геометрическое место близких конечных точек B', когда линия конечного луча из этой точки по предположению пересекает данную конечную линию луча.

Дабы исследовать форму этого геометрического места с помощью введенных выше геометрических понятий, можно заметить, что только одна точка (на линии близкого луча из B_δ, пересекающей после предполагаемого поворота линию данного конечного луча) есть точка, принадлежащая конечной плоскости кривизны данного конечного луча, и если мы назовем эту точку, в которой линия луча из B_δ пересекает заданную плоскость кривизны, точкой P, то угол поворота, который требуется найти, есть угол между линией BP и данной конечной линией луча, так как тот же самый бесконечно малый поворот, переводящий линию близкого конечного луча из B_δ, т.е. линию $B_\delta P$, в новое положение, в котором она пересекает данную конечную линию луча, совмещает линию BP с данной конечной линией луча. Переведя эти геометрические результаты на алгебраический язык и выбирая заданную конечную плоскость кривизны за плоскость xz, чтобы удовлетворить условию (18.9), мы находим следующие координаты точки P пересечения этой плоскости кривизны с линией луча (15.5) из B_δ:

$$x = \delta x - \frac{\delta y((\delta\alpha / \delta x)\delta x + (\delta\alpha / \delta y)\delta y)}{(\delta\beta / \delta x)\delta x + (\delta\beta / \delta y)\delta y}, \qquad y = 0,$$

$$z = \frac{-\delta y}{(\delta\beta / \delta x)\delta x + (\delta\beta / \delta y)\delta y}, \tag{20.1}$$

поэтому угол между прямой BP, соединяющей эту точку с началом координат, и данной конечной линией луча, или осью z, равен

$$\delta\vartheta = \left(-\frac{x}{z}\right) = \frac{1}{\delta y}\delta x\left(\frac{\delta\beta}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\beta}{\delta y}\delta y\right) - \left(\frac{\delta\alpha}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\alpha}{\delta y}\delta y\right), \tag{20.2}$$

и поскольку эта величина равна бесконечно малому углу поворота, т.е. малому отрезку δz, или $B_\delta B'$, умноженному на $\delta\alpha/\delta z$ или на конечную кривизну данного луча, взятую с надлежащим знаком, мы получаем следующее уравнение для геометрического места близкой точки B' при условии, что условие пересечения выполнено:

$$\frac{\delta\alpha}{\delta z}\delta z=\frac{1}{\delta y}\delta x\left(\frac{\delta\beta}{\delta x}\delta x+\frac{\delta\beta}{\delta y}\delta y\right)-\left(\frac{\delta\alpha}{\delta x}\delta x+\frac{\delta\alpha}{\delta y}\delta y\right). \tag{20.3}$$

Последнее есть не что иное, как уравнение приводившейся выше конической поверхности (19.2), только упрощенное с помощью условия (18.9), возникающего от выбора координат. Не производя этот выбор, мы могли бы легко вывести аналогичным образом уравнение (19.2) в виде

$$\delta z=\frac{\delta x((\delta\beta/\delta x)\delta x+(\delta\beta/\delta y)\delta y)-\delta y((\delta\alpha/\delta x)\delta x+(\delta\alpha/\delta y)\delta y)}{(\delta\alpha/\delta z)\delta y+(\delta\beta/\delta z)\delta x}, \tag{20.4}$$

где каждый член представляет собой бесконечно малый угол поворота, деленный на кривизну луча.

Еще один способ применения изложенных выше геометрических принципов к исследованию условия пересечения линий двух близких конечных лучей состоит в рассмотрении бесконечно малого угла, на который линия луча из B_δ отклоняется от плоскости, в которой лежат заданная конечная линия луча и близкая точка B_δ. Это угловое отклонение выражается числителем дроби (20.4), деленным на δl, т.е. деленным на малый отрезок BB_δ. Знаменатель той же самой дроби (20.4), деленный на δl, равен конечной кривизне луча, умноженной на синус угла наклона линии δl к радиусу этой конечной кривизны. Следовательно, нетрудно видеть (с помощью геометрических соображений), что дробь в правой части (20.4) равна бесконечно малому углу поворота, который необходим для уничтожения упомянутого выше наклона, деленному на кривизну луча, и поэтому равна ординате δz искомого геометрического места близких точек B', которая и стоит в левой части. Таким образом, вычисления, основанные на этой геометрической точке зрения, отличной от предыдущей, позволяют легко найти то же условие пересечения, что и прежде, и геометрическое место в виде той же конической поверхности.

Соотношения между элементами относительного расположения, зависящие только от конечных и начальных точек, направлений и цвета данного пути света и от конечной и начальной сред. В конечной однородной среде, обыкновенной или необыкновенной, две плоскости вергенции являются сопряженными плоскостями прогиба некоторой поверхности из определенного класса, задаваемого конечной средой, и аналогичной поверхности, задаваемой всей комбинацией. Соотношение между видимыми размерами и дисторсиями любых двух мелких предметов, каждый из которых рассматривается через оптическую комбинацию с той точки, где находится другой предмет. Взаимозаменяемые оси дисторсии глаза и предмета

21. В п. 14 было показано, а в дальнейшем полученный результат был подробно разработан, что общие геометрические соотношения между начальными и конечными направлениями бесконечно близких лучей определяются коэффициентами линейных вариаций $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, $\delta\alpha'$, $\delta\beta'$, $\delta\gamma'$ шести направляющих косинусов начального и конечного направлений, рассматриваемых как функции шести координат начальной и конечной точек и показателя цвета, и что между сорока двумя коэффициентами этих шести линейных вариаций существует восемнадцать общих соотношений, оставляющих произвольными только двадцать четыре коэффициента, если предположить для простоты, что начальные и конечные координаты относятся к прямоугольным осям. Но, помимо этих восемнадцати общих соотношений, единых для всех оптических комбинаций, в том случае, когда начальная и конечная среды считаются заданными, а начальные и конечные точки, направления и показатели цвета любого пути света предполагаются известными, между коэффициентами возникают некоторые другие соотношения.

Действительно, воспользовавшись в указанном случае общими уравнениями (14.1), мы можем рассматривать начальную и конечную функции среды v, v' и их частные дифференциалы как известные и вывести из них общие выражения для коэффициентов упомянутых выше линейных вариаций направляющих косинусов, содержащие в качестве неизвестных величин только двадцать семь частных дифференциалов второго порядка характеристической функции V, а именно всех вариаций этого порядка, не связанных только с вариацией показателя цвета. Но эти двадцать семь дифференциалов связаны между собой четырнадцатью общими соотношениями (3.3), (3.7), (3.10) и (3.11), выведенными в п. 3, из которых, однако, только тринадцать различных, так как две системы (3.7), (3.11) приводятся к одному общему уравнению (2.3).

Следовательно, в качестве независимых величин остаются только четырнадцать частных дифференциалов характеристической функции V в общих выражениях тех двадцати четырех коэффициентов линейных вариаций направляющих косинусов начального и конечного направлений, которые считались независимыми ранее, когда начальная и конечная функции среды v, v' предполагались неизвестными. Если мы исключим эти четырнадцать независимых дифференциалов характеристической функции V из выражений для двадцати четырех коэффициентов, то получим *десять общих соотношений между элементами расположения бесконечно близких лучей, содержащих только начальные и конечные точки, направления и показатели цвета данного луча света и свойства начальной и конечной сред.*

Простейший способ получения этих десяти общих соотношений состоит в том, чтобы из двадцати четырех дифференциалов характеристической функции V (14.4) исключить четырнадцать, которые выводятся из (14.3). Полученные таким способом соотношения можно разделить на три различные группы. Первая группа содержит два соотношения

$$\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha^2}\frac{\delta\alpha}{\delta z}+\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha\delta\beta}\frac{\delta\beta}{\delta z}+\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha\delta z}=\frac{\delta v}{\delta x},\qquad \frac{\delta^2 v}{\delta\alpha\delta\beta}\frac{\delta\alpha}{\delta z}+\frac{\delta^2 v}{\delta\beta^2}\frac{\delta\beta}{\delta z}+\frac{\delta^2 v}{\delta\beta\delta z}=\frac{\delta v}{\delta y} \tag{21.1}$$

и два других соотношения, содержащих аналогичные величины, помеченные штрихами, или начальные. Вторая группа содержит соотношение между конечными

величинами

$$\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha^2}\frac{\delta\alpha}{\delta y}+\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha\delta\beta}\frac{\delta\beta}{\delta y}+\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha\delta y}=\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha\delta\beta}\frac{\delta\alpha}{\delta x}+\frac{\delta^2 v}{\delta\beta^2}\frac{\delta\beta}{\delta x}+\frac{\delta^2 v}{\delta\beta\delta x} \quad (21.2)$$

и аналогичное отношение между начальными величинами. Третья группа охватывает следующие четыре соотношения:

$$\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha^2}\frac{\delta\alpha}{\delta x'}+\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha\delta\beta}\frac{\delta\beta}{\delta x'}+\frac{\delta^2 v'}{\delta\alpha'^2}\frac{\delta\alpha'}{\delta x}+\frac{\delta^2 v'}{\delta\alpha'\delta\beta'}\frac{\delta\beta'}{\delta x}=0,$$

$$\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha^2}\frac{\delta\alpha}{\delta y'}+\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha\delta\beta}\frac{\delta\beta}{\delta y'}+\frac{\delta^2 v'}{\delta\alpha'\delta\beta'}\frac{\delta\alpha'}{\delta x}+\frac{\delta^2 v'}{\delta\beta'^2}\frac{\delta\beta'}{\delta x}=0,$$

$$\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha\delta\beta}\frac{\delta\alpha}{\delta x'}+\frac{\delta^2 v}{\delta\beta^2}\frac{\delta\beta}{\delta x'}+\frac{\delta^2 v'}{\delta\alpha'^2}\frac{\delta\alpha'}{\delta y}+\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha'\delta\beta'}\frac{\delta\beta'}{\delta y}=0,$$

$$\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha\delta\beta}\frac{\delta\alpha}{\delta y'}+\frac{\delta^2 v}{\delta\beta^2}\frac{\delta\beta}{\delta y'}+\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha'\delta\beta'}\frac{\delta\alpha'}{\delta y}+\frac{\delta^2 v'}{\delta\beta'^2}\frac{\delta\beta'}{\delta y}=0. \quad (21.3)$$

Первые два соотношения из первой группы, а именно соотношения (21.1), эквивалентны первым двум дифференциальным уравнениям (3.1) искривленного луча и выражают то обстоятельство, что величина и плоскость кривизны луча света в конечной переменной среде определяются в общем случае свойствами этой среды, цветом света, положением конечной точки и направлением касательной в конце луча. Аналогичным образом два других соотношения той же группы выражают зависимость начальной величины и плоскости кривизны пути света от начальной среды, показателя цвета, точки и касательной.

Уравнение (21.2), принадлежащее ко второй группе, есть соотношение между четырьмя коэффициентами $\delta\alpha/\delta x$, $\delta\alpha/\delta y$, $\delta\beta/\delta x$, $\delta\beta/\delta y$ и, следовательно, соотношение между направляющим параболоидом и постоянной отклонения девиации для линии конечного луча, зависящими от конечной среды, показателя цвета, точки и касательной. Другое уравнение второй группы выражает аналогичное соотношение для начальной среды.

В весьма распространенном случае однородной конечной среды уравнение (21.2) вырождается в уравнение

$$\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha^2}\frac{\delta\alpha}{\delta y}+\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha\delta\beta}\left(\frac{\delta\beta}{\delta y}-\frac{\delta\alpha}{\delta x}\right)-\frac{\delta^2 v}{\delta\beta^2}\frac{\delta\beta}{\delta x}=0. \quad (21.4)$$

В том же случае общая коническая поверхность второго порядка (19.2), связанная с условием пересечения линий конечных лучей, вырождается в две вещественные или мнимые плоскости вергенции, задаваемые поверхностью второго порядка

$$\frac{\delta\alpha}{\delta y}\delta y^2+\left(\frac{\delta\alpha}{\delta x}-\frac{\delta\beta}{\delta y}\right)\delta x\delta y-\frac{\delta\beta}{\delta x}\delta x^2=0 \quad (21.5)$$

и совпадающие с двумя плоскостями вергенции, рассмотренными в п. 16. Принимая во внимание соотношение (17.28), уравнение (21.4) можно интерпретировать геометрически как утверждение о том, что *в конечной однородной среде две плоскости вергенции являются сопряженными плоскостями прогиба любой поверхности из некоторого класса, определяемого природой среды*, а именно тем классом, для которого в начале координат

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}=\lambda\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha^2},\qquad \frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}=\lambda\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha\delta\beta},\qquad \frac{\delta^2 z}{\delta y^2}=\lambda\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\beta^2} \tag{21.6}$$

и, следовательно, для точек, близких к началу координат,

$$z=px+qy+\frac{\lambda}{2}\left(x^2\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha^2}+2xy\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha\delta\beta}+y^2\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\beta^2}\right), \tag{21.7}$$

где заданный конечный луч, или ось z, принят за ось уклонения, а постоянные p, q, λ произвольны. Последнее соотношение можно еще больше упростить, выбирая постоянные следующим образом:

$$p=-\frac{1}{\mathrm{v}}\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta\alpha},\qquad q=-\frac{1}{\mathrm{v}}\frac{\delta \mathrm{v}}{\delta\beta},\qquad \lambda=\frac{1}{\mathrm{v}Z}, \tag{21.8}$$

где Z – любая постоянная ордината, ибо тогда (по теории характеристической функции V для одной однородной среды, изложенной в п. 10) поверхность (21.7) обретает простое оптическое свойство и становится в конечной однородной среде приближенным геометрическим местом точек x, y, z, для которых

$$V_{,}=\int \mathrm{v}ds=\mathrm{v}\rho=\mathrm{const} \tag{21.9}$$

(интеграл $V_{,}=\int \mathrm{v}ds$ берется здесь в положительном направлении вдоль переменной линии ρ от неподвижной точки (0, 0, Z) до переменной точки (x, y, z) или от последней к первой в зависимости от того, отрицательна или положительна величина Z). Хотя уравнение (21.7) – всего лишь приближенное представление среды – поверхности (21.9), которая в "Первом дополнении" была названа *сфероидом постоянного действия* и в волновой теории представляет собой искривленную волну, распространяющуюся от некоторой точки или к некоторой точке в конечной среде, заключение относительно прогибов строго применимо к поверхности (21.9), так как уравнение (21.7) правильно описывает ход изменения ординаты z этой поверхности (поскольку содержит члены второго измерения), когда постоянные определяются соотношениями (21.8). *Две плоскости вергенции* (21.5) *в конечной однородной среде являются сопряженными плоскостями прогиба сфероида, или волны,* (21.9). Вскоре мы еще вернемся к этому результату и попытаемся проиллюстрировать и обобщить его. Пока же можно заметить, что те же плоскости вергенции (21.5) являются сопряженными плоскостями прогибов некоторой аналогичной поверхности, определяемой всей комбинацией, а не только конечной однородной средой, а именно

поверхности (21.4), для которой

$$\int \mathrm{v} ds(-V) = \mathrm{const}. \tag{21.10}$$

Интеграл здесь берется по всему пути света и поэтому равен характеристической функции V всей оптической комбинации. Дополнительное свойство плоскостей вергенции, доказываемое следующим соотношением, аналогично соотношению (21.4) и выводится из условий (14.3) или (14.7):

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x^2}\frac{\delta\alpha}{\delta y}+\frac{\delta^2 V}{\delta x \delta y}\left(\frac{\delta\beta}{\delta y}-\frac{\delta\alpha}{\delta x}\right)-\frac{\delta^2 V}{\delta y^2}\frac{\delta\beta}{\delta x}=0. \tag{21.11}$$

Наконец, относительно четырех остальных уравнений третьей группы (21.3) ясно, что они выражают некоторые общие соотношения, зависящие от начальной и конечной сред, между коэффициентами, определяющими направляющие плоскости и сопряженные направляющие оси для линий начального и конечного лучей. В часто встречающемся случае обыкновенных сред, начальной и конечной, эти уравнения сводятся к четырем следующим уравнениям, которые могут быть выведены и из соотношений (14.6):

$$\mu\frac{\delta\alpha}{\delta x'}+\mu'\frac{\delta\alpha'}{\delta x}=0,\qquad \mu\frac{\delta\alpha}{\delta y'}+\mu'\frac{\delta\beta'}{\delta x}=0,$$
$$\mu\frac{\delta\beta}{\delta x'}+\mu'\frac{\delta\alpha'}{\delta y}=0,\qquad \mu\frac{\delta\beta}{\delta y'}+\mu'\frac{\delta\beta'}{\delta y}=0, \tag{21.12}$$

где μ, μ' – показатели сред. Эти соотношения приводят к простым заключениям относительно общих соотношений между видимыми величинами и дисторсиями мелкого плоского объекта, помещаемого попеременно на каждом из концов любого данного пути света и рассматриваемого из другого конца через любую обыкновенную или необыкновенную комбинацию, по крайней мере пока мы предполагаем, что эти дисторсии и величины измеряются формой и размерами начального и конечного конусов лучей [[17]]. Действительно в этом случае сопряженные направляющие оси, начальная и конечная, перпендикулярные данному пути на его концах и определенные в п. 15, могут быть названы *глазными и объектными осями дисторсии* мелкого предмета, помещенного в плоскость, перпендикулярную пути на его конце, и рассматриваемого из начальной точки. Если эти оси принять за оси начальных и конечных координат, то для того, чтобы в силу (15.32), (15.33) выполнялись соотношения

$$\frac{\delta\alpha'}{\delta y}=0,\qquad \frac{\delta\beta'}{\delta x}=0,\qquad \frac{\delta\beta'}{\delta y}>0,\qquad \frac{\delta\alpha'}{\delta x}>-\frac{\delta\beta'}{\delta y},$$

должны в силу (21.12) (начальная и конечная среды предполагаются обыкновенными, а их показатели μ, μ' положительными) выполняться соотношения

$$\frac{\delta\alpha}{\delta y'}=0,\qquad \frac{\delta\beta}{\delta x'}=0,\qquad -\frac{\delta\beta}{\delta y'}>0,\qquad -\frac{\delta\alpha}{\delta x'}>-\frac{\delta\beta}{\delta y'}, \tag{21.13}$$

т.е. в этом случае *направляющие оси начальных линий лучей являются также направляющими осями того же рода для конечных линий лучей, отсчитываемыми в обратном направлении.* Это само по себе замечательное соотношение, и его можно сформулировать как утверждение о том, что *глазные и объектные оси дисторсии могут быть переставлены местами,* если *начальная и конечная среды обыкновенные,* т.е. для таких сред, начальной и конечной, *глазные оси дистории становятся объектными, а объектные оси – глазными, если объект перемещается из конечной перпендикулярной плоскости в начальную и рассматривается из конечной точки вместо начальной.* А так как уравнения (15.35)

$$x' = z' \frac{\delta\alpha'}{\delta x}\delta x, \qquad y' = z' \frac{\delta\beta'}{\delta y}\delta y$$

задают начальную линию луча зрения, соответствующего конечной видимой точке B' с координатами δx, δy, δz, то уравнения

$$x = -z\frac{\mu'}{\mu}\frac{\delta\alpha'}{\delta x}\delta x', \qquad y = -z\frac{\mu'}{\mu}\frac{\delta\beta'}{\delta y}\delta y' \tag{21.14}$$

задают в силу (21.12) конечную линию луча зрения, соответствующего начальной видимой точке A' с координатами $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$. Следовательно, начальный конус лучей зрения, соответствующий любому мелкому предмету (15.41)

$$\delta y = f(\delta x)$$

в конечной перпендикулярной плоскости, задается уравнением (15.42)

$$\frac{y'}{z'}\left(\frac{\delta\beta'}{\delta y}\right)^{-1} = f\left(\frac{x'}{z'}\left(\frac{\delta\alpha'}{\delta x}\right)^{-1}\right),$$

а конечный конус лучей зрения, соответствующий любому мелкому предмету

$$\delta y' = f'(\delta x') \tag{21.15}$$

в начальной перпендикулярной плоскости, задается следующим аналогичным уравнением:

$$-\frac{y}{z}\frac{\mu}{\mu'}\left(\frac{\delta\beta'}{\delta y}\right)^{-1} = f'\left(-\frac{x}{z}\frac{\mu}{\mu'}\left(\frac{\delta\alpha'}{\delta x}\right)^{-1}\right). \tag{21.16}$$

Таким образом, если эти мелкие предметы (15.41), (21.15) на концах данного пути света равны, подобны и подобно расположены относительно сопряженных осей дисторсии, т.е. если конечная и начальная функции f, f' одинаковы и если мы пересекаем два конуса лучей (15.42), (21.16) соответственно перпендикулярными плоскостями, имеющими своими уравнениями

$$z' = \mu' R, \qquad z = -\mu R, \tag{21.17}$$

где R – любая постоянная длина, μ, μ' – те же постоянные показатели, как и прежде, конечной и начальной обыкновенных сред, то получаемые при этом два перпендикулярных сечения равны и подобны. Если мы, кроме того, положим в силу (15.33)

$$\frac{\delta\beta'}{\delta y} = \frac{\delta\alpha'}{\delta x}\cos G \tag{21.18}$$

(G – вследствие (15.40) угол наклона начальной направляющей плоскости к плоскости, перпендикулярной данной начальной линии луча) и определим величину R как

$$R = \frac{1}{\mu'}\left(\frac{\delta\alpha'}{\delta x}\right)^{-1} = -\frac{1}{\mu}\left(\frac{\delta\alpha}{\delta x'}\right)^{-1}, \tag{21.19}$$

то перпендикулярные сечения начального и конечного конусов лучей можно представить в виде

$$y' = \cos G \cdot f(x'), \qquad z' = (\delta\alpha' / \delta x)^{-1} \tag{21.20}$$

и

$$y = \cos G \cdot f(x), \qquad z = (\delta\alpha / \delta x')^{-1}. \tag{21.21}$$

Таким образом, в зависимости от угла наклона G *видимые дисторсии одинаковы для любых двух мелких предметов, подобно расположенных в перпендикулярных плоскостях на концах любого данного пути света и рассматриваемых вдоль этого пути через любую оптическую комбинацию.*

Рассматриваемая здесь дисторсия, вообще говоря, изменяется, если предмет на любом из концов данного пути света повернуть в перпендикулярной плоскости на том конце так, чтобы он изменил свое положение относительно осей дисторсии. Например, если предмет – небольшой прямоугольный треугольник в данной конечной точке B пути, то из теории, изложенной в п. 15, известно, что глазу, расположенному в начальной точке A, этот прямой угол покажется прямым, если направления его катетов φ_1', φ_2' совпадают с направлениями расположенных под прямым углом друг к другу конечных направляющих осей, или объектных осей дисторсии. Но в противном случае прямой угол $\varphi_2' - \varphi_1'$ будет казаться острым или тупым: его кажущаяся величина $\varphi_2 - \varphi_1$ определяется по формуле [18]

$$-\mathrm{tg}\left(\varphi_2 - \varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{(\delta\alpha' / \delta x)^2 - (\delta\beta' / \delta y)^2}{2(\delta\alpha' / \delta x)(\delta\beta' / \delta y)}\sin 2\varphi_1', \tag{21.22}$$

которую с помощью соотношения (21.18) можно привести к виду

$$-\mathrm{tg}\left(\varphi_2 - \varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin G \cdot \mathrm{tg}\, G \cdot \sin 2\varphi_1. \tag{21.23}$$

Закон изменения дисторсии, соответствующего повороту в конечной перпендикулярной плоскости, может быть также выведен из теории направляющих плоскостей, изложенной в п. 15.

Дисторсия изменяется также, если небольшой плоский объект перемещается в наклонной, а не в перпендикулярной плоскости. В этом случае мы можем попрежнему пользоваться уравнениями (15.35), (21.14) для начальных и конечных линий луча и задавать начальный и конечный конусы лучей с помощью уравнений (15.42), (21.16). Но теперь мы должны рассматривать уравнения (15.41), (21.15) для конечного и начального предметов как представляющие проекции этих предметов на конечную и начальную перпендикулярные плоскости, или, точнее, ***проектирующие цилиндры,*** которые содержат предметы и определяют их видимые величины и дисторсии, задавая связанные с ними конусы лучей.

Например, можно считать, что уравнение (15.37) определяет конечный эллиптический цилиндр, любое сечение которого вблизи конечной точки B данного пути света соответствует начальному круговому конусу (15.36) и, следовательно, будет казаться кругом для глаза, находящегося в начальной точке A. С другой стороны, мы можем считать, что уравнение (15.38) задает конечный круговой цилиндр, любое сечение которого вблизи конечной точки B порождает начальный эллиптический конус лучей (15.39) и кажется эллипсом из точки A. Если эллиптический конус лучей (15.39) привести с помощью его круговых сечений к направляющим плоскостям (15.40) для начальных линий лучей, то для мелких плоских предметов плоскости

$$z = \pm x \operatorname{tg} G, \tag{21.24}$$

а именно (в силу условия (21.18)) ***плоскости кругового сечения эллиптического цилиндра*** (15.37), ***являются плоскостями без дисторсии.***

Таким образом, в силу сказанного выше не только каждое из круговых сечений кажется в этих плоскостях круглым, но и любой другой мелкий предмет вблизи конечной точки в любой из этих же двух плоскостей кажется имеющим свою собственную форму глазу, находящемуся в начальной точке A данного пути света. Угловая величина предмета, расположенного указанным выше образом вблизи конечной точки, такая же, как если бы его рассматривали перпендикулярно вдоль прямых лучей без какой бы то ни было преломляющей или отражающей поверхности или промежуточной среды с конечного расстояния $(\delta\beta'/\delta y)^{-1}$. Аналогичным образом плоскости

$$z' = \pm x' \operatorname{tg} G, \tag{21.25}$$

т.е. плоскости кругового сечения такого же начального эллиптического цилиндра, являются ***начальными плоскостями без дисторсии*** такого же рода, как и конечные плоскости (21.24), поскольку всякий мелкий предмет вблизи начала, помещенный в любую из этих двух начальных плоскостей (21.25) и рассматриваемый из конечной точки B данного пути света, будет казаться имеющим свою форму и такой же угловой величины, как если бы его рассматривали прямо с начального расстояния

$$-\left(\frac{\delta\beta}{\delta y'}\right)^{-1} = \frac{\mu}{\mu'}\left(\frac{\delta\beta'}{\delta y}\right)^{-1}.$$

Эта теория *плоскостей без дистории* позволяет просто определить видимую форму и размеры любого мелкого предмета, расположенного произвольным образом вблизи любого из концов данного пути света, так как нам необходимо только спроектировать предмет на одну из двух плоскостей без дисторсии на том конце прямыми, параллельными соответствующему конечному направлению пути, и затем вообразить, будто эта проекция рассматривается прямо с начального или конечного расстояния, определенного так, как это сделано выше. Мы могли бы, например, вывести из этой теории свойство направляющих плоскостей: эллипс и окружность (15.37), (15.38) кажутся окружностью и эллипсом (15.36), (15.39), а прямой угол на конечной перпендикулярной плоскости кажется острым или тупым (21.23), когда направления сторон прямого угла не совпадают с направлениями объектных осей дисторсии. Соотношения (21.12) для обыкновенных сред, начальной и конечной, можно сформулировать в виде следующих теорем: во-первых, *угол* $2G$ *между конечной парой плоскостей без дисторсии* (21.24) равен углу между начальной парой (21.25); во-вторых, *видимые угловые величины любых мелких и одинаковых линейных предметов в конечной и начальной плоскостях без дисторсии пропорциональны показателям конечной и начальной сред,* когда предметы рассматриваются вдоль данного пути света из начальной и конечной точек; в-третьих, *каждая из двух линий пересечения двух пар плоскостей без дисторсии совпадают с видимым направлением каждой*, если их рассматривать вдоль пути.

Вычисление элементов относительного расположения лучей в произвольных осях координат

22. В приведенных выше формулах для элементов относительного расположения близких лучей мы выбирали для простоты конечную и начальную точки данного пути света соответственно до начала двух систем прямоугольных координат, конечной и начальной, и принимали конечную и начальную линии луча, или касательные к данному пути, за оси z и z'. Такой выбор координат был удобен тем, что позволял обратить в нуль восемнадцать из сорока двух общих коэффициентов в выражениях, задающих $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, $\delta\alpha'$, $\delta\beta'$, $\delta\gamma'$ как линейные функции от δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta\chi$. Однако остальные двадцать четыре коэффициента (14.4) легко определить с помощью уже установленных методов и выразить через частные производные характеристической функции и родственной ей функции из других систем конечных и начальных координат, например из любых других прямоугольных систем конечных и начальных осей.

При нахождении этих коэффициентов полезно обозначить нижними штрихами координаты и направляющие косинусы, входящие в выражения (14.4) и относящиеся к особым осям только что описанного рода. Эти особые координаты и косинусы можно связать с более общими аналогичными величинами x, y, z, x', y', z', α, β, γ, α', β', γ' с помощью формул преобразования, приведенных в п. 13, которые, как нетрудно показать, распространяются на случай двух различных прямоугольных систем данных координат или координат со штрихами. При этом оси z' и $z'_,$, рассмотренные в п. 13, станут конечной и начальной линиями луча, и в

силу (13.1) мы получим

$$\delta x = x_{x_,}\,\delta x_, + x_{y_,}\,\delta y_, + \alpha\delta z_, , \qquad \delta x' = x'_{x'_,}\,\delta x'_, + x'_{y'_,}\,\delta y'_, + \alpha'\delta z'_, ,$$

$$\delta y = y_{x_,}\,\delta x_, + y_{y_,}\,\delta y_, + \beta\delta z_, , \qquad \delta y' = y'_{x'_,}\,\delta x'_, + y'_{y'_,}\,\delta y'_, + \beta'\delta z'_, ,$$

$$\delta z = z_{x_,}\,\delta x_, + z_{y_,}\,\delta y_, + \gamma\delta z_, , \qquad \delta z' = z'_{x'_,}\,\delta x'_, + z'_{y'_,}\,\delta y'_, + \gamma'\delta z'_, , \qquad (22.1)$$

так как

$$x_{z_,} = \alpha, \quad y_{z_,} = \beta, \quad z_{z_,} = \gamma, \qquad x'_{z'_,} = \alpha', \quad y'_{z'_,} = \beta', \quad z'_{z'_,} = \gamma'. \qquad (22.2)$$

Кроме того,

$$\alpha_, = 0, \ \beta_, = 0, \ \gamma_, = 1, \ \delta\gamma_, = 0, \qquad \alpha'_, = 0, \ \beta'_, = 0, \gamma'_, = 1, \ \delta\gamma'_, = 0 \qquad (22.3)$$

и, следовательно, в силу (13.5)

$$\delta\alpha = x_{x_,}\,\delta\alpha_, + x_{y_,}\,\delta\beta_, , \qquad \delta\alpha' = x'_{x'_,}\,\delta\alpha'_, + x'_{y'_,}\,\delta\beta'_, ,$$

$$\delta\beta = y_{x_,}\,\delta\alpha_, + y_{y_,}\,\delta\beta_, , \qquad \delta\beta' = y'_{x'_,}\,\delta\alpha'_, + y'_{y'_,}\,\delta\beta'_, ,$$

$$\delta\gamma = z_{x_,}\,\delta\alpha_, + z_{y_,}\,\delta\beta_, , \qquad \delta\gamma' = z'_{x'_,}\,\delta\alpha'_, + z'_{y'_,}\,\delta\beta'_, . \qquad (22.4)$$

Подставляя выражения (22.1), (22.4) для двенадцати вариаций δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, $\delta\alpha'$, $\delta\beta'$, $\delta\gamma'$ в общие линейные соотношения (14.1) между этими двенадцатью вариациями и вариацией показателя цвета $\delta\chi$ или в любые другие линейные соотношения того же рода, выведенные из характеристической и связанной с ней функцией и отнесенные к произвольным прямоугольным координатам, мы легко обнаружим частную зависимость вида (14.4) вариаций $\delta\alpha_,, \delta\beta_,$ от $\delta x_,, \delta y_,, \delta z_,, \delta x'_,, \delta y'_,, \delta\chi$ и вариаций $\delta\alpha'_,, \delta\beta'_,$ от $\delta x_,$, $\delta y_,$, $\delta x'_,$, $\delta y'_,$, $\delta z'_,$, $\delta\chi$. Может показаться, что при таком преобразовании мы вводим двенадцать произвольных косинусов, или коэффициентов, а именно:

$$x_{x_,},\ y_{x_,},\ z_{x_,},\ x_{y_,},\ y_{y_,},\ z_{y_,},\ x'_{x'_,},\ y'_{x'_,},\ z'_{x'_,},\ x'_{y'_,},\ y'_{y'_,},\ z'_{y'_,},$$

но эти двенадцать коэффициентов связаны десятью соотношениями, возникающими из-за ортогональности каждой из четырех систем координат и из заданных направлений полуосей $z_,$ и $z'_,$. Следовательно, остаются только две произвольные величины, соответствующие двум произвольным плоскостям $x_, z_,$, $x'_, z'_,$. В дальнейшем мы нередко будем выбирать эти плоскости по собственному усмотрению так, чтобы они совпадали с некоторыми заданными плоскостями кривизны, или,

иначе говоря, для упрощения приведенных выше геометрических рассуждений. Таким образом, хотя мы можем придать полуоси $x_{,}$ любое положение в заданной конечной плоскости, перпендикулярной пути света, и тем самым приписать ее направляющим косинусам $x_{x_{,}}$, $y_{x_{,}}$, $z_{x_{,}}$ любые значения, согласующиеся с первым из соотношений (13.2), а именно соотношением

$$x_{x_{,}}^2 + y_{x_{,}}^2 + z_{x_{,}}^2 = 1,$$

и с соотношением

$$\alpha x_{x_{,}} + \beta y_{x_{,}} + \gamma z_{x_{,}} = 0, \tag{22.5}$$

однако при таком выборе оси $x_{,}$ перпендикулярная ось $y_{,}$ в конечной перпендикулярной плоскости определена и

$$x_{y_{,}} = \pm(\beta z_{x_{,}} - \gamma y_{x_{,}}), \quad y_{y_{,}} = \pm(\gamma x_{x_{,}} - \alpha z_{x_{,}}), \quad z_{y_{,}} = \pm(\alpha y_{x_{,}} - \beta x_{x_{,}}) \tag{22.6}$$

(верхние или нижние знаки во всех соотношениях следует выбирать одновременно). Аналогичные замечания относятся и к начальным осям $x'_{,}$ и $y'_{,}$.

Характеристическая и связанные с ней функции позволяют сразу же, через их частные производные первого порядка, находить зависимость величин, обозначенных нами $\sigma, \tau, \upsilon, \sigma', \tau', \upsilon'$, а не величин $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ от координат и показателя цвета начала и конца. Следовательно, те же функции непосредственно, через свои частные дифференциалы второго порядка, задают вариации $\delta\sigma, \delta\tau, \delta\upsilon, \delta\sigma', \delta\tau', \delta\upsilon'$, а не $\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma, \delta\alpha', \delta\beta', \delta\gamma'$, как функции вариаций $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x', \delta y', \delta z'$. Но мы можем легко вывести вариации величин $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ из вариаций величин $\sigma, \tau, \upsilon, \sigma', \tau', \upsilon'$ и $x, y, z, x', y', z', \chi$, дифференцируя соотношения

$$\sigma = \frac{\delta v}{\delta\alpha}, \quad \tau = \frac{\delta v}{\delta\beta}, \quad \upsilon = \frac{\delta v}{\delta\gamma}, \quad \sigma' = \frac{\delta v'}{\delta\alpha'}, \quad \tau' = \frac{\delta v'}{\delta\beta'}, \quad \upsilon' = \frac{\delta v'}{\delta\gamma'},$$

которые неоднократно использовались в настоящем "Дополнении", ибо при этом мы получим

$$\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha^2}\delta\alpha + \frac{\delta^2 v}{\delta\alpha\delta\beta}\delta\beta + \frac{\delta^2 v}{\delta\alpha\delta\gamma}\delta\gamma = \delta\sigma - \delta_{,,}\frac{\delta v}{\delta\alpha},$$

$$\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha\delta\beta}\delta\alpha + \frac{\delta^2 v}{\delta\beta^2}\delta\beta + \frac{\delta^2 v}{\delta\beta\delta\gamma}\delta\gamma = \delta\tau - \delta_{,,}\frac{\delta v}{\delta\beta},$$

$$\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha\delta\gamma}\delta\alpha + \frac{\delta^2 v}{\delta\beta\delta\gamma}\delta\beta + \frac{\delta^2 v}{\delta\gamma^2}\delta\gamma = \delta\upsilon - \delta_{,,}\frac{\delta v}{\delta\gamma},$$

$$\frac{\delta^2 v'}{\delta\alpha'^2}\delta\alpha' + \frac{\delta^2 v'}{\delta\alpha'\delta\beta'}\delta\beta' + \frac{\delta^2 v'}{\delta\alpha'\delta\gamma'}\delta\gamma' = \delta\sigma' - \delta'\frac{\delta v'}{\delta\alpha'},$$

$$\frac{\delta^2 v'}{\delta\alpha'\delta\beta'}\delta\alpha' + \frac{\delta^2 v'}{\delta\beta'^2}\delta\beta' + \frac{\delta^2 v'}{\delta\beta'\delta\gamma'}\delta\gamma' = \delta\tau' - \delta'\frac{\delta v'}{\delta\beta'},$$

$$\frac{\delta^2 v'}{\delta\alpha'\delta\gamma'}\delta\alpha' + \frac{\delta^2 v'}{\delta\beta'\delta\gamma'}\delta\beta' + \frac{\delta^2 v'}{\delta\gamma'^2}\delta\gamma' = \delta\upsilon' - \delta'\frac{\delta v'}{\delta\beta'}, \tag{22.7}$$

где $\delta_{\prime\prime}$, как и в предыдущих разделах, относится к вариациям x, y, z, χ, а δ' – к вариациям x', y', z', χ. Исключая симметричным образом некоторые величины [19], получаем

$$v''\delta\alpha = \left(\frac{\delta^2 v}{\delta\beta^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta\gamma^2}\right)\left(\delta\sigma - \delta_{\prime\prime}\frac{\delta v}{\delta\alpha}\right) - \frac{\delta^2 v}{\delta\alpha\delta\beta}\left(\delta\tau - \delta_{\prime\prime}\frac{\delta v}{\delta\beta}\right) - \frac{\delta^2 v}{\delta\gamma\delta\alpha}\left(\delta\upsilon - \delta_{\prime\prime}\frac{\delta v}{\delta\gamma}\right),$$

$$v''\delta\beta = \left(\frac{\delta^2 v}{\delta\gamma^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta\alpha^2}\right)\left(\delta\tau - \delta_{\prime\prime}\frac{\delta v}{\delta\beta}\right) - \frac{\delta^2 v}{\delta\beta\delta\gamma}\left(\delta\upsilon - \delta_{\prime\prime}\frac{\delta v}{\delta\gamma}\right) - \frac{\delta^2 v}{\delta\alpha\delta\beta}\left(\delta\sigma - \delta_{\prime\prime}\frac{\delta v}{\delta\alpha}\right),$$

$$v''\delta\gamma = \left(\frac{\delta^2 v}{\delta\alpha^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta\beta^2}\right)\left(\delta\upsilon - \delta_{\prime\prime}\frac{\delta v}{\delta\gamma}\right) - \frac{\delta^2 v}{\delta\gamma\delta\alpha}\left(\delta\sigma - \delta_{\prime\prime}\frac{\delta v}{\delta\alpha}\right) - \frac{\delta^2 v}{\delta\beta\delta\gamma}\left(\delta\tau - \delta_{\prime\prime}\frac{\delta v}{\delta\beta}\right),$$

$$v'''\delta\alpha' = \left(\frac{\delta^2 v'}{\delta\beta'^2} + \frac{\delta^2 v'}{\delta\gamma'^2}\right)\left(\delta\sigma' - \delta'\frac{\delta v'}{\delta\alpha'}\right) -$$

$$- \frac{\delta^2 v'}{\delta\alpha'\delta\beta'}\left(\delta\tau' - \delta'\frac{\delta v'}{\delta\beta'}\right) - \frac{\delta^2 v'}{\delta\gamma'\delta\alpha'}\left(\delta\upsilon' - \delta'\frac{\delta v'}{\delta\gamma'}\right),$$

$$v'''\delta\beta' = \left(\frac{\delta^2 v'}{\delta\gamma'^2} + \frac{\delta^2 v'}{\delta\alpha'^2}\right)\left(\delta\tau' - \delta'\frac{\delta v'}{\delta\beta'}\right) -$$

$$- \frac{\delta^2 v'}{\delta\beta'\delta\gamma'}\left(\delta\upsilon' - \delta'\frac{\delta v'}{\delta\gamma'}\right) - \frac{\delta^2 v'}{\delta\alpha'\delta\beta'}\left(\delta\sigma' - \delta'\frac{\delta v'}{\delta\alpha'}\right),$$

$$v'''\delta\gamma' = \left(\frac{\delta^2 v'}{\delta\alpha'^2} + \frac{\delta^2 v'}{\delta\beta'^2}\right)\left(\delta\upsilon' - \delta'\frac{\delta v'}{\delta\gamma'}\right) -$$

$$- \frac{\delta^2 v'}{\delta\gamma'\delta\alpha'}\left(\delta\sigma' - \delta'\frac{\delta v'}{\delta\alpha'}\right) - \frac{\delta^2 v'}{\delta\beta'\delta\gamma'}\left(\delta\tau' - \delta'\frac{\delta v'}{\delta\beta'}\right), \tag{22.8}$$

где v'' определяется выражением (10.17), а v''' – аналогичным выражением

$$v''' = \frac{\delta^2 v'}{\delta\alpha'^2}\frac{\delta^2 v'}{\delta\beta'^2} - \left(\frac{\delta^2 v'}{\delta\alpha'\delta\beta'}\right) + \frac{\delta^2 v'}{\delta\beta'^2}\frac{\delta^2 v'}{\delta\gamma'^2} -$$

$$- \left(\frac{\delta^2 v'}{\delta\beta'\delta\gamma'}\right)^2 + \frac{\delta^2 v'}{\delta\gamma'^2}\frac{\delta^2 v'}{\delta\gamma'^2} - \left(\frac{\delta^2 v'}{\delta\gamma'\delta\alpha'}\right)^2. \tag{22.9}$$

Мы можем также вывести вариации величин α, β, γ, α', β', γ' из вариаций величин σ, τ, υ, σ', τ', υ', x, y, z, x', y', z', χ, дифференцируя соотношения (2.8) и п. 2 и используя функции Ω, Ω' вместо функций v, v′.

Общие линейные выражения для относительного расположения близких лучей, утрачивающие смысл в точке вергенции. Определение точек вергенций и их геометрических мест (каустических поверхностей) в прямой или искривленной системе методом, изложенным в настоящем "Дополнении"

23. До сих пор мы предполагали, что бесконечно малые, или предельные, выражения вариаций направляющих косинусов концов светового пути – линейные функции вариаций координат и показателей цвета конечной и начальной точек. Но хотя это предположение, как правило, выполняется, существует важное и охватывающее достаточно много случаев исключение: линейная форма становится неприменимой, когда данный путь света $(A, B)_\chi$, с которым надлежит сравнивать близкие пути, в начальной и конечной точках A, B пересекается под бесконечно малым углом с другим путем и имеет с ним один и тот же показатель цвета, так как при этом начальное и конечное направления могут претерпевать определенные бесконечно малые вариации, в то время как концы A, B и показатель цвета χ остаются неизменными. Поэтому важная общая проблема математической оптики состоит в том, чтобы определить для любой заданной оптической комбинации *соотношения между координатами концов и показателем цвета пути света, который в начальной и конечной точках пересекается с другим бесконечно близким путем с тем же показателем цвета*. Эта общая проблема, решение которой включает общую теорию каустических поверхностей, которых касаются прямолинейные или искривленные лучи любой заданной оптической системы, может быть легко решена методами настоящего "Дополнения".

Применяя эти методы к данной задаче, мы должны продифференцировать общие уравнения, связывающие конечное и начальное направления с координатами и показателем цвета конечной и начальной точек через частные производные первого порядка характеристических и связанных с ней функций и исключить вариации величин x, y, z, x', y', z', χ. Что же касается частных производных второго порядка, возникающих при таком дифференцировании, то, как нетрудно видеть из соотношений (14.1), производные характеристической функции V (или по крайней мере часть их) в рассматриваемом нами случае обращаются в бесконечность. Следовательно, в этом случае удобнее воспользоваться одной из вспомогательных функций W, T, если необходимо – в комбинации с функциями v, v′ или Ω, Ω', вид которых выражает свойства начальной и конечной сред.

Например, если конечная среда однородна и, следовательно, конечные лучи прямолинейны, то удобно воспользоваться соотношениями (6.18), содержащими производные функций W и Ω (такие соотношения были выведены в п. 6):

$$x = \frac{\delta W}{\delta\sigma} + V\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}, \quad y = \frac{\delta W}{\delta\tau} + V\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}, \quad z = \frac{\delta W}{\delta\upsilon} + V\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}.$$

Дифференцируя эти соотношения по σ, τ, υ как единственным переменным и исключая вариацию первого порядка характеристической функции V, а также вариации величин $x, y, z, x', y', z', \chi$, получаем

$$\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma^2}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma^2}\right)\delta\sigma+\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta\tau}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\tau}\right)\delta\tau+\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta\upsilon}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\upsilon}\right)\delta\upsilon=0,$$

$$\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta\tau}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\tau}\right)\delta\sigma+\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\tau^2}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau^2}\right)\delta\tau+\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta\upsilon}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau\delta\upsilon}\right)\delta\upsilon=0,$$

$$\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta\upsilon}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\upsilon}\right)\delta\sigma+\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta\upsilon}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau\delta\upsilon}\right)\delta\tau+\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon^2}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon^2}\right)\delta\upsilon=0 \qquad (23.1)$$

и, следовательно, при симметричном исключении соответствующих величин и в силу вида функций W, Ω

$$\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma^2}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma^2}\right)\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\tau^2}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau^2}\right)-\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta\tau}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\tau}\right)^2+$$

$$+\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\tau^2}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau^2}\right)\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon^2}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon^2}\right)-\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta\upsilon}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau\delta\upsilon}\right)^2+$$

$$+\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon^2}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon^2}\right)\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma^2}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma^2}\right)-\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\delta\sigma}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon\delta\sigma}\right)^2=0. \qquad (23.2)$$

Такой вид имеет условие, которое должно выполняться для пересечения в конечной и начальной точках двух близких путей света с любым общим показателем света, когда конечная среда однородна. Условие (23.2) квадратично по V и определяет для любой конечной системы прямолинейных лучей, соответствующих любой светящейся или начальной точке A и любому показателю цвета χ, две вещественные или мнимые точки вергенции B_1, B_2 на каждом прямолинейном луче, т.е. две точки, в которых этот луч пересекается с бесконечно близкими лучами той же конечной системы. Совместное уравнение в переменных x, y, z (содержащее x', y', z', χ как параметры) *двух каустических поверхностей*, которых касаются все конечные лучи и которые являются геометрическим местом точек вергенции, можно получить, исключив σ, τ, υ из уравнений (6.18) и квадратичного уравнения (23.2), причем последнее в силу однородности функций W и $\Omega + 1$ может быть приведено к следующему более простому виду:

$$\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma^2}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma^2}\right)\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\tau^2}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau^2}\right)-\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta\tau}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\tau}\right)^2=0 \qquad (23.3)$$

и допускает несколько других преобразований. Если V принимает любое из двух значений, определяемых этим квадратичным уравнением, т.е. если конечная точка B пути света может совпадать с каждой из точек B_1 или B_2 на любой из двух

каустических поверхностей, то уравнения, получающиеся из уравнений (6.18) при дифференцировании по x, y, z, а также по σ, τ, υ, а именно уравнения

$$\delta x - \frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}(\sigma\delta x + \tau\delta y + \upsilon\delta z) = \delta\frac{\delta W}{\delta\sigma} + V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma},$$
$$\delta y - \frac{\delta\Omega}{\delta\tau}(\sigma\delta x + \tau\delta y + \upsilon\delta z) = \delta\frac{\delta W}{\delta\tau} + V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\tau},$$
$$\delta z - \frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}(\sigma\delta x + \tau\delta y + \upsilon\delta z) = \delta\frac{\delta W}{\delta\upsilon} + V\delta\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon} \qquad (23.4)$$

приводят к линейному соотношению между δx, δy, δz, которое может быть представлено в различном виде, например в таком:

$$\frac{1}{\lambda}\left\{\delta x - \frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}(\sigma\delta x + \tau\delta y + \upsilon\delta z)\right\} =$$
$$= \frac{1}{\lambda'}\left\{\delta y - \frac{\delta\Omega}{\delta\tau}(\sigma\delta x + \tau\delta y + \upsilon\delta z)\right\} =$$
$$= \frac{1}{\lambda''}\left\{\delta z - \frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}(\sigma\delta x + \tau\delta y + \upsilon\delta z)\right\}. \qquad (23.5)$$

Величинам λ, λ', λ'' можно придавать здесь любые из следующих наборов значений.

Первый набор:

$$\lambda = \frac{\delta^2 W}{\delta\sigma^2} + V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma^2}, \quad \lambda' = \frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta\tau} + V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\tau}, \quad \lambda'' = \frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta\upsilon} + V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\upsilon}.$$

Второй набор:

$$\lambda = \frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta\tau} + V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\tau}, \quad \lambda' = \frac{\delta^2 W}{\delta\tau^2} + V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau^2}, \quad \lambda'' = \frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta\upsilon} + V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau\delta\upsilon}.$$

Третий набор:

$$\lambda = \frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta\upsilon} + V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\upsilon}, \quad \lambda' = \frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta\upsilon} + V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau\delta\upsilon}, \quad \lambda'' = \frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon^2} + V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon^2}. \qquad (23.6)$$

Нетрудно видеть, что выведенное таким способом линейное соотношение между δx, δy, δz есть дифференциальное уравнение, или уравнение касательной плоскости к каустической поверхности в точке вергенции x, y, z. То же линейное уравнение задает и плоскость вергенции, или касательную плоскость к развертывающемуся пучку прямолинейных лучей, соответствующих другой, или сопряженной, точке вергенции на данном конечном луче.

Если конечная среда неоднородна, то три соотношения (4.8)

$$x = \frac{\delta W}{\delta\sigma}, \quad y = \frac{\delta W}{\delta\tau}, \quad z = \frac{\delta W}{\delta\upsilon}$$

следует продифференцировать по σ, τ, υ и мы получим

$$\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma^2}\delta\sigma+\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta\tau}\delta\tau+\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta\upsilon}\delta\upsilon=0,\qquad \frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta\tau}\delta\sigma+\frac{\delta^2 W}{\delta\tau^2}\delta\tau+\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta\upsilon}\delta\upsilon=0,$$
$$\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta\upsilon}\delta\sigma+\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta\upsilon}\delta\tau+\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon^2}\delta\upsilon=0 \qquad (23.7)$$

и после исключения соответствующих величин

$$\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma^2}\frac{\delta^2 W}{\delta\tau^2}\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon^2}+2\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta\tau}\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta\upsilon}\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\delta\sigma}=$$
$$=\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma^2}\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta\upsilon}\right)^2+\frac{\delta^2 W}{\delta\tau^2}\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\delta\sigma}\right)^2+\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon^2}\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta\tau}\right)^2. \qquad (23.8)$$

Таким образом, это уравнение (которое может быть записано и в другом виде) справедливо, когда конечная среда неоднородна и для конечной среды выполняется квадратичное уравнение (23.2). Если из уравнения (23.8) исключить с помощью соотношений (4.8) σ, τ, υ, то при любой заданной начальной точке и любом показателе цвета мы придем к уравнению *простой или каустической поверхности, которой касаются искривленные лучи соответствующей конечной системы.*

Вспомогательная функция T также может быть использована в случае искривленных лучей, но она полезна главным образом, когда конечная и начальная среды однородны. Тогда конечный и начальный участки пути света прямолинейны и для этих прямолинейных участков мы можем воспользоваться (6.14) в виде

$$x=\frac{\delta S}{\delta\sigma},\quad y=\frac{\delta S}{\delta\tau},\quad x'=-\frac{\delta S}{\delta\sigma'},\quad y'=-\frac{\delta S}{\delta\tau'}, \qquad (23.9)$$

где для краткости [20] мы положили

$$S=T-z\upsilon+z'\upsilon' \qquad (23.10)$$

и рассматриваем v как функцию от σ, τ, χ; v′ – как функцию от σ′, τ′, χ′; T – как функцию от σ, τ, σ′, τ′, χ; S – как функцию от z, z', σ, τ, σ′, τ′, χ. Дифференцируя соотношения (23.9) по σ, τ, σ′, τ′, мы обнаружим, что если прямолинейные участки в конце и начале, обыкновенные или необыкновенные, двух бесконечно близких путей света с одним и тем же показателем цвета пересекаются в начальной точке x', y', z' и в конечной x, y, z, конечные и начальные вариации и конечная и начальная ординаты z, z' точек пересечения должны удовлетворять четырем условиям

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma^2}\delta\sigma+\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau}\delta\tau+\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\sigma'}\delta\sigma'+\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau'}\delta\tau'=0,$$
$$\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau}\delta\sigma+\frac{\delta^2 S}{\delta\tau^2}\delta\tau+\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\sigma'}\delta\sigma'+\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\tau'}\delta\tau'=0,$$
$$\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\sigma'}\delta\sigma+\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\sigma'}\delta\tau+\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma'^2}\delta\sigma'+\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma'\delta\tau'}\delta\tau'=0,$$
$$\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau'}\delta\sigma+\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\tau'}\delta\tau+\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma'\delta\tau'}\delta\sigma'+\frac{\delta^2 S}{\delta\tau'^2}\delta\tau'=0, \qquad (23.11)$$

которые после исключения соответствующих величин из первых двух условий приводят к соотношениям

$$\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\sigma'}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\tau'}-\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau'}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\sigma'}\right)\delta\sigma'=$$
$$=\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau}\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau'}-\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma^2}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\tau'}\right)\delta\sigma+\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\tau^2}\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau'}-\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\tau'}\right)\delta\tau,$$
$$\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\sigma'}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\tau'}-\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau'}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\sigma'}\right)\delta\tau'=$$
$$=\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma^2}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\sigma'}-\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau}\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\sigma'}\right)\delta\sigma+\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\sigma'}-\frac{\delta^2 S}{\delta\tau^2}\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\sigma'}\right)\delta\tau, \tag{23.12}$$

и, следовательно, подставляя эти значения $\delta\sigma'$, $\delta\tau'$ в два последних условия, мы преобразуем их к виду

$$\delta\sigma\left\{\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma'^2}\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau}\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau'}-\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma^2}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\tau'}\right)+\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma'\delta\tau'}\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma^2}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\sigma'}-\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau}\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\sigma'}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\sigma'}\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\sigma'}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\tau'}-\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau'}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\sigma'}\right)\right\}+\delta\tau\left\{\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma'^2}\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\tau^2}\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau'}-\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\tau'}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma'\delta\tau'}\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\sigma'}-\frac{\delta^2 S}{\delta\tau^2}\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\sigma'}\right)+\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\sigma'}\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\sigma'}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\tau'}-\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau'}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\sigma'}\right)\right\}=0,$$

$$\delta\sigma\left\{\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma'\delta\tau'}\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau}\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau'}-\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma^2}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\tau'}\right)+\frac{\delta^2 S}{\delta\tau'^2}\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma^2}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\sigma'}-\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau}\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\sigma'}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau'}\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\sigma'}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\tau'}-\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau'}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\sigma'}\right)\right\}+$$
$$+\delta\tau\left\{\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma'\delta\tau'}\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\tau^2}\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau'}-\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\tau'}\right)+\right.$$
$$+\frac{\delta^2 S}{\delta\tau'^2}\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\sigma'}-\frac{\delta^2 S}{\delta\tau^2}\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\sigma'}\right)+$$
$$\left.+\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\tau'}\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\sigma'}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\tau'}-\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau'}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\sigma'}\right)\right\}=0. \tag{23.13}$$

Исключив еще раз соответствующие переменные, мы получим следующее уравнение между конечной и начальной ординатами z, z', которое в силу вида функ-

ции S квадратично по каждой из ординат в отдельности и содержит произведение их квадратов:

$$\left\{\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma^2}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau^2}-\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau}\right)^2\right\}\left\{\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma'^2}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau'^2}-\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma'\delta\tau'}\right)^2\right\}+$$

$$+\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\sigma'}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\tau'}-\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau'}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\sigma'}\right)^2-\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma'^2}\left\{\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma^2}\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\tau'}\right)^2-2\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau}\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau'}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\tau'}+\right.$$

$$\left.+\frac{\delta^2 S}{\delta\tau^2}\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau'}\right)^2\right\}+2\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma'\delta\tau'}\left\{\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma^2}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\sigma'}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\tau'}-\right.$$

$$\left.-\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau}\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\sigma'}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\tau'}+\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau'}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\sigma'}\right)+\frac{\delta^2 S}{\delta\tau^2}\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\sigma'}\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau'}\right\}-$$

$$-\frac{\delta^2 S}{\delta\tau'^2}\left\{\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma^2}\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\sigma'}\right)^2-2\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau}\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\sigma'}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\sigma'}+\frac{\delta^2 S}{\delta\tau^2}\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\sigma'}\right)^2\right\}. \qquad (23.14)$$

Когда точка пересечения бссконечно близких лучей удаляется на бесконечно большое расстояние, уравнение (23.14) вырождается в следующее:

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma^2}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau^2}-\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma^2}-z\frac{\delta^2 \upsilon}{\delta\sigma^2}\right)\left(\frac{\delta^2 T}{\delta\tau^2}-z\frac{\delta^2 \upsilon}{\delta\tau^2}\right)-\left(\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma\delta\tau}-z\frac{\delta^2 \upsilon}{\delta\sigma\delta\tau}\right)^2=0. \qquad (23.15)$$

Аналогичным образом, когда два бесконечно близких конечных луча становятся параллельными, возникает следующее квадратичное уравнение для определения двух соответствующих положений точки пересечения:

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma'^2}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau'^2}-\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma'\delta\tau'}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{\delta^2 T}{\delta z'^2}+z'\frac{\delta^2 \upsilon'}{\delta\sigma'^2}\right)\left(\frac{\delta^2 T}{\delta\tau'^2}+z'\frac{\delta^2 \upsilon'}{\delta\tau'^2}\right)-\left(\frac{\delta^2 T}{\delta\sigma'\delta\tau'}+z'\frac{\delta^2 \upsilon'}{\delta\sigma'\delta\tau'}\right)^2=0. \qquad (23.16)$$

Каустические поверхности систем прямолинейных лучей, обыкновенных или необыкновенных, были определены в "Первом дополнении", однако представляется полезным изложить здесь предмет с более общих позиций и рассмотреть его методами настоящего мемуара.

Связь условий начального и конечного пересечений двух близких путей света, ломаного или искривленного, с максимумами и минимумами времени, или функции действия $V + V' = \sum\int v\,ds$. Разделяющие плоскости, плоскости и точки перехода, задаваемые максимумами и минимумами. Разделяющие плоскости отгораживают близкие точки с меньшим действием от близких точек с бо́льшим действием и содержат направления соприкосновения или пересечения поверхностей с постоянными V и V'. Плоскости перехода касаются каустических пучков, а точки перехода лежат на каустических кривых. Предельные соприкасающиеся волны и поверхности действия. Закон соприкосновения. Аналогичные теоремы для случая излома луча при отражении или преломлении

24. Существует замечательная связь между условиями начального и конечного пересечения двух близких путей света и максимумами и минимумами интеграла в законе наименьшего действия, т.е. с максимумами и минимумами характеристической функции V, или, точнее, суммы двух таких интегралов или функций. Эта связь может быть исследована следующим образом.

Пусть A, B, C – три последовательные точки, разделенные конечными интервалами, на одном пути света. Пусть прямоугольными координатами этих трех точек будут x', y', z' для A; x, y, z для B и $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ для C. Пусть $V(A, B)$ означает интеграл $\int v\,ds$, взятый от первой точки A до второй точки B; $V(B, C)$ – интеграл, взятый от второй точки B до третьей точки C и аналогично $V(A, C)$ – интеграл, взятый от A до C и равный сумме двух предыдущих интегралов:

$$V(A, C) = V(A, B) + V(B, C). \tag{24.1}$$

Если обозначить для краткости

$$V(A, B) = V, \quad V(B, C) = V_{,}, \tag{24.2}$$

то в силу непрерывности интеграла

$$V(A, C) = V + V_{,}. \tag{24.3}$$

Если мы не предполагаем, что промежуточная точка B есть точка излома при отражении или преломлении, то конечное направление части (A, B) совпадает с начальным направлением части (B, C) и конечные направляющие косинусы α, β, γ первой части равны начальным направляющим косинусам второй части. Следовательно, рассматривая, как обычно, V как функцию от x, y, z, x', y', z', χ, а $V_{,}$ как функцию от $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, x, y, z, χ, мы в силу нашей основной формулы (1.1) получаем

$$\frac{\delta V}{\delta x} = \frac{\delta \upsilon}{\delta \alpha} = -\frac{\delta V_{,}}{\delta x}, \quad \frac{\delta V}{\delta y} = \frac{\delta \upsilon}{\delta \beta} = -\frac{\delta V_{,}}{\delta y}, \quad \frac{\delta V}{\delta z} = \frac{\delta \upsilon}{\delta \gamma} = -\frac{\delta V_{,}}{\delta z}, \tag{24.4}$$

т. е.

$$\delta V + \delta V_{,} = 0 \tag{24.5}$$

для любых вариаций координат x, y, z и, следовательно, с точностью до величин

первого порядка выполняется равенство

$$V(A, B') + V(B', C) = V(A, B) + V(B, C) = V(A, C), \tag{24.6}$$

где B' – любая новая промежуточная точка, бесконечно близкая к B, и путь (B', C) в общем случае не является продолжением пути (A, B'). Следовательно, если начальную и конечную точки A, C считать неподвижными, а промежуточную точку B – переменной и не обязательно расположенной на пути (A, C), то функция $V + V_{,}$, или $\int v ds$, состоящая из двух частичных и теперь не обязательно непрерывных интегралов (24.2), принимает то, что можно было бы назвать *стационарным значением*, когда пути (A, B) и (B, C) становятся непрерывными, т.е. когда промежуточная точка B занимает любое положение на пути (A, C) от его начальной до его конечной точки, так как изменение этой функции оказывается бесконечно малой второго порядка при любом бесконечно малом изменении BB' первого порядка в положении точки B. Определенное таким образом стационарное значение $V(A, C)$ можно было бы назвать *максимумом* или *минимумом* функции $V + V_{,}$, действуя в духе того же широкого толкования терминов, которое позволило нам принять термин *наименьшее действие*. Но для того, чтобы это значение действительно было бы больше (или меньше) всех достаточно близких значений, необходимо новое условие. Чтобы найти это новое условие, можно заметить следующее: соотношения

$$\alpha\frac{\delta^2 V}{\delta x^2}+\beta\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y}+\gamma\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta z}=\frac{\delta v}{\delta x}=-\left(\alpha\frac{\delta^2 V_{,}}{\delta x^2}+\beta\frac{\delta^2 V_{,}}{\delta x\delta y}+\gamma\frac{\delta^2 V_{,}}{\delta x\delta z}\right),$$

$$\alpha\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y}+\beta\frac{\delta^2 V}{\delta y^2}+\gamma\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta z}=\frac{\delta v}{\delta y}=-\left(\alpha\frac{\delta^2 V_{,}}{\delta x\delta y}+\beta\frac{\delta^2 V_{,}}{\delta y^2}+\gamma\frac{\delta^2 V_{,}}{\delta y\delta z}\right),$$

$$\alpha\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta z}+\beta\frac{\delta^2 V}{\delta y\delta z}+\gamma\frac{\delta^2 V}{\delta z^2}=\frac{\delta v}{\delta z}=-\left(\alpha\frac{\delta^2 V_{,}}{\delta x\delta z}+\beta\frac{\delta^2 V_{,}}{\delta y\delta z}+\gamma\frac{\delta^2 V_{,}}{\delta z^2}\right), \tag{24.7}$$

вытекающее из п. 3, приводят к соотношению

$$\delta^2 V+\delta^2 V_{,}=\left(\frac{\delta^2 V}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 V_{,}}{\delta x^2}\right)\left(\delta x-\frac{\alpha}{\gamma}\delta z\right)^2+\left(\frac{\delta^2 V}{\delta y^2}+\frac{\delta^2 V_{,}}{\delta y^2}\right)\left(\delta y-\frac{\beta}{\gamma}\delta z\right)^2+$$
$$+2\left(\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y}+\frac{\delta^2 V_{,}}{\delta x\delta y}\right)\left(\delta x-\frac{\alpha}{\gamma}\delta z\right)\left(\delta y-\frac{\beta}{\gamma}\delta z\right). \tag{24.8}$$

Таким образом, *условие существования максимума или минимума* (названных так с полным основанием) *функции* $V + V_{,}$ сводится к неравенству

$$Q>0,\quad \text{если}\quad Q=\left(\frac{\delta^2 V}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 V_{,}}{\delta x^2}\right)\left(\frac{\delta^2 V}{\delta y^2}+\frac{\delta^2 V_{,}}{\delta y^2}\right)-\left(\frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y}+\frac{\delta^2 V_{,}}{\delta x\delta y}\right)^2. \tag{24.9}$$

Наоборот, если

$$Q < 0, \tag{24.10}$$

то вариация второго порядка $\delta^2 V + \delta^2 V_,$ претерпевает смену знака при переходе от одного набора значений δx, δy, δz к другому, т.е. при переходе от одной близкой точки B' к другой. А так как с точностью до величин второго порядка

$$V(A, B') + V(B', C) - V(A, C) = {}^1\!/_2(\delta^2 V + \delta^2 V_,), \tag{24.11}$$

то должно выполняться какое-то одно из двух следующих противоположных неравенств:

$$V(A, B') + V(B', C) > \quad \text{или} \quad < V(A, C) \tag{24.12}$$

в зависимости от того, в какой из пар противоположных двугранных углов, образованных двумя разделяющими плоскостями P', P'', задаваемыми уравнением

$$\delta^2 V + \delta^2 V_, = 0, \tag{24.13}$$

лежит близкая точка B'. В силу соотношения (24.8) уравнение (24.13) квадратично по отношению

$$\frac{\delta y - (\beta/\gamma)\delta z}{\delta x - (\alpha/\gamma)\delta z}.$$

Каждая из двух разделяющих плоскостей P', P'' содержит линию луча, или элемент пути (A, B, C), в точке B. Они разделяют точки с меньшим действием от точек с бóльшим действием, или точки с меньшим временем от точек с бóльшим временем, в том случае, когда непрерывный интеграл $V + V_, = V(A, C)$ не больше (или не меньше) чем все соседние значения суммы $\sum\int v ds$.

Направления этих плоскостей зависят от положения точек A, B, C, поэтому если мы будем считать, что точки A и B неподвижны, а точка C движется вдоль продолжения (B, C) пути (A, B), то разделяющие плоскости P', P'', вообще говоря, будут поворачиваться вокруг линии луча в точке B. Они даже станут мнимыми, когда при движении точки C величина Q, бывшая меньше нуля, станет больше нуля, тем самым удовлетворив условию существования максимума или минимума функции $V + V_,$. При таком переходе из вещественного в мнимое состояние две разделяющие плоскости P', P'' сливаются в одну вещественную *плоскость перехода P*, определяемую любым из следующих двух уравнений:

$$\left(\frac{\delta^2 V}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 V_,}{\delta x^2}\right)\left(\delta x - \frac{\alpha}{\gamma}\delta z\right) + \left(\frac{\delta^2 V}{\delta x \delta y} + \frac{\delta^2 V_,}{\delta x \delta y}\right)\left(\delta y - \frac{\beta}{\gamma}\delta z\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\delta^2 V}{\delta x \delta y} + \frac{\delta^2 V_,}{\delta x \delta y}\right)\left(\delta x - \frac{\alpha}{\gamma}\delta z\right) + \left(\frac{\delta^2 V}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 V_,}{\delta y^2}\right)\left(\delta y - \frac{\beta}{\gamma}\delta z\right) = 0, \tag{24.14}$$

в то время как соответствующее положение точки C, которое мы по аналогии можем назвать ***точкой перехода*** [21], удовлетворяет условию $Q = 0$, т.е.

$$\left(\frac{\delta^2 V}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 V_,}{\delta x^2}\right)\left(\frac{\delta^2 V}{\delta y^2}+\frac{\delta^2 V_,}{\delta y^2}\right)=\left(\frac{\delta^2 V}{\delta x \delta y}+\frac{\delta^2 V_,}{\delta x \delta y}\right)^2. \tag{24.15}$$

Теперь мы уже подготовлены к тому, чтобы воспринять замечательную связь между плоскостями перехода и точками перехода, к которой нас привело рассмотрение максимумов и минимумов функции $V + V_,$ и условия конечного и начального пересечения двух близких путей света. Действительно, эти условия пересечения можно получить, предположив, что не только точка B с координатами x, y, z принадлежит данному пути (A, C) и поэтому удовлетворяет уравнениям (24.4), но и бесконечно близкая точка B' с координатами $X + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ принадлежит другому пути с тем же показателем цвета, соединяющему те же начальную и конечную точки A и C, в силу чего выполняются дифференциальные уравнения

$$\delta\frac{\delta V}{\delta x}=-\delta\frac{\delta V_,}{\delta x}, \quad \delta\frac{\delta V}{\delta y}=-\delta\frac{\delta V_,}{\delta y}, \quad \delta\frac{\delta V}{\delta z}=-\delta\frac{\delta V_,}{\delta z}. \tag{24.16}$$

А так как последние уравнения с помощью уравнений (24.14) можно свести к соотношениям (24.7), мы видим, что, когда условия начального и конечного пересечения данного пути (A, B, C) с близким путем (A', B', C') выполнены и начальная точка A считается неподвижной, близкая промежуточная точка B' должна находиться в плоскости перехода P, задаваемой уравнениями типа (24.14), а конечная точка пересечения C должна быть точкой перехода, задаваемой условием типа (24.15). Следовательно, продолжая рассматривать начальную точку A как неподвижное начало системы путей света, ломаных или искривленных, с любым общим показателем цвета, претерпевающих любое число преломлений или отражений, обыкновенных или необыкновенных и постепенных или внезапных, мы, как нетрудно видеть, можем рассматривать эти пути как касающиеся некоторого набора ***каустических кривых*** в конечном состоянии системы и, следовательно, как сгруппированные в некоторые множества последовательно пересекающихся путей и имеющие своими геометрическими местами соответствующие семейства поверхностей лучей, которые можно назвать ***каустическими пучками. Этих каустических пучков касаются поверхности перехода*** (24.14), в то время как ***точки перехода*** (24.15) ***расположены на каустических кривых*** и, следовательно, принадлежат их геометрическим местам – каустическим поверхностям. Ясно также, что точки перехода являются точками последовательных пересечений, или вергенции, путей света из точки A в конечное состояние системы. Из предыдущих замечаний понятно, что эти конечные точки пересечения являются также точками перехода в следующем другом смысле: когда точка C, двигаясь по продолжению пути (A, B), достигает любой из этих точек пересечения, условие существования максимума или минимума функции $V + V_,$ начинает или перестает выполняться.

Разделяющие плоскости P', P'', когда они вещественны, обладают еще одним замечательным свойством: они содержат направления взаимного соприкосновения в точке B двух поверхностей действия, или волн, определяемых уравнениями

$$V = \text{const}, \qquad V_, = \text{const}. \tag{24.17}$$

Действительно, эти уравнения можно приближенно представить в следующем виде (если выбрать точку B за начало, а конечное направление пути (A, B) за положительную полуось z, так, что $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$):

$$z = px + qy + \tfrac{1}{2}rx^2 + sxy + \tfrac{1}{2}ty^2,$$
$$z_, = p_,x + q_,y + \tfrac{1}{2}r_,x^2 + s_,xy + \tfrac{1}{2}t_,y^2, \tag{24.18}$$

Коэффициенты уравнений (24.18) связаны между собой соотношениями

$$p_, = p, \quad q_, = q,$$
$$r_, - r = \frac{1}{v}\left(\frac{\delta^2 V_,}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta x^2}\right), \quad s_, - s = \frac{1}{v}\left(\frac{\delta^2 V_,}{\delta x \delta y} + \frac{\delta^2 V}{\delta x \delta y}\right),$$
$$t_, - t = \frac{1}{v}\left(\frac{\delta^2 V_,}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta y^2}\right), \tag{24.19}$$

и поэтому плоскости

$$(r_, - r)x^2 + 2(s_, - s)xy + (t_, - t)y^2 = 0, \tag{24.20}$$

проходящие через данную линию луча в точке B и содержащие направления соприкосновения второго порядка двух касающихся поверхностей (24.17) или (24.18), являются разделяющими плоскостями (24.13). Мы могли бы также охарактеризовать эти разделяющие плоскости, или плоскости соприкосновения, как содержащие направления взаимного пересечения тех двух касающихся поверхностей, для которых V и $V_,$ – постоянные, или как плоскости, для которых прогибы этих двух поверхностей равны (а линия луча в точке B принята за ось уклонения).

Сравнение тех же двух волн, или поверхностей действия (24.17), обнаруживает новое свойство плоскостей и точек перехода. Действительно, уравнения, определяющие плоскость и точку перехода, можно представить в виде

$$(r - r_,)x + (s - s_,)y = 0, \quad (s - s_,)x + (t - t_,)y = 0, \tag{24.21}$$

или $\delta p_, = \delta p$, $\quad \delta q_, = \delta q$.

Следовательно, они означают, что, когда C – точка перехода, две поверхности (24.17) касаются друг друга, но только не в точке B, а на всем протяжении бесконечно малой дуги, лежащей в плоскости перехода.

Точку C можно назвать *фокусом* второй волны или поверхности действия $V_,$, так как в ней по предположению пересекаются все соответствующие пути света

(B', C). Аналогичным образом точку A можно назвать фокусом первой поверхности V того же рода, так как все пути (A, B') по предположению расходятся из точки A. Оставляя неподвижными фокус A и точку соприкосновения B, мы можем менять фокус C и тем самым направления соприкосновения. Однако в общем случае существуют некоторые *граничные или предельные положения для соприкасающегося фокуса C, соответствующие предельным соприкасающимся волнам, или поверхностям действия $V_,$. Нетрудно показать, что эти предельные соприкасающиеся фокусы совпадают с точками перехода, или точками вергенции, и что плоскости перехода, или касательные плоскости каустических пучков, содержат направления такого граничного, или предельного, соприкосновения.*

Эти теоремы о пересечении и соприкосновении включают в себя несколько менее общих теорем того же рода, сформулированных в предыдущих мемуарах. Как нетрудно видеть, они допускают обобщение на случай, когда точки A, B, C на пути света располагаются в ином порядке: точка B не лежит между A и C, и пути (A, B), (A, B'), ведущие из точки A в точки B и B', совпадают в этих точках с путями (C, B), (C, B'), а не с противоположными путями (B, C), (B', C), т.е. направлены *от* точки C, а не *к* ней. Заметим только, что при этом необходимо использовать *разность*, а не *сумму* двух интегралов $\int v ds$, или двух функций V и $V_,$.

Если точка C расположена на данном прямолинейном луче в данной однородной среде, то, как нетрудно доказать с помощью изложенной в предыдущих пунктах теории частных производных второго порядка характеристической и связанных с ней функций, уравнение (24.15) становится квадратичным относительно $z_,$ или $V_,$ и задает, вообще говоря, два вещественных или мнимых положения C_1, C_2 для точки перехода, или точки вергенции, а уравнение (24.14) задает две соответствующие вещественные или мнимые плоскости перехода P_1, P_2 или касательные плоскости каустических пучков. Если, кроме того, обе точки B, C находятся в одной общей однородной среде так, что пути (B, C), (B', C) прямолинейны, то каждый из каустических пучков, или поверхностей лучей, состоящих из таких прямолинейных путей, которые последовательно пересекают друг друга и касаются одной каустической кривой, становится *линейчатым пучком*, а его касательная плоскость – *плоскостью вергенции* того типа, который рассмотрен в п. 16. Соотношения между двумя плоскостями вергенции в конечной однородной среде, о которых мы упоминали в п. 21, нетрудно вывести из излагаемого в этом разделе более общего подхода и сформулированных выше теорем о соприкосновении.

Действительно, при таком подходе мы приходим к рассмотрению серии волн, или поверхностей действия, $V_,$ подобных и подобно расположенных, и определяемых по форме, но не по размеру или фокусу, однородной средой, и последующему нахождению граничных, или предельных, поверхностей этого семейства, соприкасающихся с данной поверхностью V в данной точке B. А так как можно показать, что *в общем случае в любом семействе поверхностей, подобных и подобно расположенных, но имеющих произвольные размеры и соприкасающихся с данной поверхностью в данной точке, существуют две предельные соприкасающиеся поверх-*

ности, вещественные или мнимые, и что касательные, указывающие два соответствующих направления соприкосновения, являются сопряженными касательными (типа открытых Дюпеном) *на каждой поверхности соприкасающегося семейства, а также на данной поверхности*, мы, как и прежде, заключаем, что сопряженные плоскости вергенции в конечной однородной среде являются сопряженными плоскостями прогиба каждой поверхности среды V_t, а также поверхности V, определяемой всей комбинацией. Если конечная среда обыкновенная и однородная, то соприкасающиеся поверхности V_t – сферы и направления предельного соприкосновения являются ортогональными направлениями линий кривизны на поверхности V_t, которая теперь ортогональна лучам.

Следовательно, в этом случае и в более общем, когда данный конечный луч в конечной однородной среде соответствует *омбилической точке*, или точке сферической кривизны, на поверхности среды V_t, плоскости вергенции пересекают эту поверхность и поверхность V_t, с которой она соприкасается, по двум ортогональным направлениям, так как две сопряженные касательные в омбилической точке всегда расположены под прямым углом друг к другу. Аналогичным образом плоскости вергенции, будучи сопряженными плоскостями прогиба (см. п. 17), ортогональны, если конечный луч, обыкновенный или необыкновенный, таков, что приняв его за ось уклонения поверхности среды V_t, мы получим круговой индикатрисный цилиндр уклонения.

Изложенные выше принципы приводят также к *закону соприкосновения* переменной поверхности среды V_t между ее предельными положениями в конечной однородной среде, который гласит: *расстояния переменного соприкасающегося фокуса от двух точек вергенции пропорциональны квадратам синусов углов наклона переменной плоскости соприкосновения к двум плоскостям вергенции, умноженным на некоторые постоянные коэффициенты.* Формула, выражающая этот закон, была выведена в "Первом дополнении", но постоянные и, вообще говоря, неравные коэффициенты (в формуле – ζ и 1) при квадратах синусов углов наклона в объяснении по недосмотру были опущены. Методы, которыми мы располагаем теперь, позволяют нам без труда исследовать этот закон для более сложного случая, когда соприкасающийся фокус C по-прежнему находится в однородной среде, точка соприкосновения B находится в другой однородной среде или даже в атмосфере, обыкновенной или необыкновенной.

Рассуждения этого раздела мы могли бы распространить на случай резкого отражения или преломления, обыкновенного или необыкновенного, и получить аналогичные результаты, которые включали бы в себя результаты предыдущих мемуаров. В этом случае нам пришлось бы найти аналогичное условие существования максимума или минимума функции $\sum\int v\,ds$. Если бы это условие не выполнялось, то мы должны были бы рассмотреть *две пары разделяющих плоскостей*, пересекающих касательную плоскость отражающей или преломляющей поверхности по одной общей паре *разделяющих линий*: две пары плоскостей, одновременно переходящих из вещественного состояния в мнимое и при этом сливающихся в *две*

плоскости, которые касаются каустического пучка до и после резкого отражения или преломления и пересекаются по одной общей *линии перехода на касательной плоскости рефлектора или рефрактора*, связанной с *точкой перехода на каустической кривой пучка* и с некоторыми *предельными соприкасающимися волнами, или поверхностями действия, и фокальными рефлекторами или рефракторами* такого типа, который легко может быть выведен по аналогии из предыдущих результатов.

Формулы для главных фокусов и главных лучей прямой или искривленной системы, обыкновенной или необыкновенной. Общий метод исследования относительного расположения и аберраций лучей вблизи главного фокуса или другой точки вергенции

25. Среди различных точек последовательного пересечения лучей оптической системы существуют в общем случае выделенные точки вергенции, в которых каждый из нескольких выделенных лучей света пересекается со всеми бесконечно близкими путями системы. Эти выделенные точки и пути были отмечены в моих предыдущих мемуарах и названы *главными фокусами* и *главными лучами*. Для прямолинейных конечных систем они могут быть определены характеристической функцией V и тремя из шести следующих уравнений:

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x^2}+\frac{1}{R}\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha^2}=0,\qquad \frac{\delta^2 V}{\delta x\delta y}+\frac{1}{R}\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\alpha\delta\beta}=0,$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta y^2}+\frac{1}{R}\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\beta^2}=0,\qquad \frac{\delta^2 V}{\delta y\delta z}+\frac{1}{R}\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\beta\delta\gamma}=0,$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta z^2}+\frac{1}{R}\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\gamma^2}=0,\qquad \frac{\delta^2 V}{\delta z\delta x}+\frac{1}{R}\frac{\delta^2 \mathrm{v}}{\delta\gamma\delta\alpha}=0, \tag{25.1}$$

где x, y, z – координаты любой точки на главном луче; $x+\alpha R$, $y+\beta R$, $z+\gamma R$ – координаты главного фокуса. Они могут быть также выведены из вспомогательной функции W, если та однородная степени 1 по σ, τ, υ, с помощью уравнений

$$\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma^2}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma^2}=0,\qquad \frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta\tau}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\tau}=0,$$

$$\frac{\delta^2 W}{\delta\tau^2}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\tau^2}=0,\qquad \frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta\upsilon}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\sigma\delta\upsilon}=0,$$

$$\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon^2}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon^2}=0,\qquad \frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\delta\sigma}+V\frac{\delta^2\Omega}{\delta\upsilon\delta\sigma}=0, \tag{25.2}$$

из которых только три различны, и V соответствует фокусу, или из функции T, выра-

женной чрез переменные σ, τ, σ', τ', χ, с помощью уравнений

$$\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma'^2}\right)^{-1}\left\{\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma^2}\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\sigma'}\right)^2-2\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau}\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\sigma'}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\sigma'}+\frac{\delta^2 S}{\delta\tau^2}\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\sigma'}\right)^2\right\}=$$

$$=\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma'\delta\tau'}\right)^{-1}\left\{\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma^2}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\sigma'}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\tau'}-\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau}\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\sigma'}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\tau'}+\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau'}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\sigma'}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\delta^2 S}{\delta\tau^2}\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\sigma'}\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau'}\right\}=\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\tau'^2}\right)^{-1}\left\{\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma^2}\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\tau'}\right)^2-2\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau}\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau'}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau\delta\tau'}+\right.$$

$$\left.+\frac{\delta^2 S}{\delta\tau^2}\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau'}\right)^2\right\}=\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma^2}\frac{\delta^2 S}{\delta\tau^2}-\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\sigma\delta\tau}\right)^2, \qquad (25.3)$$

где, как и прежде[8], $S = T - z\upsilon + z'\upsilon'$.

Если конечная среда неоднородна, то мы можем воспользоваться следующими уравнениями:

$$\frac{\delta^2 W/\delta\sigma^2}{(\delta\Omega/\delta\sigma)^2}=\frac{\delta^2 W/\delta\tau^2}{(\delta\Omega/\delta\tau)^2}=\frac{\delta^2 W/\delta\upsilon^2}{(\delta\Omega/\delta\upsilon)^2}=$$

$$=\frac{\delta^2 W/\delta\sigma\delta\tau}{(\delta\Omega/\delta\sigma)(\delta\Omega/\delta\tau)}=\frac{\delta^2 W/\delta\tau\delta\upsilon}{(\delta\Omega/\delta\tau)(\delta\Omega/\delta\upsilon)}=\frac{\delta^2 W/\delta\upsilon\delta\sigma}{(\delta\Omega/\delta\upsilon)(\delta\Omega/\delta\sigma)}=$$

$$=-\left(\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\frac{\delta\Omega}{\delta x}+\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\frac{\delta\Omega}{\delta y}+\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\frac{\delta\Omega}{\delta z}\right)^{-1}, \qquad (25.4)$$

или

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma^2}=\frac{1}{\beta^2}\frac{\delta^2 W}{\delta\tau^2}=\frac{1}{\gamma^2}\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon^2}=$$

$$=\frac{1}{\alpha\beta}\frac{\delta^2 W}{\delta\sigma\delta\tau}=\frac{1}{\beta\gamma}\frac{\delta^2 W}{\delta\tau\delta\upsilon}=\frac{1}{\gamma\alpha}\frac{\delta^2 W}{\delta\upsilon\delta\sigma}=\left(\alpha\frac{\delta v}{\delta x}+\beta\frac{\delta v}{\delta y}+\gamma\frac{\delta v}{\delta z}\right)^{-1},$$

из которых только три различны, но которые достаточны для определения *главных фокусов* и *главных лучей искривленной системы, обыкновенной или необыкновенной,* с помощью вспомогательной функции W, рассматриваемой как зависящая от σ, τ, υ, x', y', z', χ в соответствии с новым взглядом на эту функцию, изложенным в настоящем "Дополнении". Для той же цели можно было бы воспользоваться и новой функцией T, хотя обращаться с ней несколько труднее.

[8] См. соотношение (23.10).

В предыдущем разделе мы заметили, что в точке вергенции общие линейные выражения для соотношений между близкими лучами утрачивают смысл. Но более сложные выражения, которыми эти линейные формы должны быть заменены в главном фокусе или в другой точке вергенции,и в общем случае, когда они предлагаются для определения поправок на аберрацию соотношений в первом приближении или предельных соотношений, могут быть всегда без труда получены путем разложения до требуемого порядка точности общих и строгих уравнений, приведенных нами выше для пути света. С примером такого вывода мы встречаемся, когда приходим к рассмотрению теории *инструментов вращения*, которую ввиду ее обширности и важности следует отложить до другого случая.

Связь изложенного мной взгляда на оптику с волновой теорией света. Величины σ, τ, υ или $\delta V/\delta x$, $\delta V/\delta y$, $\delta V/\delta z$, т.е. частные производные первого порядка характеристической функции V по координатам конечной точки, являются в волновой теории света компонентами нормальной медленности распространения волны. Основная формула (1.1) *может быть легко объяснена и доказана исходя из принципов волновой теории*

26. Во исполнение замысла, провозглашенного в начале настоящего "Дополнения", нам остается проиллюстрировать изложенный в нем и в предыдущих мемуарах математический взгляд на оптику, связав его более тесно с волновой теорией света.

Для этого мы начнем с рассмотрения волнового смысла символов σ, τ, υ, которыми мы столь часто пользовались в настоящем "Дополнении" и которые были определены соотношениями (2.4)

$$\sigma = \frac{\delta V}{\delta x}, \quad \tau = \frac{\delta V}{\delta y}, \quad \upsilon = \frac{\delta V}{\delta z},$$

где V – волновое время распространения света некоторого данного цвета от начала x', y', z' до точки x, y, z через любую комбинацию сред. Ясно, что эти величины σ, τ, υ пропорциональны направляющим косинусам нормали к волне, для которой время V постоянно и дифференциальное уравнение имеет вид

$$\delta V = \sigma\delta x + \tau\delta y + \upsilon\delta z = 0. \qquad (26.1)$$

Если, как в п. 2, мы обозначим $(\sigma^2 + \tau^2 + \upsilon^2)^{-\frac{1}{2}}$ через ω, то сами эти направляющие косинусы окажутся равными $\sigma\omega, \tau\omega, \upsilon\omega$ и величина ω будет *нормальной скоростью*, так как бесконечно малое время δV, за которое волна распространяется в направлении своей собственной нормали по бесконечно малому отрезку δl из точки x, y, z в точку $x + \sigma\omega$, $y + \tau\omega$, $z + \upsilon\omega$, определяется выражением

$$\delta V = \sigma\,\sigma\omega\;\delta l + \tau\,\tau\omega\;\delta l + \upsilon\,\upsilon\omega\;\delta l = \omega^{-1}\delta l. \qquad (26.2)$$

Следовательно, величины σ, τ, υ можно назвать *составляющими нормальной медленности*, так как они равны величине, обратной нормальной скорости, т.е. *нормальной медленности, умноженной соответственно на направляющие косинусы*

нормали, т.е. на косинусы углов, образуемых ею с прямоугольными осями координат.

Вот что можно сказать относительно оптического смысла наших величин σ, τ, υ в теории распространения света волнами. Из этого смысла и из первых принципов волновой теории мы могли бы без труда вывести общее выражение (1.1) для вариации характеристической функции V, предложенное в настоящем и предыдущих мемуарах как фундаментальное в математической оптике. Действительно, из динамических идей волновой теории света непосредственно следует, что для плоской волны с данным направлением и цветом в данной однородной среде нормальная скорость распространения определена или по крайней мере ограничена конечным набором значений.

Таким образом, нормальную скорость можно рассматривать как функцию ее направляющих косинусов и показателя цвета. Вид функции зависит от природы однородной среды и расположения осей координат, к которым отнесены направляющие косинусы. Если среда, вместо того чтобы быть однородной, неоднородна, а волна не плоская, а искривленная, то нам все равно следует исходить из предположения, что ω – функция своих направляющих косинусов $\sigma(\sigma^2+\tau^2+\upsilon^2)^{-1/2}$, $\tau(\sigma^2+\tau^2+\upsilon^2)^{-1/2}$, $\upsilon(\sigma^2+\tau^2+\upsilon^2)^{-1/2}$ и показателя цвета χ и зависит, кроме того, в этом более общем случае от координат x, y, z. Так общие принципы волновой теории приводят нас к соотношению между $\sigma, \tau, \upsilon, x, y, z, \chi$ того рода, который уже часто использовался в настоящем "Дополнении", а именно к (2.11)

$$\Omega = (\sigma^2+\tau^2+\upsilon^2)^{1/2}\omega - 1 = 0,$$

где $\Omega + 1$ – однородная функция от σ, τ, υ степени 1, удовлетворяющая поэтому условию

$$\sigma\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}+\tau\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}+\upsilon\frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}=\Omega+1$$

и зависящая также в общем случае от координат x, y, z и показателя цвета χ. Вид Ω зависит от оптических свойств среды, в которой находится точка x, y, z. Для того чтобы для любой точки и цвета связать *скорость и направление луча с направлением нормали к волне,* мы можем сначала предположить, что среда однородная и волна плоская. Два положения этой плоской волны – в момент времени V и в момент времени $V + \Delta V$ – можно обозначить уравнениями:

$$\text{первое:}\quad \sigma x + \tau y + \upsilon z = V + W,$$

$$\text{второе:}\quad \sigma\Delta x + \tau\Delta y + \upsilon\Delta z = \Delta V, \tag{26.3}$$

где $\sigma, \tau, \upsilon, W$ – постоянные. Согласно принципам той же волновой теории если точка $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ на второй плоской волне, соответствующей моменту времени $V + \Delta V$, находится на луче, проходящем через точку x, y, z первой плоской волны, то она также принадлежит всем другим бесконечно близким плоским волнам, соответствующим тому же моменту времени $V + \Delta V$. Эти волны проходили через

точку x, y, z в момент времени V и составляли бесконечно малые углы с первой плоской волной. Следовательно, нам необходимо найти координаты $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ второй точки на луче, отыскивая пересечение второй волны (26.3) со всеми другими волнами, которые получаются из нее, если придать σ, τ, υ любые бесконечно малые вариации, согласующиеся с соотношением

$$\delta\Omega = \frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}\delta\sigma + \frac{\delta\Omega}{\delta\tau}\delta\tau + \frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}\delta\upsilon = 0.$$

Действуя так, мы получаем

$$\frac{\alpha}{\mathrm{v}} = \frac{\Delta x}{\Delta V} = \frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}, \quad \frac{\beta}{\mathrm{v}} = \frac{\Delta y}{\Delta V} = \frac{\delta\Omega}{\delta\tau}, \quad \frac{\gamma}{\mathrm{v}} = \frac{\Delta z}{\Delta V} = \frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon}, \tag{26.4}$$

как в п. 2 настоящего "Дополнения", и, следовательно,

$$\mathrm{v} = \alpha\sigma + \beta\tau + \gamma\upsilon, \quad \alpha\delta\sigma + \beta\delta\tau + \gamma\delta\upsilon = 0, \quad \delta\mathrm{v} = \sigma\delta\alpha + \tau\delta\beta + \upsilon\delta\gamma$$

и, наконец,

$$\frac{\delta\mathrm{v}}{\delta\alpha} = \sigma, \quad \frac{\delta\mathrm{v}}{\delta\beta} = \tau, \quad \frac{\delta\mathrm{v}}{\delta\gamma} = \upsilon, \tag{26.5}$$

если мы обозначим через v величину, обратную волновой скорости, с которой свет распространяется вдоль луча, и через α, β, γ косинусы углов, образуемых этим лучом с осями координат. Таким образом, из приведенного выше рассуждения, которое нетрудно распространить на случай искривленных волн и неоднородных сред, мы видим, что *составляющие* σ, τ, υ *нормальной медленности волны, или частные производные первого порядка функции-времени* V, *равны частным производным первого порядка* $\delta\mathrm{v}/\delta\alpha$, $\delta\mathrm{v}/\delta\beta$, $\delta\mathrm{v}/\delta\gamma$ *волновой медленности* v *распространения вдоль луча, если последняя, т.е. медленность, выражена как однородная функция степени* 1 *от направляющих косинусов* α, β, γ *луча*. Это общая теорема математической оптики, выраженная нашей основной формулой (1.1).

Эта общая теорема, насколько известно, не была замечена другими авторами. Не были рассмотрены ими в явном виде ни составляющие нормальной медленности, ни функция, частные производные которой являются этими составляющими, т.е. время V распространения света от одной переменной точки до другой через любую комбинацию однородных или неоднородных сред, рассматриваемая как зависящая от координат конечной и начальной точек и от показателя цвета. Еще меньше помышляли те, кто до сих пор писал о свете, *о функции-времени V как о* ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ, *к исследованию которой могут быть сведены все задачи математической оптики*. Но задача об установлении с помощью общих уравнений связи между направлением и скоростью луча и направлением и законом нормальной скорости волны была изящно решена г-ном Коши в 50-м выпуске "Exercices de mathématiques"[9], и, как нетрудно показать, формулы,

---

[9] *Cauchy A.L.* Oeuvres complètes. Paris, 1911. Sér. 2. T. 12. P. 113 et seq.

которые были выведены там путем рассмотрения нормальной скорости как однородной функции степени 1 трех ее направляющих косинусов, согласуются с соотношениями (26.4).

Теория Френеля. Новые формулы, выведенные на основе этой теории для скоростей и поляризаций плоской волны и элемента волны. Новый метод вывода уравнения искривленной волны Френеля, распространяющейся из точки в однородной среде, упругость которой неодинакова по трем взаимно перпендикулярным направлениям. Линии единственной скорости луча и единственной нормальной скорости, открытые Френелем

27. Рассмотрим теперь более подробно волновую теорию Френеля.

В этой теории малые смещения колеблющихся точек эфира ограничены поверхностью волны, а эфир предполагается по существу несжимаемым и поэтому сопротивляющимся и препятствующим любому сколько-нибудь ощутимому нормальному колебанию. Что же касается тангенциальных сил, управляющих тангенциальными или поперечными колебаниями, то они в общем случае обусловлены упругостью эфира в сочетании с упомянутым выше нормальным сопротивлением. Предполагается также, что эфирная среда обладает, вообще говоря, тремя главными неравными коэффициентами упругости, соответствующими смещениям в направлениях трех взаимно ортогональных осей упругости; если мы выбираем последние за оси координат, то любые малые составляющие смещений δx, δy, δz, параллельные этим трем осям, порождают упругие силы $-a^2\delta x$, $-b^2\delta y$, $-c^2\delta z$, параллельные тем же осям и равные смещениям, взятым с противоположными знаками и умноженным на постоянные положительные коэффициенты a^2, b^2, c^2. Любое малое результирующее смещение δl в любом другом направлении, имеющее δx, δy, δz своими составляющими, или проекциями, порождает упругую силу $-E\delta l$, которая имеет составляющие $-a^2\delta x$, $-b^2\delta y$, $-c^2\delta z$ и направление, вообще говоря, отличное от направления смещения δl или прямо противоположного ему направления. Свет, поляризованный в любой плоскости P, по предположению соответствует колебаниям, перпендикулярным этой плоскости, и распространяется без изменения направления. Для того чтобы колебание сохраняло свое направление неизменным, в то время как плоская волна или элемент волны, которым оно принадлежит, распространялись по однородной среде с нормальной скоростью ω, необходимо и достаточно следующее условие: упругая сила $-E\delta l$ в сочетании с нормальным сопротивлением, возникающим из-за несжимаемости эфира, должна порождать тангенциальную силу $-\omega^2\delta l$ в направлении, противоположном смещению δl, равную по величине этому смещению, взятому с обратным знаком и умноженному на квадрат нормальной скорости распространения, т.е. имеющую своими составляющими величины $-\omega^2\delta x$, $-\omega^2\delta y$, $-\omega^2\delta z$; иначе говоря, должны выполняться соотношения

$$\frac{1}{\sigma}(\omega^2 - a^2)\delta x = \frac{1}{\tau}(\omega^2 - b^2)\delta y = \frac{1}{\upsilon}(\omega^2 - c^2)\delta z, \tag{27.1}$$

где σ, τ, υ, как и прежде, – составляющие нормальной медленности, в силу чего уравнение элемента волны, содержащего поперечное колебание, имеет вид (26.1)

$\sigma\delta x + \tau\delta y + \upsilon\delta z = 0.$

Уравнений (26.1), (27.1) *в общем случае достаточно, чтобы по принципу Френеля определить скорости распространения и плоскость поляризации для любого данного элемента волны в любой известной кристаллической среде* [22].

Исключая составляющие смещения δx, δy, δz из уравнений (26.1), (27.1), мы находим следующий *закон нормальной скорости* ω, рассматриваемой как функция направления нормали, т.е. отношений величин σ, τ, υ:

$$\frac{\sigma^2}{\omega^2 - a^2} + \frac{\tau^2}{\omega^2 - b^2} + \frac{\upsilon^2}{\omega^2 - c^2} = 0. \tag{27.2}$$

Следовательно, чтобы найти *направление и скорость луча для любого данного направления нормали и любой нормальной скорости,* совместимых с приведенным выше законом, т.е. при любых данных значениях составляющих нормальной медленности σ, τ, υ, совместимых с соотношением (27.2), необходимо воспользоваться соотношением (2.11) и положить

$$w^2 = (\Omega + 1)^2 / (\sigma^2 + \tau^2 + \upsilon^2), \tag{27.3}$$

после чего мы по формулам (2.8) или (26.4) получаем следующие выражения для составляющих скорости луча:

$$\frac{\alpha}{\mathrm{v}} = \frac{\delta\Omega}{\delta\sigma} = \frac{\sigma\omega^2}{\Omega+1}\frac{\lambda^2 - a^2}{\omega^2 - a^2},$$
$$\frac{\beta}{\mathrm{v}} = \frac{\delta\Omega}{\delta\tau} = \frac{\tau\omega^2}{\Omega+1}\frac{\lambda^2 - b^2}{\omega^2 - b^2},$$
$$\frac{\gamma}{\mathrm{v}} = \frac{\delta\Omega}{\delta\upsilon} = \frac{\upsilon\omega^2}{\Omega+1}\frac{\lambda^2 - c^2}{\omega^2 - c^2}, \tag{27.4}$$

если для краткости мы положим

$$\lambda^2 = \left[\left(\frac{a^2\sigma}{\omega^2 - a^2}\right)^2 + \left(\frac{b^2\sigma}{\omega^2 - b^2}\right)^2 + \left(\frac{c^2\sigma}{\omega^2 - c^2}\right)^2\right] \times$$
$$\times \left[\left(\frac{a\sigma}{\omega^2 - a^2}\right)^2 + \left(\frac{b\tau}{\omega^2 - b^2}\right)^2 + \left(\frac{c\upsilon}{\omega^2 - c^2}\right)^2\right]^{-1}. \tag{27.5}$$

Для того чтобы вывести *закон скорости* 1/v *луча, рассматриваемой как функция своего направления,* т.е. косинусов α, β, γ углов наклона к полуосям *a, b, c* упругости, мы должны исключить (согласно общему методу, изложенному в п. 2) отношения σ, τ, υ из трех выражений (27.4) и тем самым вывести соотношение

между тремя составляющими скорости α/v, β/v, γ/v. Из соотношений (27.4) с учетом (27.5) получаем

$$\frac{a^2\alpha^2}{\lambda^2-a^2}+\frac{b^2\beta^2}{\lambda^2-b^2}+\frac{c^2\gamma^2}{\lambda^2-c^2}=0, \tag{27.6}$$

а с учетом закона (27.2)

$$(\alpha/\text{v})^2+(\beta/\text{v})^2+(\gamma/\text{v})^2=\lambda^2. \tag{27.7}$$

Следовательно, λ – скорость луча, или радиуса-вектора, искривленной *единичной волны,* распространяющейся по всем направлениям от начала координат за единицу времени, а *уравнение волны* в прямоугольных координатах x, y, z, параллельных осям упругости, имеет вид

$$\frac{a^2x^2}{x^2+y^2+z^2-a^2}+\frac{b^2y^2}{x^2+y^2+z^2-b^2}+\frac{c^2z^2}{x^2+y^2+z^2-c^2}=0, \tag{27.8}$$

или, если освободиться от дробей,

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)+a^2b^2c^2=$$
$$=a^2(b^2+c^2)x^2+b^2(c^2+a^2)y^2+c^2(a^2+b^2)z^2. \tag{27.9}$$

Этот метод определения уравнения *волны* Френеля представляется нам более простым, чем тот, которым воспользовался знаменитый открыватель, и другие, предлагавшиеся впоследствии [23].

Наоборот, для того чтобы определить с помощью наших общих методов направление нормали и нормальную скорость или составляющие нормальной медленности σ, τ, υ для любого выбранного направления и скорость луча, совместимую с этой формой волны, т.е. при любых значениях α, β, γ, λ совместимую с соотношением (27.6), мы должны подставить в это соотношение вместо скорости луча λ правую часть выражения (27.7) и с учетом соотношений (26.5) получим

$$\sigma=\frac{\delta\text{v}}{\delta\alpha}=\frac{\alpha}{\text{v}}\frac{1-a^2\nu^2}{\lambda^2-a^2},\quad \tau=\frac{\delta\text{v}}{\delta\beta}=\frac{\beta}{\text{v}}\frac{1-b^2\nu^2}{\lambda^2-b^2},\quad \upsilon=\frac{\delta\text{v}}{\delta\gamma}=\frac{\gamma}{\text{v}}\frac{1-c^2\nu^2}{\lambda^2-c^2}, \tag{27.10}$$

если положить для краткости

$$\nu^2=\left[\left(\frac{\alpha}{\lambda^2-a^2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\lambda^2-b^2}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\lambda^2-c^2}\right)^2\right]\times$$
$$\times\left[\left(\frac{a\alpha}{\lambda^2-a^2}\right)^2+\left(\frac{b\beta}{\lambda^2-b^2}\right)^2+\left(\frac{c\gamma}{\lambda^2-c^2}\right)^2\right]^{-1}. \tag{27.11}$$

Как нетрудно видеть, определенное таким образом значение ν есть нормальная медленность, или величина, обратная ω, так как из соотношений (27.10) с учетом

уравнения (27.6) следует, что

$$\sigma^2 + \tau^2 + \upsilon^2 = \nu^2. \tag{27.12}$$

А так как из тех же соотношений по определению (27.11) следует также, что

$$\frac{\sigma^2}{1-a^2\nu^2}+\frac{\tau^2}{1-b^2\nu^2}+\frac{\upsilon^2}{1-c^2\nu^2}=0, \tag{27.13}$$

мы легко выводим закон (27.2) зависимости нормальной скорости от направления нормали из формы волны Френеля подобно тому, как ранее мы выводили последнюю из первой.

Соотношения (27.6), (27.7), задающие уравнение волны в прямоугольных координатах, приводят также к следующему полярному уравнению для величины, обратной ее радиусу-вектору, т.е. для медленности v луча:

$$\begin{aligned}&\mathrm{v}^4-\mathrm{v}^2\{\alpha^2(b^{-2}+c^{-2})+\beta^2(c^{-2}+a^{-2})+\gamma^2(a^{-2}+b^{-2})\}+\\&+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha^2b^{-2}c^{-2}+\beta^2c^{-2}a^{-2}+\gamma^2a^{-2}b^{-2}),\end{aligned} \tag{27.14}$$

а значит, и следующее двойное выражение для квадрата медленности:

$$\begin{aligned}&\mathrm{v}^2=\tfrac{1}{2}(c^{-2}+a^{-2})(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+\tfrac{1}{2}(c^{-2}-a^{-2})\times\\&\times\{A'A''\pm(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-A'^2)^{1/2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-A''^2)^{1/2}\},\end{aligned} \tag{27.15}$$

если ввести для краткости обозначения

$$\begin{aligned}&A'=\alpha\left(\frac{b^{-2}-a^{-2}}{c^{-2}-a^{-2}}\right)^{1/2}+\gamma\left(\frac{c^{-2}-b^{-2}}{c^{-2}-a^{-2}}\right)^{1/2},\\&A''=\alpha\left(\frac{b^{-2}-a^{-2}}{c^{-2}-a^{-2}}\right)^{1/2}+\gamma\left(\frac{c^{-2}-b^{-2}}{c^{-2}-a^{-2}}\right)^{1/2}.\end{aligned} \tag{27.16}$$

Если предположить, что $a^2 > b^2 > c^2$, то полярное уравнение волны можно представить в виде

$$\rho^{-2}=\tfrac{1}{2}(c^{-2}+a^{-2})+\tfrac{1}{2}(c^{-2}-a^{-2})\cos((\rho\rho')\pm(\rho\rho'')), \tag{27.17}$$

где ρ – радиус-вектор, или скорость, а $(\rho\rho')$ и $(\rho\rho'')$ – углы, образуемые радиусом ρ с двумя постоянными радиусами ρ', ρ'', определяемыми следующими косинусами их углов наклона к полуосям x, y, z или a, b, c:

$$\rho'_a=\rho''_a=\left(\frac{b^{-2}-a^{-2}}{c^{-2}-a^{-2}}\right)^{1/2},\quad \rho'_b=\rho''_b=0,\quad \rho'_c=-\rho''_c=\left(\frac{c^{-2}-b^{-2}}{c^{-2}-a^{-2}}\right)^{1/2}. \tag{27.18}$$

Выражение (27.17) для величины, обратной квадрату скорости луча, было указано Френелем, который заметил, что оно всегда дает две неравные скорости, за исклю-

чением того случая, когда направление ρ луча совпадает с одним из четырех направлений $\pm\rho'$, $\pm\rho''$, которые попарно противоположны и расположены в плоскости *ac* наибольшей и наименьшей упругости. Аналогичным образом Френель показал, что любое данное направление нормали соответствует двум неравным нормальным скоростям, за исключением четырех особых направлений, которые мы можем обозначить $\pm\omega'$, $\pm\omega''$, определяемых следующими направляющими косинусами:

$$\omega'_a = -\omega''_a = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}\right)^{1/2}, \quad \omega'_b = \omega''_b = 0, \quad \omega'_c = \omega''_c = \left(\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}\right)^{1/2}, \tag{27.19}$$

и, действительно, нетрудно установить следующее выражение для двойного значения квадрата нормальной скорости, аналогичное выражению (27.17):

$$\omega^2 = 1/2(a^2 + c^2) + 1/2(a^2 - c^2)\cos((\omega\omega') + (\omega\omega'')), \tag{27.20}$$

которое не сводится к единственному значению, за исключением тех случаев, когда $\sin(\omega\omega')$ или $\sin(\omega\omega'')$ обращается в нуль. Френель называл ***оптическими осями*** то одно, то другое из двух множеств направлений (27.18), (27,19), но во избежание путаницы, которая может возникнуть из-за двоякого употребления термина, мы будем здесь называть множество $\pm\rho'$, $\pm\rho''$ более длинным, но зато более выразительным термином – ***направления, или линии, единственной скорости луча.*** Аналогичным образом множества $\pm\omega'$, $\pm\omega''$ мы будем называть направлениями, или линиями, единственной нормальной скорости [24].

Новые свойства волны Френеля. Эта волна обладает четырьмя конусовидными остриями на концах линий единственной скорости луча. Она обладает также четырьмя окружностями касания, каждая из которых лежит в касательной плоскости единственной нормальной скорости. Следовательно, линии единственной скорости могут быть названы лучами остриев, а линии единственной нормальной скорости – нормалями к окружностям касания [25]

28. Рассуждения предыдущего раздела предполагают, что оси координат совпадают с осями упругости. Однако полученные результаты нетрудно обобщить на любые другие оси координат с помощью формул преобразования, приведенных в п. 13. Мы ограничимся сейчас рассмотрением двух замечательных преобразований этого рода, навеянных двумя упоминавшимися в предыдущем разделе множествами линий единственной скорости, которые приводят к новым свойствам волны Френеля и к новым следствиям из его теории.

Полярное уравнение (27.17) волны можно представить в виде

$$\frac{1}{2}(c^{-2} + a^{-2})\rho^2 + \frac{1}{2}(c^{-2} - a^{-2})\{r'r'' \pm \sqrt{\rho^2 - r'^2}\sqrt{\rho^2 - r''^2}\} = 1, \tag{28.1}$$

если положить для краткости

$$r' = A'\rho = x\rho'_a + z\rho'_c, \qquad r'' = A''\rho = x\rho''_a + z\rho''_c \tag{28.2}$$

так, чтобы r', r'' были проекциями радиуса-вектора ρ на направления ρ′, ρ″ единственной скорости луча, и если ввести новые прямоугольные координаты $x_,, y_,, z_,$ так, чтобы плоскость $x_,z_,$ по-прежнему оставалась плоскостью ac наибольшей и наименьшей упругости, но положительная полуось $z_,$ совпадала с линией ρ′, то мы можем воспользоваться следующими формулами преобразования:

$$x = x_,\rho_c' + z_,\rho_a', \quad y = y_,, \quad z = -z_,\rho_a' + z_,\rho_c', \tag{28.3}$$

которое дает

$$\rho^2 = x_,^2 + y_,^2 + z_,^2, \quad r' = z_,, \quad r'' = x_, \sin(\rho'\rho'') + z_, \cos(\rho'\rho'') \tag{28.4}$$

и приводит уравнение волны (28.1) к виду

$$b^{-2}z_,^2 + \frac{1}{2}z_,x_,(c^{-2}+a^{-2})\sin(\rho'\rho'') + \frac{1}{2}(c^{-2}+a^{-2})(x_,^2+y_,^2) \pm$$

$$\pm\frac{1}{2}(c^{-2}+a^{-2})(x_,^2+y_,^2)^{1/2}\{[z_,\sin(\rho'\rho'') - x_,\cos(\rho'\rho'')]^2 + y_,^2\}^{1/2} = 1. \tag{28.5}$$

Уравнение (28.5) позволяет легко изучать форму волны вблизи конца радиуса ρ′, т.е. вблизи точки с новыми координатами

$$x_, = 0, \quad y_, = 0, \quad z_, = b, \tag{28.6}$$

ибо вблизи этой точки оно принимает следующий приближенный вид:

$$z_, = b - \frac{1}{2}b^2\sqrt{c^{-2}-b^{-2}}\sqrt{b^{-2}-a^{-2}}\left(x_, \pm \sqrt{x_,^2+y_,^2}\right), \tag{28.7}$$

показывающий, что вблизи точки (28.6) *волна имеет конусовидное острие* и ее касается не одна вполне определенная касательная плоскость, а *касательный конус второй степени,* строго задаваемый уравнением (28.7). Френель, по-видимому, не знал о существовании этого касательного конуса к своей волне и полагал, что в конце радиуса-вектора ρ′ единственной скорости луча волны касаются только две прямые, лежащие в плоскости ac, а именно касательные к некоторой окружности и эллипсу – линиям пересечения волны с плоскостью ac. Но из предыдущего преобразования ясно, что любого другого сечения волны плоскостью, содержащей радиус-вектор ρ′, касаются в конце этого радиуса две касательные, лежащие на конусе (28.7). Ясно также, что *существуют четыре таких конусовидных острия* на концах четырех линий единственной скорости луча ±ρ′, ±ρ″. Они определяются следующими координатами, если отнести их к осям упругости:

$$x = \pm c\left(\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}\right)^{1/2}, \quad y = 0, \quad z = \pm a\left(\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}\right)^{1/2} \tag{28.8}$$

и являются четырьмя точками пересечения окружности и эллипса Френеля в плоскости ac, имеющими в этой плоскости уравнения

$$x^2+z^2=b^2, \quad a^2x^2+c^2z^2=a^2c^2. \tag{28.9}$$

Воспользовавшись затем новыми формулами преобразования

$$x=x_{,,}\omega_c'+z_{,,}\omega_a', \quad y=y_{,,}, \quad z=-x_{,,}\omega_a'+z_{,,}\omega_c', \tag{28.10}$$

чтобы перейти к новой системе прямоугольных координат, в которой плоскость $x_{,,}z_{,,}$ совпадает с плоскостью ac, а положительная полуось $z_{,,}$ – с линией ω' единственной нормальной скорости, мы находим новое преобразованное уравнение, которое можно записать в виде

$$(x_{,,}^2+y_{,,}^2+x_{,,}z_{,,}b^{-2}\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2-c^2})^2=Q(1-z_{,,}^2b^{-2}), \tag{28.11}$$

если для краткости положить

$$Q=(a^2+c^2)\rho^2+(a^2-c^2)r'r''-a^2c^2(1+z_{,,}^2b^{-2}). \tag{28.12}$$

Следовательно, нетрудно доказать, что *плоскость*

$$z_{,,}=b, \tag{28.13}$$

перпендикулярная линии ω' *в ее концах, касается волны на всем протяжении окружности*; уравнение этой окружности касания в ее собственной плоскости имеет вид

$$x_{,,}^2+y_{,,}^2+x_{,,}b^{-1}\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2-c^2}=0. \tag{28.14}$$

Ясно, что *существуют четыре такие окружности плоского касания на концах четырех линий* $\pm\omega', \pm\omega''$ *единственной нормальной скорости.* Все они равны, и общая величина их диаметров равна $b^{-1}\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2-c^2}$. Те же выводы можно извлечь и из уравнения волны Френеля в координатах x, y, z, отнесенных к осям упругости. Уравнения *четырех плоскостей касания по полной окружности* в этих координатах имеют вид

$$z\sqrt{b^2-c^2}\pm x\sqrt{a^2-b^2}=\pm b\sqrt{a^2-c^2}. \tag{28.15}$$

Однако сам Френель, по-видимому, не подозревал ни о существовании этих окружностей касания, ни о том, что они открыты после него кем-нибудь другим. Как мы увидим, окружности и острия, упомянутые в этом пункте, приводят к некоторым замечательным теоретическим выводам относительно законов преломления в двухосных кристаллах.

Новые следствия из принципов Френеля. Из этих принципов следует, что в кристаллах с достаточной двухосной энергией должна наблюдаться коническая рефракция двух типов: внешняя и внутренняя. Луч острия должен порождать внешний конус лучей, а нормаль к окружности касания – внутренний конус

29. Общие формулы для отражения или преломления, обыкновенного или необыкновенного, выведенные нами из природы характеристической функции V, превращаются просто в

$$\Delta\sigma = 0, \quad \Delta\tau = 0, \tag{29.1}$$

если за плоскость xy принять касательную плоскость к отражающей или преломляющей поверхности. Они показывают, следовательно, что *составляющие нормальной медленности, параллельные такой касательной плоскости, сохраняются неизменными*. Это новая и общая форма законов сохранения и преломления. В сочетании с законом скорости Френеля столь общая теорема позволяет вывести новые следствия из этого закона для двухосных кристаллов.

Для такого вывода нашу теорему можно представить в виде соотношения

$$\Delta\left(a_t \frac{\delta v}{\delta\alpha} + b_t \frac{\delta v}{\delta\beta} + c_t \frac{\delta v}{\delta\gamma}\right) = 0, \tag{29.2}$$

где v – волновая медленность луча, рассматриваемая как однородная функция степени 1 от косинусов α, β, γ углов, образуемых ею с любыми тремя прямоугольными полуосями a, b, c, в то время как Δ относится к изменениям, обусловленным отражением или преломлением; неизменный трехчлен, перед которым стоит Δ, – составляющая нормальной медленности в направлении любой прямой t на касательной плоскости отражающей или преломляющей поверхности; a_t, b_t, c_t – косинусы углов, образуемых прямой t с полуосями a, b, c. Для того чтобы объединить эту теорему с принципами Френеля, необходимо лишь предположить, что прямоугольные полуоси a, b, c в каждой среде являются полуосями упругости этой среды и что вид функции v определен так же, как в п. 27.

Следовательно, чтобы вычислить преломление света, попадающего из пустоты в двухосный кристалл a, b, c, ограниченный плоской гранью F, мы можем обозначить через α_0, β_0, γ_0 косинусы углов наклона внутреннего или падающего луча к двум ортогональным прямым s, t на грани F и к внутренней нормали и получить два следующих уравнения [26]:

$$\alpha_0 = a_s \frac{\delta v}{\delta\alpha} + b_s \frac{\delta v}{\delta\beta} + c_s \frac{\delta v}{\delta\gamma} (= \sigma a_s + \tau b_s + \upsilon c_s),$$

$$\beta_0 = a_t \frac{\delta v}{\delta\alpha} + b_t \frac{\delta v}{\delta\beta} + c_t \frac{\delta v}{\delta\gamma} (= \sigma a_t + \tau b_t + \upsilon c_t), \tag{29.3}$$

которые содержат подлежащие определению связи между α_0, β_0, γ_0 и α, β, γ, т.е. между внешним и внутренним направлениями. Действуя таким образом, мы нахо-

дим в общем случае два падающих луча для одного преломленного и два преломленных луча для одного падающего. Так, любая данная система значений α, β, γ, т.е. любого данного направления внутреннего луча, соответствует в общем случае двум системам значений внутренних составляющих нормальной медленности σ, τ, υ и, следовательно, двум системам значений α_0, β_0, γ_0, т.е. двум внешним направлениям. Наоборот, данной системе двух линейных соотношений между σ, τ, υ, выведенных с учетом уравнений (29.3), исходя из данного внешнего направления, соответствуют, вообще говоря, два направления внутреннего луча. Но имеются два замечательных исключения, связанных с двумя семействами линий единственной скорости и с конусовидными остриями и окружностями касания на волне Френеля.

Действительно, мы видели, что в конусовидном острие касательная плоскость волны не определена. Ясно поэтому, что *луч из острия* должен соответствовать бесконечному множеству различных систем составляющих нормальной медленности σ, τ, υ внутри двухосного кристалла и тем самым так же бесконечному множеству различных систем направляющих косинусов α_0, β_0, γ_0 внешнего луча. Таким образом, *один этот внутренний луч из острия должен соответствовать внешнему конусу лучей, как это следует из нового теоретического закона света, который можно назвать* ВНЕШНЕЙ КОНИЧЕСКОЙ РЕФРАКЦИЕЙ.

На окружности касания волна имеет одну общую касательную плоскость для всех точек этой окружности и, следовательно; бесконечное множество внутренних лучей, которые соответствуют этим различным точкам, имеет одну общую нормаль к волне, которую можно назвать *нормалью окружности касания*, и все эти внутренние лучи имеют одну общую систему составляющих нормальной медленности σ, τ, υ внутри кристалла и, следовательно, соответствуют одному общему внешнему лучу. Таким образом, *этот один внешний луч связан с внутренним конусом лучей в соответствии с другим новым теоретическим законом света*, который можно назвать ВНУТРЕННЕЙ КОНИЧЕСКОЙ РЕФРАКЦИЕЙ.

Чтобы развить несколько полнее эти две новые концепции из принципов Френеля, начнем с рассмотрения *внешней конической рефракции* и попытаемся найти уравнение внешнего конуса лучей, соответствующего внутреннему лучу из острия ρ'. Приближенное уравнение (28.7) волны вблизи конца этого луча из острия в преобразованных координатах $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ дает следующее приближенное выражение для волновой медленности v ближнего луча, рассматриваемой как однородная функция степени 1 косинусов $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$ его углов наклона к положительным полуосям этих координат $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$:

$$\mathrm{v} = b^{-1}\gamma_{,} + r_{,}(\alpha_{,} \pm \sqrt{\alpha_{,}^2 + \beta_{,}^2}), \tag{29.4}$$

где

$$r_{,} = \frac{1}{2} b \sqrt{c^{-2} - b^{-2}} \sqrt{b^{-2} - a^{-2}}. \tag{29.5}$$

Следовательно, в силу нашего общего метода оно дает следующие приближенные составляющие нормальной медленности, параллельные тем же полуосям $x_,$, $y_,$, $z_,$:

$$\sigma\rho'_c - \upsilon\rho'_a = \sigma_, = \frac{\delta v}{\delta\alpha_,} = \tau_, \pm \frac{\tau_,\alpha_,}{\sqrt{\alpha_,^2 + \beta_,^2}},$$

$$\tau = \tau_, = \frac{\delta v}{\delta\beta_,} = \pm \frac{r_,\beta_,}{\sqrt{\alpha_,^2 + \beta_,^2}}, \quad \sigma\rho'_a + \upsilon\rho'_c = \upsilon_, = \frac{\delta v}{\delta\gamma_,} = b^{-1}. \tag{29.6}$$

Выражения для $\alpha_,$, $\tau_,$ становятся сколь угодно более точными, когда $\alpha_,$, $\beta_,$ убывают, т.е. по мере того, как близкий внутренний луч стремится к лучу из острия ρ', и выражение для υ' точное. Таким образом, *соотношения между составляющими нормальной медленности* σ, τ, υ *луча* ρ' *из острия* имеют вид

$$(\sigma\rho'_c - \upsilon\rho'_a)^2 + \tau^2 = 2r_,(\sigma\rho'_c - \upsilon\rho'_a), \quad \sigma\rho'_a + \upsilon\rho'_c = b^{-1}, \tag{29.7}$$

и уравнение (*относительно* α_0, β_0) *внешнего конуса лучей, соответствующих одному внутреннему лучу из острия* ρ', *мы находим, исключая три внутренние составляющие* σ, τ, υ *из двух соотношений* (29.7) *и двух уравнений рефракции* (29.3).

Например, если внутренний луч из острия ρ' совпадает с внутренней нормалью к преломляющей поверхности F кристалла, можно принять s, t за полуоси на этой поверхности проекцию a и полуось b упругости; в этом случае уравнения преломления (29.3) имеют вид

$$\alpha = \sigma\rho'_c - \upsilon\rho'_a, \quad \beta_0 = \tau, \tag{29.8}$$

согласно (29.7) имеется следующее полярное уравнение внешнего конуса лучей:

$$\alpha_0^2 + \beta_0^2 = 2r_,\alpha_0, \tag{29.9}$$

или в системе прямоугольных координат уравнение четвертой степени

$$(x_0^2 + y_0^2)^2 = 4r_,^2 x_0^2 (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2). \tag{29.10}$$

Этот конус [27] почти круговой во всех известных двухосевых кристаллах, так как коэффициент $r_,$ небольшой согласно (29.5), когда двухосевая энергия слабая, т.е. когда полуоси упругости a, b, c почти равны друг другу, и внешний конус (29.10) строго пересекается с концентрической сферой единичного радиуса в кривой, содержащейся в круговом цилиндре радиуса $r_,$, при этом одна сторона этого цилиндра совпадает с лучом конуса.

По отношению к внутреннему *коническому преломлению уравнение внутреннего конуса лучей, соответствующее внутренней волновой нормали* ω', *или нормали кругового контакта, в соответствии* с (28.13), (28.14) всегда имеет вид

$$x_{,,}^2 + y_{,,}^2 + 2r_{,,}^2 x_{,,} z_{,,} = 0, \tag{29.11}$$

где

$$r_{,,} = \frac{1}{2} b^{-2} \sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{b^2 - c^2},$$

если это уравнение отнесено к прямоугольным координатам $x_{,,}$, $y_{,,}$, $z_{,,}$, параллельным осям упругости с помощью преобразования (28.10). В более же простых прямоугольных координатах x, y, z, параллельных осям упругости, уравнение этого конуса имеет вид

$$(x\omega_c' - z\omega_a')^2 + y^2 + 2r_{,,}(x\omega_c' - z\omega_a')(x\omega_a' + z\omega_c') = 0, \tag{29.12}$$

где мы можем заменить координаты x, y, z направляющими косинусами α, β, γ внутреннего луча конуса, в то время как соответствующий один внешний луч определяется направляющими косинусами

$$\alpha_0 = b^{-1}\omega_s', \quad \beta_0 = b^{-1}\omega_t' \tag{29.13}$$

или обыкновенным законом пропорциональных синусов, так как внутренняя нормаль к волне окружности касания ω', которая является одним из лучей внутреннего конуса, связана с внешним лучом этим обыкновенным законом, если показатель преломления кристалла принять за величину b^{-1}, обратную средней полуоси упругости. Отсюда ясно, что если внутренний конус возникает на новой плоской грани, то цилиндр возникает независимо от того, параллельны грани или наклонены друг относительно друга, т.е. имеет ли кристалл форму пластины или призмы.

Теория конической поляризации. Линии колебаний. На волне Френеля эти линии являются линиями пересечения двух семейств концентрических и коаксиальных эллипсов

30. Данное направление нормали к волне в двухосном кристалле соответствует, вообще говоря, двум направлениям колебаний и, следовательно, двум плоскостям поляризации, определяемым уравнениями (27.1), а именно по одной на каждое из двух значений ω_1^2, ω_2^2 квадрата нормальной скорости, получающихся из уравнения (27.2) при данной системе отношений σ, τ, υ. Эти два направления колебаний, или две плоскости поляризации, т.е. две нормальные плоскости волны, перпендикулярные колебаниям, взаимно перпендикулярны, так как из уравнения (27.2) нетрудно вывести следующее соотношение между ω_1^2, ω_2^2:

$$\frac{\sigma^2}{(\omega_1^2 - a^2)(\omega_2^2 - a^2)} + \frac{\tau^2}{(\omega_1^2 - b^2)(\omega_2^2 - b^2)} + \frac{\upsilon^2}{(\omega_1^2 - c^2)(\omega_2^2 - c^2)} = 0. \tag{30.1}$$

Общая взаимная перпендикулярность двух колебаний в любой плоской волне была установлена другим способом Френелем и является важным результатом его теории. Но, помимо такой *двойной поляризации*, связанной с общим *двойным лучепреломлением* в двухосных кристаллах, мы можем рассматривать также две другие

разновидности поляризации, которые уместно назвать *конической поляризацией*, связанные с двумя типами конической рефракции, о которых мы упоминали в предыдущем пункте.

Чтобы исследовать закон конической поляризации, связанный с внутренней конической рефракцией и тем самым с плоскостями окружностей касания, мы можем воспользоваться координатами $x_{,,}$ $y_{,,}$ $z_{,,}$ задаваемыми соотношениями (28.10), и тем самым преобразовать общие уравнения поляризации (26.1), (27.1) к следующему, столь же общему виду:

$$\frac{\omega'_c\delta x_{,,}+\omega'_a\delta z_{,,}}{\omega'_c\sigma_{,,}+\omega'_a\upsilon_{,,}}(\omega^2-a^2)=\frac{\delta y_{,,}}{\tau_{,,}}(\omega^2-b^2)=\frac{-\omega'_a\delta x_{,,}+\omega'_c\delta z_{,,}}{\omega'_a\sigma_{,,}+\omega'_c\upsilon_{,,}}(\omega^2-c^2),$$

$$\sigma_{,,}\delta x_{,,}+\tau_{,,}\delta y_{,,}+\upsilon_{,,}\delta z_{,,}=0. \tag{30.2}$$

Для проекции колебания на плоскость $x_{,,}y_{,,}$ единственной нормальной скорости эти уравнения дают строгую формулу

$$\frac{\delta y_{,,}}{\delta x_{,,}}=\frac{(\omega^2-a^2)(\omega^2-c^2)}{\omega^2-b^2}\,\frac{\tau_{,,}}{\upsilon_{,,}\sqrt{a^2-b^2}\,\sqrt{b^2-c^2}-\sigma_{,,}(\omega^2+b^2-a^2-c^2)}, \tag{30.3}$$

а для любой плоскости, слегка наклоненной к плоскости $x_{,,}y_{,,}$ – следующее приближенное соотношение между компонентами нормальной медленности:

$$\upsilon_{,,}=b^{-1}+r_{,,}(\sigma_{,,}\pm\sqrt{\sigma_{,,}^2+\tau_{,,}^2}), \tag{30.4}$$

где $r_{,,}$ по-прежнему задается формулой (29.11). Обратившись к общим связям, установленным в этом "Дополнении" между направляющими косинусами луча и составляющими нормальной медленности волны, мы легко выведем из (30.4) с помощью дифференцирования другие соотношения:

$$\frac{\alpha_{,,}}{\gamma_{,,}}=-\frac{\delta\upsilon_{,,}}{\delta\sigma_{,,}}=-r_{,,}\left(1\pm\frac{\sigma_{,,}}{\sqrt{\sigma_{,,}^2+\tau_{,,}^2}}\right),\qquad \frac{\beta_{,,}}{\gamma_{,,}}=-\frac{\delta\upsilon_{,,}}{\delta\tau_{,,}}=\mp\frac{r_{,,}\tau_{,,}}{\sqrt{\sigma_{,,}^2+\tau_{,,}^2}}, \tag{30.5}$$

и, наконец [28], для колебаний ближней волны

$$\frac{\delta y_{,,}}{\delta x_{,,}}=\frac{\tau_{,,}}{\sigma_{,,}\pm\sqrt{\sigma_{,,}^2+\tau_{,,}^2}}=\frac{\beta_{,,}}{\alpha_{,,}}. \tag{30.6}$$

В этой формуле содержится теория конической поляризации, связанной с внутренней конической рефракцией. Она показывает, что *на волне Френеля колебания на окружности касания происходят на хорде этой окружности, проведенной из конца нормали* ω' *единственной скорости*, и, следовательно, что *все соответствующие плоскости поляризации проходят через другую параллельную нормаль в проти-*

воположной точке окружности. Таким образом, плоскость поляризации, переходя из одного положения в другое, *поворачивается вдвое медленнее, чем вращающийся радиус*, и поэтому угол между любыми двумя плоскостями поляризации равен только *половине* угла между двумя соответствующими радиусами этой окружности на волне Френеля. Если же мы предположим, что направление внешнего падающего луча совпадает с нормалью к волне ω' и, следовательно, с нормалью к преломляющей поверхности кристалла, то малые внутренние составляющие нормальной медленности $\sigma_{,,}$ $\tau_{,,}$ параллельные этой преломляющей поверхности, равны (по нашей общей теореме о преломлении) малым внешним направляющим косинусам α_0, β_0 углов наклона близкого падающего луча к полуосям $x_{,,}$ и $y_{,,}$. Отсюда в силу соотношений (30.6) следует, что *плоскость внешнего падения, в которой лежит этот близкий падающий луч, поворачивается вдвое быстрее, чем соответствующая плоскость преломления.*

Для другого типа конической поляризации, связанной с внешней конической рефракцией и, следовательно, с конусовидным острием на волне Френеля, мы с помощью аналогичного процесса находим

$$\frac{\delta y_,}{\delta x_,} = \frac{\tau_,}{\sigma_,} = \frac{\beta_,}{\alpha_, \pm \sqrt{\alpha_,^2 + \beta_,^2}} \tag{30.7}$$

и

$$\delta z_, = -2br_, \delta x_,, \tag{30.8}$$

где $r_,$ – величина, заданная соотношением (29.5). Формула (30.7) показывает, что в нормальной плоскости к волне, содержащей любое колебание вблизи острия, лежит также либо сам луч из острия, либо прямая, параллельная этому лучу, вследствие чего направление любого близкого колебания совпадает с проекцией или параллельно проекции луча из острия на соответствующей касательной плоскости волны или конуса, которая касается волны или конуса в острие. Формула (30.8) показывает, что все эти близкие колебания параллельны одной общей плоскости, которая, как нетрудно видеть, должна быть перпендикулярна плоскости *ac* и содержать касательную в острие к эллиптическому сечению (28.9) волны, образуемому этой плоскостью.

Таким образом, *все плоскости поляризации вблизи острия содержат нормаль или параллельны нормали этого эллиптического сечения.* Направление любого близкого колебания на волне или ее касательном конусе может быть получено сечением соответствующей касательной плоскости этой волны или конуса плоскостью, перпендикулярной нормали эллиптического сечения.

Если луч из острия падает перпендикулярно на преломляющую поверхность кристалла, то внутренние составляющие $\sigma_,$, $\tau_,$ равны направляющим косинусам α_0, β_0 соответствующего луча испускаемого внешнего конуса. Следовательно, в силу соотношений (30.7) плоскость преломления этого внешнего луча содержит внут-

реннее колебание, а в силу принципа Френеля и соответствующее внешнее колебание. Таким образом, *при внешней конической поляризации, возникающей при перпендикулярном внутреннем падении луча из острия, плоскость поляризации внешнего луча перпендикулярна его плоскости преломления и поэтому поворачивается вдвое медленнее, чем плоскость, содержащая выходящий луч и проходящая через приближенную ось испускаемого почти кругового конуса при условии, что двухосная энергия мала.* Мы видим также (из соотношений (30.7)), что плоскость, содержащая луч из острия и близкий внутренний луч или параллельная ему, вращается вдвое быстрее, чем плоскость, содержащая луч из острия и параллельная близкой нормали к волне, и, следовательно, в случае перпендикулярного падения луча из острия плоскость падения близкого внутреннего луча вращается вдвое быстрее, чем плоскость внешнего отражения, в которой, как мы видели, лежат внешние колебания.

В общем случае уравнения поляризации (27.1), выведенные нами из принципов Френеля, приводят в силу соотношений (27.4), (27.6) к следующей простой формуле:

$$a^2\alpha\delta x + b^2\beta\delta y + c^2\gamma\delta z = 0, \tag{30.9}$$

где δx, δy, δz по-прежнему означают составляющие смещения, параллельные полуосям a, b, c, а α, β, γ – косинусы углов наклона луча к тем же полуосям упругости. Формула (30.9) в сочетании с уравнением поперечных колебаний (26.1)

$$\delta V = 0, \quad \text{или} \quad \sigma\delta x + \tau\delta y + \upsilon\delta z = 0,$$

позволяет легко определить направление колебаний для любого данного направления и скорости луча, т.е. для любой точки искривленной волны Френеля, распространяющейся от светящегося источника в двухосном кристалле. Нетрудно видеть, что *на любой волне в двухосном кристалле*, распространяется ли она изнутри или извне, дифференциальное уравнение (30.9) определяет серию линий колебаний, обладающих тем свойством, что в любой точке такой линии колебание происходит в направлении самой линии. Чтобы найти эти линии на волне Френеля (27.9), мы можем заменить в дифференциальном уравнении (30.9) α, β, γ на x, y, z и, интегрируя, получить

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = \varepsilon^4, \tag{30.10}$$

где ε – произвольная постоянная. А так как этот интеграл в сочетании с уравнением (27.9) самой волны дает

$$(a^4 + \varepsilon^4)x^2 + (b^4 + \varepsilon^4)y^2 + (c^4 + \varepsilon^4)z^2 = (a^2 + b^2 + c^2)\varepsilon^4 - a^2b^2c^2, \tag{30.11}$$

мы видим, что *линии колебаний на волне Френеля, распространяющейся от точки в двухосном кристалле, являются пересечениями двух семейств* (30.10), (30.11) *концентрических и коаксиальных эллипсоидов.*

При интегрировании в целом, распространяющемся на всю волну, или при

интегрировании приближенных уравнений для колебаний вблизи конусовидных остриев и окружностей касания, получаемых из уравнений (30.7), (30.6) при замене направляющих косинусов луча на пропорциональные координаты волны, мы обнаруживаем, что вблизи острия линии колебания достаточно хорошо совпадают с малыми параболическими дугами на касательном конусе волны в плоскостях, перпендикулярных к уже упоминавшейся нормали эллиптического сечения [29], и что при пересечении окружности касания каждая линия колебания направлена к той точке окружности, которая является концом соответствующей нормали к волне единственной скорости, т.е. к основанию перпендикуляра, опущенного из центра волны на плоскость окружности касания [30].

В любой однородной среде искривленная волна, распространяющаяся из точки, связана с другой поверхностью (которую уместно было бы назвать поверхностью составляющих) соотношениями, открытыми месье Коши, и новыми соотношениями, связанными с одной общей теоремой двойственности. Эта теорема позволяет дать новое построение для волны в волновой теории света и связывает острия и окружности касания на волне Френеля с аналогичными окружностями и остриями на поверхности составляющих

31. Теория волны, распространяющейся из точки в любой однородной среде, станет гораздо яснее, если сравнить эту волну с другой поверхностью, по-видимому впервые открытой Коши[10], отметившим некоторые ее свойства в уже упоминавшемся выпуске. В том выпуске, о котором идет речь, Коши рассмотрел распространение плоских волн в системе взаимно притягивающихся и отталкивающихся частиц и пришел к соотношению между нормальной скоростью распространения, обозначенной им s, и косинусами углов, образуемых ею с положительными полуосями x, y, z (косинусы Коши обозначил a, b, c). Найденное им соотношение получено путем приравнивания нулю некоторой однородной функции (степени.6) от s, a, b, c. На мысль об этой функции Коши навело рассмотрение s как однородной функции размерности 1 от косинусов a, b, c, в то время как мы предпочитали рассматривать нормальную скорость (обозначенную в настоящем "Дополнении" ω) как однородную функцию направляющих косинусов степени 0. Это различие в методе не приводит к сколько-нибудь значительному различию в результатах, так как соотношение, существующее между косинусами (а именно равенство единице суммы квадратов косинусов), позволяет нам преобразовывать бесконечно многими способами любое из уравнений, в которое они входят. Исходя из своей точки зрения на соотношение между нормальной скоростью и направляющими косинусами нормали Коши выводит следующие уравнения между временем t и координатами x, y, z луча от начала координат:

$$\frac{x}{t}=\frac{ds}{da}, \qquad \frac{y}{t}=\frac{ds}{db}, \qquad \frac{z}{t}=\frac{ds}{dc},$$

[10] *Cauchy A.L.* Oeuvres complètes. Paris, 1908. Sér. 2. T. 9. P. 406–410.

о которых мы упоминали в п. 26 настоящего "Дополнения", по существу эквивалентных нашим уравнениям (26.4). Он выводит также уравнение вида

$$F\left(\frac{a}{s}, \frac{b}{s}, \frac{c}{s}\right) = 0,$$

которое строит по поверхности, имеющей своими координатами a/s, b/s, c/s. Наши методы немедленно приводят к той же поверхности путем построения того же уравнения в виде

$$\Omega(\sigma, \tau, \upsilon) = 0,$$

столь часто использовавшемся в этом "Дополнении". Исходя из оптического смысла, выбранного нами для координат σ, τ, υ поверхности $\Omega = 0$, мы назовем ее поверхностью составляющих нормальной медленности, или просто *поверхностью компонент*. Коши показывает, что эта поверхность связана с искривленной волной, распространяющейся из начала координат за единицу времени (мы назвали эту волну *единичной волной* и можем задать ее уравнением $V = 1$), двумя замечательными соотношениями, легко выводимыми из наших формул. Это позволяет Коши утверждать, что, во-первых, *сумма произведений соответствующих координат* (т.е., иными словами, *произведение любых двух радиусов, умноженное на косинус угла между ними*) *равна единице* и, во-вторых, *волна есть огибающая плоскостей, пересекающих ортогонально радиусы поверхности компонент на расстояниях от центра, равных величинам, обратным этим радиусам.*

К двум соотношениям, открытым Коши, мы можем добавить третье, не менее замечательное, которое он, по-видимому, не заметил, а именно: *поверхность составляющих есть огибающая плоскостей, пересекающих ортогонально радиусы волны на расстояниях от ее центра, равных величинам, обратным радиусам*, т.е. равным медленностям лучей. Действительно, общая теорема двойственности между этими поверхностями, без труда выводимая из существования трех уравнений

$$xx' + yy' + zz' = 1, \qquad x\delta x' + y\delta y' + z\delta z' = 0, \qquad x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z = 0, \tag{31.1}$$

гласит: *если одна поверхность B получается из другой поверхности A путем проведения к последней радиусов-векторов из произвольного начала O, замены длин этих радиусов обратными им величинами без изменения их направлений и построения огибающей плоскостей, перпендикулярных измененным радиусам-векторам поверхности A в их концах, то и, наоборот, поверхность A может быть получена из поверхности B повторением того же построения с использованием того же начала O и той же единицы длины.* Например, если поверхность A образована вращением эллипса вокруг его большей оси, мы поместим начало в одном из фокусов эллипсоида A и выберем произвольную единицу длины, равной малой полуоси, то огибающая поверхность B будет сферой с диаметром, равным большой оси эллипса, и центром, расположенным на той же большой оси так, что начало O находится посередине между центрами этих двух поверхностей. Наоборот, если из этого эксцентрического начала мы проведем радиусы к сфере B, заменим эти неравные

радиусы обратными величинами и проведем плоскости, перпендикулярные концам новых радиусов, то огибающая проведенных плоскостей будет эллипсоидом A. Другой частный пример этой общей теории *взаимных поверхностей*, а именно случай двух концентрических и коаксиальных эллипсоидов, отнесенных к их центру как к началу, каждый из которых имеет своими полуосями величины, обратные полуосям другого эллипсоида, был отмечен Мак-Куллахом[11] и изящно доказан им во второй части XVI тома "Transactions of the Royal Irish Academy".

Применительно к единичной волне и поверхности составляющих эта общая теорема взаимности приводит *к новому построению единичной волны в любой однородной среде при любом законе скорости, а именно волны как геометрического места точек, получающегося при опускании перпендикуляров из центра на касательные плоскости поверхности составляющих и замены длины этих перпендикуляров без изменения их направлений.*

Из общей теории *двойственных поверхностей следует также, что конусовидное острие на любой поверхности A соответствует, вообще говоря, кривой плоского касания на двойственной поверхности B и наоборот*; что, следовательно, острия и окружности на волне Френеля связаны с остриями и окружностями на соответствующей поверхности составляющих, ибо последняя поверхность получается из первой при замене полуосей упругости a, b, c на обратные величины. Именно эта общая теорема привела меня к открытию четырех окружностей касания на волне Френеля, когда я пришел к заключению, что эта волна должна касаться четырех плоскостей по кривым, а не в отдельных точках, как только обнаружил существование четырех конусовидных острий на поверхности составляющих, получив (в исследованиях, относящихся к аберрациям двухосных линз) формулу (30.4), которая является приближенным уравнением такого острия. Я легко обнаружил также, что существуют *только четыре* таких острия на каждой из двух двойственных поверхностей, и соответственно заключил, что существуют *только четыре* кривые плоского касания на каждой из поверхностей. Смею заметить, что, хотя я позаботился приписать открытие поверхности составляющих Коши, еще до того, как мне в руки попались его "Exercices de mathématique", я из своих собственных исследований знал о существовании и перечисленных выше свойствах этой поверхности: и существование, и свойства немедленно следуют из первых принципов моего подхода к оптике, так как он позволяет вывести фундаментальное дифференциальное уравнение в частных производных

$$\Omega\left(\frac{\delta V}{\delta x}, \frac{\delta V}{\delta y}, \frac{\delta V}{\delta z}\right) = 0,$$

которому должна удовлетворять моя характеристическая функция V.

Поверхность составляющих обладает многими интересными свойствами, например следующим: в конечной однородной среде любые две сопряженные плоскости вергенции (21.5) перпендикулярны двум сопряженным касательным на поверхности составляющих. Это утверждение эквивалентно менее простым соотношениям,

---

[11] *MacCullagh J.* Collected works. Dublin, 1897. P. 3.

рассмотренным нами в п. 21. Но настоящее "Дополнение" и без того слишком растянулось, что вынуждает меня ограничиться лишь одним замечанием. Общие уравнения отражения или преломления (29.1)

$$\Delta\sigma = 0, \quad \Delta\tau = 0$$

эквивалентны следующему утверждению: *соответствующие точки* (σ, τ, υ и $\sigma + \Delta\sigma$, $\tau + \Delta\tau$, $\upsilon + \Delta\upsilon$) *на поверхности или поверхностях составляющих* ($\Omega = 0$, $\Omega + \delta\Omega = 0$) *до и после любого отражения или преломления, обыкновенного или необыкновенного, расположены на общем перпендикуляре к плоскости, которая касается отражающей или преломляющей поверхности в точке касания или преломления.* Новое геометрическое соотношение, приводящее к новому и общему построению для определения отраженного или преломленного луча, во многих отношениях проще, чем построение, предложенное Гюйгенсом.

О НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ, ПРОИСТЕКАЮЩИХ ИЗ ВЗГЛЯДА НА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКУЮ ФУНКЦИЮ В ОПТИКЕ*

Автор излагает некоторые оптические результаты, полученные им, исходя из взгляда, который он изъяснил в прошлом году в Оксфорде.

Его общий метод исследования оптических систем состоит в том, чтобы свойства любой оптической комбинации выразить в виде *одной характеристической функции*, одного главного, основополагающего соотношения. *Фундаментальную проблему* исследования свойств систем лучей, образуемых любым объективом, атмосферой, другими оптическими приборами или комбинацией поверхностей и сред, обыкновенных и необыкновенных, он усматривает в том, чтобы выразить для любой такой комбинации *законы зависимости конечного и начального направлений* линейной траектории света от *конечного и начального положений*, или точек, и от цвета. Предложенное автором решение этой фундаментальной проблемы состоит, во-первых, в сведении с помощью единообразных методов (аналогичных тем, которые используются при рассмотрении уравнения кривой или поверхности) нескольких *законов зависимости* (четырех направляющих углов луча, искривленного или имеющего форму ломаной, в начальной и конечной точках от шести координат начальной и конечной точек и от цвета) к *одному закону*, различному для различных комбинаций, в соответствии с чем единственная характеристическая функция автора зависит от тех же семи переменных, и, во-вторых, в установлении единообразных методов исследования вида этой функции, а именно действия, или времени распространения света, для любой заданной комбинации.

Например, в случае одного плоского зеркала, совпадающего по предположению

---

* On some results of the view of a characteristic function in optics (June, 1833) // Brit. Assoc. Rep. 1833. P. 360–370 [H. 1. P. 297–303]. Перевод Ю.А. Данилова.

с плоскостью xy, нам может потребоваться определить законы двух направлений (в начальной и конечной точках) линейной траектории, по которой свет попадает в глаз (x, y, z) от некоторого объекта $(x', y' z')$, или (выражая ту же мысль более полно) определить начальные косинусы α, β, γ и конечные косинусы α', β', γ' углов наклона этой изогнутой траектории к положительным полуосям координат как функции от x, y, z, x', y', z', т.е. шести координат начальной и конечной точек (цвет в данном случае роли не играет). Предложенное м-ром Гамильтоном общее решение этой и всех других задач относительно комбинаций обыкновенных отражателей (решение, которое само является частным случаем более общего результата, охватывающего все оптические комбинации) выражается уравнениями

$$\alpha = \frac{\delta V}{\delta x}, \quad \beta = \frac{\delta V}{\delta y}, \quad \gamma = \frac{\delta V}{\delta z}, \qquad \alpha' = \frac{\delta V}{\delta x'}, \quad \beta' = \frac{\delta V}{\delta y'}, \quad \gamma' = \frac{\delta V}{\delta z'}. \tag{1}$$

Характеристическая функция V во всех задачах, относящихся к комбинациям отражателей, означает длину изогнутой траектории света и для зеркала рассматриваемой нами формы имеет вид

$$V = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}, \tag{2}$$

но в других случаях ее вид отличен от (2). Так, для отражающей сферы или для ньютоновского телескопа длина изогнутой траектории света зависела бы от начальной и конечной точек по-иному и *характеристическая функция V* имела бы другой вид; но, подставив эту новую функцию в уравнения (1), мы по-прежнему получили бы согласованные зависимости шести *направляющих функций*, или направляющих косинусов, $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ и, следовательно, смогли бы вывести все остальные свойства телескопа (по крайней мере все свойства, связанные с действием телескопа на систе́мы лучей).

Из сказанного можно заключить, что м-р Гамильтон подразделяет математическую оптику на две главные части: одна часть предназначается для *нахождения* в каждом конкретном случае вида характеристической функции V, другая предназначается для *использования* этой функции, подобно тому как в алгебраической геометрии один класс задач занимается нахождением уравнений кривых или поверхностей, удовлетворяющих заданным условиям, а другой класс задач занимается исследованием этих уравнений, после того как они найдены. Исследования, опубликованные автором в XV, XVI и XVII томах "Transactions of the Royal Irish Academy" [[31]], содержат примеры того и другого направления, хотя относятся главным образом ко второй части, или ко второму классу задач, а именно к использованию характеристической функции, которая предполагается известной. Автор стремился установить для этого систему общих формул, и ему удалось вывести много общих следствий и свойств оптических систем, не зависящих от конкретных форм, положений и других особенностей поверхностей и сред любой оптической комбинации. В этой связи, возможно, будет уместно упомянуть здесь о некоторых результатах, не столь общих, как те, о которых только что шла речь, но тем не менее идущих достаточно далеко.

Если требуется исследовать свойства объектива, окуляра или какого-нибудь другого оптического прибора в пустоте, симметричного во всех отношениях относительно одной оси вращения, то эту ось можно принять за ось z. При этом уравнения (1) будут по-прежнему выполняться, но *характеристическая функция* V будет зависеть от пяти величин $x^2 + y^2$, $xx' + yy'$, $x'^2 + y'^2$, z, z', а в общем случае еще и от цвета, причем вид ее будет определяться свойствами осесимметричного прибора. Наоборот, эти свойства прибора содержатся в виде характеристической функции V или другой, связанной с V функции

$$T = \alpha x + \beta x + \gamma z - \alpha' x' - \beta' y' - \gamma' z' - V, \tag{3}$$

которую можно считать зависящей лишь от трех независимых переменных, помимо цвета, а именно от углов, образуемых конечным и начальным участками траектории света между собой и с осью прибора. С точки зрения алгебры T в общем случае – функция цвета и трех величин $\alpha^2 + \beta^2$, $\alpha\alpha' + \beta\beta'$, $\alpha'^2 + \beta'^2$. Обычно (хотя и не всегда) она допускает разложение по возрастающим степеням, положительным и отрицательным, этих трех величин, которые в большинстве приложений малы – порядка квадратов углов наклона. Следовательно, в большинстве случаев мы можем ограничиться приближенным выражением вида

$$T = T^{(0)} + T^{(2)} + T^{(4)}, \tag{4}$$

где $T^{(0)}$ не зависит от углов наклона, $T^{(2)}$ – малая величина второго порядка (если углы наклона малы) вида

$$T^{(2)} = P(\alpha^2 + \beta^2) + P_{,}(\alpha\alpha' + \beta\beta') + P'(\alpha'^2 + \beta'^2), \tag{5}$$

$T^{(4)}$ – малая величина четвертого порядка вида

$$T^{(4)} = Q(\alpha^2 + \beta^2) + Q_{,}(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha\alpha' + \beta\beta') + Q'(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha'^2 + \beta'^2) +$$

$$+ Q_{,,}(\alpha\alpha' + \beta\beta') + Q'_{,}(\alpha\alpha' + \beta\beta')(\alpha'^2 + \beta'^2) + Q''(\alpha'^2 + \beta'^2), \tag{6}$$

а девять коэффициентов P, $P_{,}$, P', Q, $Q_{,}$, Q', $Q_{,,}$, $Q'_{,}$, Q'' либо постоянные, либо зависят только от цвета. Оптические свойства инструмента с высокой степенью приближения обычно зависят от этих девяти коэффициентов и от их вариации в зависимости от цвета, поскольку в большинстве случаев функция T может быть довольно точно выражена через них, а фундаментальные уравнения (1) могут быть строго преобразованы к виду

$$x - \frac{\alpha}{\gamma} z = \frac{\delta T}{\delta \alpha}, \qquad y - \frac{\beta}{\gamma} z = \frac{\delta T}{\delta \beta},$$

$$x' - \frac{\alpha'}{\gamma'} z' = \frac{\delta T}{\delta \alpha'}, \qquad y' - \frac{\beta'}{\gamma'} z' = -\frac{\delta T}{\delta \beta'}. \tag{7}$$

Первые три коэффициента P, $P_{,}$, P', входящие по формуле (5) в выражение для члена $T^{(2)}$, – те самые, от которых зависят фокусные расстояния, кратности уве-

личения и хроматические аберрации. Сферические аберрации для прямых или наклонных лучей, от близкого или далекого объекта, по любую сторону от прибора (но на не слишком большом расстоянии от оси) зависят от шести других коэффициентов Q, $Q_{,}$, Q', $Q_{,,}$, $Q'_{,}$, Q'' в выражении для члена $T^{(4)}$.

Это – новое замечательное свойство объективов, окуляров и других осесимметричных оптических приборов, а именно все детали их *сферических аберраций*, как бы они ни зависели от расстояния и угла наклона, (обычно) зависят от значений *шести главных постоянных аберраций* [32] и могут быть выведены из этих шести чисел с помощью единообразных и общих методов. Подобно тому как, используя общие символы для обозначения постоянных коэффициентов, или элементов, эллиптической орбиты, мы получаем возможность вывести результаты, относящиеся ко всем таким орбитам, и затем конкретизировать их для каждой орбиты, точно так же, используя общие символы для шести постоянных сферической аберрации, подсказанные предшествующей теорией, мы обретаем возможность вывести общие результаты относительно аберрационных свойств осесимметричных оптических приборов и затем комбинировать их с особенностями каждого конкретного прибора, подставляя численные значения его индивидуальных постоянных. Автор приступает теперь к краткому изложению некоторых общих следствий, полученных им на основе изложенного выше взгляда, относительно аберрационных свойств осесимметричных оптических приборов.

Если светящаяся точка находится на оси объектива, окуляра или другого осесимметричного прибора и если лучи от нее не преломляются и не отражаются, чтобы сойтись точно в одном общем фокусе или разойтись точно от одного общего фокуса, то, как известно, все они располагаются по касательным к одной каустической поверхности вращения и все они пересекают ось, по крайней мере если их в случае необходимости продолжить, позади прибора. Но если светящаяся точка расположена где-нибудь вне оси, то конечные лучи образуют не столь простую систему, как прежде. Они не все касаются меридиана некоторой поверхности вращения и не все пересекают ось прибора. По другой известной теореме конечные лучи совпадают с касательными к *двум каустическим поверхностям* и к *двум семействам каустических кривых*, образуя *две серии развертывающихся пучков*, или линейчатых поверхностей. Каждый луч конечной системы можно поэтому рассматривать как имеющий *два фокуса* или две точки пересечения с другими лучами, расположенные бесконечно близко. Теорема, о которой мы только что упомянули (о существовании в общем случае *двух фокусов* для каждого луча системы, порождаемой любой поверхностью по любому закону), была впервые открыта Малюсом. М-р Гамильтон получил ее независимо, но несколько позднее – в 1823 г. Насколько можно судить, эта теорема пока малоизвестна, но, по мнению автора, она чрезвычайно важна для правильной картины расположения лучей в пространстве, поскольку аналогия с расположением лучей на плоскости совершенно неадекватна.

Теорема о двух фокусах в сочетании со взглядом автора на характеристическую функцию и шесть постоянных сферической аберрации для конечной системы, возникающей при наклонном падении света на осесимметричный прибор, позволила

обнаружить, что два фокуса произвольного луча этой конечной системы в общем случае не сливаются в один, за исключением *двух главных лучей*, каждый из которых имеет свой собственный *главный фокус*. Расстояние между двумя фокусами любого другого луча с высокой точностью можно считать пропорциональным произведению синусов углов его наклона к двум главным лучам. Касательные плоскости двух развертывающихся пучков, проходящие через любой переменный луч, (с высокой точностью) делят пополам дополнительные двугранные углы, образованные двумя плоскостями, которые содержат этот переменный луч и параллельны двум главным лучам, причем так, что все лучи любого развертывающегося пучка одного семейства имеют (с высокой точностью) одну общую *сумму*, а все лучи любого развертывающегося пучка другого семейства имеют (с высокой точностью) одну общую *разность* углов наклона к одним и тем же двум главным лучам, или *осям конечной системы*. Эти последние оси всегда пересекаются, и плоскость их либо совпадает с диаметральной плоскостью прибора (содержащей светящуюся точку или фокус падающих лучей), либо с плоскостью, перпендикулярной к той диаметральной плоскости, в зависимости от знака некой величины, обращающейся в нуль, когда две оси сливаются в один главный луч, относительно которого вся конечная система обладает весьма совершенной симметрией. В общем случае угол между двумя главными лучами, входящими в диаметральную плоскость прибора или выходящими из нее, делится пополам (с высокой точностью) некоторым лежащим в этой плоскости промежуточным лучом, который можно было бы назвать *центральным лучом* системы, поскольку другие конечные лучи располагаются относительно него с определенной симметрией, менее совершенной, чем симметрия относительно оси вращения, но напоминающей симметрию нормалей эллипсоида относительно одной из трех его осей, когда те не равны. Тем самым автор обнаружил, что конечные лучи от осесимметричного прибора (если падающие лучи наклонны) очень близки к нормалям, проведенным к части такого эллипсоида, одна из трех неравных осей которого совпадает с центральным лучом, а в двух из четырех точек, где эллипсоид имеет с оскулирующей сферой полное касание второго порядка, два главных луча совпадают с омбилическими нормалями [33].

Центры двух оскулирующих сфер в этих двух точках суть два главных фокуса системы, а центры двух крайних оскулирующих сфер в любой точке эллипсоида – два фокуса соответствующего луча или две точки, в которых луч касается двух каустических поверхностей. В рассматриваемом приближении последние поверхности являются поверхностями центров кривизны эллипсоида: они имеют кривую пересечения, на которой лежат два главных фокуса; каждая точка этой кривой, за исключением двух указанных, служит первым фокусом одного луча и вторым фокусом другого луча. Можно провести плоскость, перпендикулярную главному лучу и проходящую через два главных фокуса.

Эта плоскость вырежет на двух каустических поверхностях сечения, образующих своего рода небольшой ромб, состоящий из двух криволинейных равносторонних треугольников (точнее из фигур, мало отличающихся от таких треугольников) с двумя общими вершинами в главных фокусах. Площадь этих криволинейных треугольников и других сечений каустических поверхностей выражается через эллиптические интегралы. Во всех предыдущих замечаниях предполагалось для боль-

шей общности, что аберрации не исчезают с наклоном падающих лучей. Но если прибор апланатический для прямых падающих лучей, то применение той же теории характеристической функции и шести главных постоянных аберрации не встречает каких-либо трудностей и позволяет определить в частном случае составляющие сферической аберрации, возникающие только из-за наклона падающих лучей.

Развитая автором теория аберраций косых лучей (для осесимметричного прибора) может иметь практические приложения. Действительно, математическая симметрия расположения конечных лучей относительно центрального луча образуемых ими систем и интенсивность двух главных фокусов, возможно, как-то влияют на наше зрение и имеют определенную ценность для практического осуществления прибора, но об этом м-р Гамильтон говорит с осторожностью, поскольку утверждать что-либо с уверенностью можно будет лишь после того, как будут поставлены эксперименты, дающие прямой ответ на вопрос. Если практика покажет, что математические свойства, обнаруженные м-ром Гамильтоном с помощью лучей и аберраций системы, оказывает сколько-нибудь заметное влияние на явления зрения под углом, то возникнет необходимость внести изменения в некоторые из принятых ныне правил построения телескопов и микроскопов или по крайней мере усовершенствовать эти правила, следуя указаниям теории. Тем самым перед математическими и практическими оптиками откроются новые пути.

Принцип характеристической функции, из которого были получены изложенные выше результаты наряду с другими, еще не опубликованными результатами относительно осесимметричных оптических инструментов, применим к любому разделу математической и, возможно. физической оптики. Аналогичную функцию и метод можно ввести и в другие науки, в частности в динамическую астрономию[1], но автор ограничится упоминанием найденного им приложения указанного принципа к изучению законов необычного преломления в кристаллах, известных под названием двухосных. Общие законы отражения и лучепреломления, обыкновенного и необыкновенного, в любой точке любой поверхности в случае, когда нормаль к отражающей или преломляющей поверхности в точке падения выбрана за ось z, выражаются через характеристическую функцию следующим образом:

$$\Delta\frac{\delta V}{\delta x}=0, \qquad \Delta\frac{\delta V}{\delta y}=0. \tag{8}$$

На языке волновой теории их можно сформулировать, как утверждения о том, что если нормальную медленность распространения световой волны в любой точке падения на отражающую или преломляющую поверхность разложить по любому направлению, параллельному этой поверхности в точке падения, то *эта составляющая нормальной медленности не изменяется при отражении или преломлении.*

При обычном преломлении это утверждение сводится к следующему: если на продолженном падающем луче и на преломленном отложить от точки падения

[1] См. "Dublin Univ. Rev." за октябрь 1833 г. [H. 1. P. 311–322]. М-р Гамильтон разработал с тех пор динамическое приложение этого принципа, изложив его в работе "Об общем методе и динамике", представленной Королевскому обществу. По постановлению общества работа будет напечатана в "Philosophical Transactions" за 1834 г. [H. 2. P. 103–161].

отрезки, длины которых пропорциональны показателям преломления первой и второй сред, то эти отрезки будут иметь одну общую проекцию на преломляющую поверхность или на касательную к ней плоскость. Последнее утверждение есть не что иное, как один из вариантов закона Снеллиуса. В случае необыкновенного луча преломления нам в общем случае необходимо построить нормальную медленность волны с помощью отрезка переменной длины, не всегда совпадающего с лучом, но два отрезка, длины которых пропорциональны двум последовательным показателям преломления, будут по-прежнему иметь одну общую проекцию на преломляющую грань кристалла, если та плоская, или на касательную к ней плоскость, если та искривлена. Если мы попытаемся найти геометрическое место концов отрезка, длина и направление которого соответствуют нормальной медленности волны при всех возможных направлениях этой медленности, то для обыкновенных сред получим сферу, а для необыкновенных (в соответствии с принципами Френеля) – двухместную поверхность, не совпадающую с искривленной волновой поверхностью Френеля, которая распространяется во все стороны от точки, но тесно связанную с ней замечательными соотношениями взаимности.

Эту поверхность можно назвать *поверхностью составляющих*, так как ее координаты сами являются составляющими нормальной медленности распространения. Они равны частным производным первого порядка от введенной автором характеристической функции V и связаны между собой дифференциальным уравнением в частных производных вида

$$\Omega\left(\frac{\delta V}{\delta x}, \frac{\delta V}{\delta y}, \frac{\delta V}{\delta z}\right) = 0, \tag{9}$$

которое можно рассматривать как уравнение поверхности. Общие уравнения отражения или преломления (8), если их представить в виде

$$\frac{\delta V}{\delta x} + \Delta\frac{\delta V}{\delta x} = \frac{\delta V}{\delta x}, \qquad \frac{\delta V}{\delta y} + \Delta\frac{\delta V}{\delta y} = \frac{\delta V}{\delta y}, \tag{10}$$

означают, что соответствующие точки на двух поверхностях составляющих (до и после любого отражения или преломления, обыкновенного или необыкновенного) находятся на одной общей ординате к отражающей или преломляющей поверхности или к плоскости, касательной к этой поверхности.

Это дает новый общий способ построения направления отраженной или преломленной волны и, следовательно, направления отраженного или преломленного луча, во многих случаях более простой, чем способ, предложенный Гюйгенсом. Так, если бы требовалось при заданном направлении падающего луча в воздухе определить с помощью нового построения направление и волновую скорость необыкновенного луча, преломленного в исландском шпате, то мы должны были бы сначала построить две последовательные поверхности составляющих, имевшие бы в данном случае форму сферы для воздуха и сфероида (не гюйгенсовского) для кристалла с общим центром в точке падения.

После того как мы определили бы затем точку полусфероида внутри кристалла, находящуюся на той же ординате к преломляющей поверхности, как и точка, в

которой продолженный падающий луч пересекает свою собственную внутреннюю полусферу, нам осталось бы лишь провести касательную плоскость к сфероиду в найденной ранее точке и опустить перпендикуляр на эту плоскость из точки падения. Этот перпендикуляр по длине и направлению совпадает с радиусом-вектором гюйгенсовского сфероида и, следовательно, задает волновую скорость и направление необыкновенного луча. Аналогичным образом можно рассматривать и более сложные случаи, либо производя построение, либо используя эквивалентные формулы, выведенные из характеристической функции.

Когда автор приступил к применению этого общего метода к принципам Френеля относительно двухосных кристаллов, то получил неожиданный результат, состоящий в том, что в таком кристалле не в любой точке поверхности составляющих можно провести одну касательную плоскость: в каждом из *четырех попарно противоположных острий* существует бесконечно много касательных плоскостей, или *касательный конус*, из чего автор с помощью своего общего метода немедленно заключил, что если луч в воздухе падает на двухосный кристалл так, что точка на сфере в воздухе соответствует (в силу рассмотренного выше правила) одному из острий на поверхности составляющих нормальной медленности в кристалле, то предложенное автором построение даст не один преломленный луч, и даже не два, и не любое конечное число таких лучей в кристалле, а *бесконечно много преломленных лучей*, а именно все перпендикуляры, которые можно опустить из точки падения на касательный конус в острие.

Автор обнаружил также, что эти лучи должны оканчиваться на некоторой *плоской кривой касания на двулистной волновой поверхности Френеля* (на всем протяжении такой искривленной волновой поверхности касается одна и та же плоскость) и что таких кривых должно быть четыре, после чего доказал, что эти кривые – *окружности*. Френель не заметил столь интересного свойства двулистной волновой поверхности. Но самое замечательное в полученном автором результате было то, что этот результат позволял подвергнуть принципы Френеля новой, весьма тонкой экспериментальной проверке, поскольку *внутренняя коническая рефракция*, предсказанная им для некоторых случаев падения на двухосный кристалл, не только не наблюдалась прежде, но, казалось, противоречила всем известным до того аналогиям в наблюдениях.

Таким образом, если бы эти теоретические следствия из принципов Френеля, о которых тот сам не подозревал, удалось проверить экспериментально, то сами принципы получили бы новое, причем поразительное, подтверждение. Наоборот, если бы эксперименты, поставленные со всей тщательностью не обнаружили теоретически предсказанную автором малую, но отличную от нуля коническую рефракцию, то нам пришлось бы либо отказаться от принципов Френеля, либо внести в них надлежащие изменения. Эту экспериментальную проверку предпринял по настоянию автора проф. Ллойд.

После нескольких неудачных опытов с кристаллами недостаточных размеров и чистоты проф. Ллойд получил великолепный образец арагонита от м-ра Доллонда, после чего проф. Ллойду, наконец, полностью удалось обнаружить явление, предсказанное м-ром Гамильтоном. Лучи внутреннего конуса возникали, как и должно быть, в цилиндре от второй грани кристалла. Размеры этого почти кругового

цилиндра, хотя и малые, все же были вполне ощутимыми, поэтому при солнечном свете он отбрасывал на серебряную бумагу небольшое светящееся кольцо, не изменявшееся сколько-нибудь заметно, когда бумага отодвигалась на различные расстояния от арагонита.

Профессор Ллойд описывает явление как очень красивое, когда он воспользовался лампой и сосредоточил возникающие лучи на линзе: по его словам, он наблюдал, как две светлые точки, порождаемые обычно двойной рефракцией, по достижении критического совпадения внезапно расплывались в золотистое кольцо на темном фоне. Отчет проф. Ллойда (вместе с теоретическим исследованием проф. Гамильтона) помещен в первой части XVII тома "Transactions of the Royal Irish Academy"; более краткое изложение опубликовано также в номерах "London and Edinburgh Philosophical Magazine" за февраль и март 1833 г.[2]

Исходя из связи между поверхностью составляющих и волновой поверхностью, распространяющейся от точки, автор пришел к заключению, что из существования четырех острий на одной поверхности в теории Френеля следует существование четырех аналогичных острий на другой поверхности, расположенных в точках пересечения окружности Френеля и эллипса в плоскости главных осей упругости. Именно это обстоятельство привело автора к предсказанию *внутренней конической рефракции*, соответствующей внутреннему падению *луча в острие*, выходящего в воздух из двухосного кристалла. В этой связи автор также обратился к проф. Ллойду с просьбой поставить серию экспериментов и получил (даже раньше, чем по остальным вопросам) полное подтверждение своего предсказания. Полученные проф. Ллойдом на одном и том же образце арагонита экспериментальные данные о размерах и положении возникающего конуса, равно как и ранее наблюдавшегося цилиндра, а также о законах поляризации в конусе и цилиндре оказались в согласии с теоретическими предсказаниями, полученными из принципов Френеля методом характеристической функции.

Хотя в будущем этот метод, скорее всего, будет принят аналитиками, занимающимися исследованиями в области теоретической оптики, автор отнюдь не претендует на то, что его результаты нельзя получить другими способами. В частности, что касается двух типов конической рефракции, то м-р Мак-Куллах[3] опубликовал в "London and Edinburgh Philosophical Magazine" за август и сентябрь сего года изящное геометрическое исследование, присовокупив к нему отчет об успехах, достигнутых им в размышлениях об этом предмете. Поверхность, которую проф. Гамильтон назвал *поверхностью составляющих* (нормальной медленности распространения) и к которой пришел несколькло лет назад при выводе фундаментального уравнения, связывающего частные производные введенной им характеристической функции, возникла и в исследованиях м-ра Мак-Куллаха, но, как тот сообщил автору, независимо от геометрических соображений. Та же поверхность встретилась и м-ру Коши[4] в его исследованиях по динамике системы притягивающихся или отталкивающихся точек.

---

[2] См. также: Brit. Assoc. Rep. 1833. P. 370–373. Рус. пер. статей Ллойда см. в Дополнениях наст. изд.

[3] *MacCullagh J.* Collected works. Dublin, 1897. P. 17–19.

[4] *Cauchy A.L.* Oeuvres complètes. Paris, 1908. Sér. 2. T. 9. P. 410.

ФИЗИЧЕСКАЯ ОПТИКА

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ДИНАМИКЕ СВЕТА*

Неограниченные ряды равных и эквидистантных частиц..., m_{-1}, m_0, m_1,..., расположенных на оси x в точках ...,–1, 0, +1,... получают в момент времени 0 очень маленькие поперечные смещения ..., $y_{-1,0}$, $y_{0,0}$, $y_{+1,0}$,... и очень малые поперечные скорости ...,$y'_{-1,0}$, $y'_{0,0}$, $y'_{+1,0}$,...; требуется определить их смещения ..., $y_{-1,t}$, $y_{0,t}$, $y_{1,t}$,... для любого времени t; каждая частица предполагается притягиваемой каждой непосредственно ей предшествующей или последующей в этом ряду с энергией $= a^2$ и не испытывает сколько-нибудь существенного влияния какой-либо из более удаленных частиц. Эта задача может рассматриваться как эквивалентная задаче интегрирования уравнения в смешанных производных:

$$y''_{x,t} = a^2(y_{x+1,t} - 2y_{x,t} + y_{x-1,t}); \tag{1}$$

оно может быть записано, следовательно, таким образом:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 y_{x,t} = \frac{(a\Delta_x)^2}{1+\Delta_x} y_{x,t}. \tag{1'}$$

Искомый общий интеграл может быть записан в следующем виде:

$$y_{x,t} = \left\{1 - \frac{a^2\Delta_x^2}{1+\Delta_x}\left(\int_0^t dt\right)^2\right\}^{-1} (y_{x,0} + ty'_{x,0}); \tag{2}$$

это выражение может быть представлено в виде суммы двух рядов

$$\begin{aligned} y_{x,t} &= y_{x,0} + \frac{a^2t^2}{1\cdot 2}\Delta_x^2 y_{x-1,0} + \frac{a^4t^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\Delta_x^4 y_{x-2,0} + \ldots \\ &\ldots + ty'_{x,0} + \frac{a^2t^3}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta_x^2 y'_{x-1,0} + \frac{a^4t^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\Delta_x^4 y'_{x-2,0} + \ldots, \end{aligned} \tag{2'}$$

или в виде

$$y_{x,t} = \frac{2}{\pi}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} y_{x+l,0}\int_0^{\pi/2} d\theta\cos(2l\theta)\cdot\cos(2at\sin\theta) +$$

* Researches on the dynamics of light (Jan. 14, Febr. 11, 1839) // Proc. Roy. Irish Acad. 1841. Vol. 1. P. 245, 267–270 [H. 2. P. 576–577]. Перевод Л.С. Полака.

$$+\frac{1}{a\pi}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} y'_{x+l,0}\int_0^{\pi/2} d\theta\cos(2l\theta)\cdot\operatorname{cosec}\theta\cdot\sin(2at\sin\theta). \qquad (2'')$$

Первая строка (2′) или (2″) выражает эффект начальных смещений, а вторая – эффект начальных скоростей для всех возможных предположений относительно этих начальных данных или для всех возможных форм двух произвольных функций $y_{x,0}, y'_{x,0}$.

Предположим теперь, что эти произвольные формы начальных условий таковы, что

$$y_{x,0} = \eta\,\mathrm{vers}\frac{2x\pi}{n}\,[^1], \quad y'_{x,0} = -2a\eta\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2x\pi}{n} \qquad (3)$$

для всех значений целых чисел x между границами 0 и $-in$ (i и n – положительные и большие, но конечные целые числа) и что для всех других значений x функции $y_{x,0}$ и $y'_{x,0}$ обращаются в нуль; это эквивалентно допущению, что в начале t и для большого числа i длин волн (каждая $=n$) после начала отсчета x смещения и скорости частиц таковы, что они согласуются со следующим законом волновых колебаний:

$$y_{x,t} = \eta\,\mathrm{vers}\left(\frac{2x\pi}{n} - 2at\sin\frac{\pi}{n}\right) \qquad (3')$$

при условии, что другие частицы в этот момент времени покоятся; требуется определить движение, которое будет иметь место как следствие этих начальных условий. Решение выражается следующей формулой, которая есть строгий вывод из уравнения в смешанных производных (1):

$$y_{x,t} = \frac{\eta}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^2\int_0^{\pi}\frac{\sin(in\theta)}{\sin\theta}\frac{\cos(2x\theta + in\theta - 2at\sin\theta)}{\cos\theta - \cos(\pi/n)}d\theta; \qquad (4)$$

это выражение неограниченно стремится к

$$y_{x,t} = \frac{\eta}{2}\mathrm{vers}\left(\frac{2x\pi}{n} - 2at\sin\frac{\pi}{n}\right) - \frac{\eta}{2\pi}\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^2\int_0^{\pi}\frac{\sin(2x\theta - 2at\sin\theta)d\theta}{\sin\theta(\cos\theta - \cos(\pi/n))}, \qquad (4')$$

когда число i безгранично возрастает.

Обсуждается приближенное значение, которое эти строгие интегралы принимают, когда значение t велико. Найдено, что колебание, фаза и амплитуда которого согласуются с законом (3′), распространяется только вперед, но не назад, так что возбуждаются последовательно новые и более удаленные частицы (а другие остаются последовательно в покое, если i конечно) со скоростью распространения, которая выражается как $a\cos(\pi/n)$ и которая, следовательно, меньше на конечную, хотя и малую величину, чем скорость перехода $a(n/\pi)\sin(\pi/n)$ какой-либо данной фазы от одной колеблющейся частицы до другой внутри протяженных рядов, которые уже полностью возбуждены. Другими словами, сообщенное колебание не приобретает заметной амплитуды, пока не пройдет конечный интервал времени с

момента, когда можно считать, что оно началось, рассматривая только закон распространения фазы через неограниченный ряд частиц, которые все уже колеблются. Малое возмущение, отличное от колебания (3′), распространяется, следовательно, назад так же хорошо, как и вперед, со скоростью a, не зависящей от длины волны. И все эти распространения сопровождаются малой постепенной конечной диффузией, которая лишь после очень долгого времени делает все смещения незаметными, если число i хотя и достаточно большое, но конечное, т.е. если колебание было вначале ограничено некоторым конечным числом частиц.

ИССЛЕДОВАНИЯ О КОЛЕБАНИИ, СВЯЗАННОМ С ТЕОРИЕЙ СВЕТА*

Рассматривается интегрирование системы уравнений в смешанных производных

$$D_t^2 \delta x_{g,h} = \sum_{\Delta g} \delta(R\Delta_g x_{g,h}), \tag{1}$$

где h – целое число от 1 до n включительно, $x_{g,h}$ не зависит от t, а $\delta x_{g,h}$ – функция t и $x_{g,1},\ldots, x_{g,n}$, вид которой и требуется отыскать;

$$R = m_{g+\Delta g}\Phi\left\{\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n}(\Delta_g x_{g,h})^2\right\}, \tag{2}$$

Φ – вещественная функция полусуммы, заключенной в фигурные скобки, m – любая другая вещественная функция индекса $g + \Delta g$; g и $g + \Delta g$ – целые числа от минус до плюс бесконечности. Уравнения, которые необходимо интегрировать, могут быть переписаны в таком виде:

$$\xi''_{g,h,t} = \sum_{\Delta g}\left(R\Delta_g \xi_{g,h,t} + R'\Delta_g x_{g,h}\sum_{h=1}^{n}\Delta_g x_{g,h}\Delta_g \xi_{g,h,t}\right), \tag{1′}$$

где

$$R' = m_{g+\Delta g}\Phi'\left\{\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n}(\Delta_g x_{g,h})^2\right\}; \tag{2′}$$

функции, которые должны быть найдены интегрированием, будут иметь вид $\xi_{g,h,t}$, рассматриваемый как зависящий от t и $x_{g,1},\ldots, x_{g,n}$. Их начальные значения и начальные скорости роста (по t), а именно $\xi_{g,h,0}$ и $\xi'_{g,h,0}$, рассматриваются как произвольные, но заданные вещественные функции $x_{g,1},\ldots, x_{g,n}$. Для того чтобы упростить задачу, далее предполагается, что все суммы вида

$$\sum_{\Delta g} R(\Delta_g x_{g,1})^{\alpha_1}\ldots(\Delta_g x_{g,n})^{\alpha_n}, \quad \sum_{\Delta g} R'(\Delta_g x_{g,1})^{\alpha_1}\ldots(\Delta_g x_{g,n})^{\alpha_n} \tag{3}$$

* Researches respecting vibration connected with the theory of light (June 24, 1839) // Proc. Roy. Irish Acad. 1841. Vol. 1. P. 341–349. [H. 2. P. 578–582]. Перевод Л.С. Полака.

не зависят от g и равны нулю, когда один из показателей $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ является нечетным числом.

Эти уравнения аналогичны тем, которые Коши рассмотрел в своем мемуаре о дисперсии света, и они могут быть проинтегрированы подобным же образом [2].

Частный интеграл системы может быть найден при предположениях:

$$\xi_{g,h,t} = X_r A_{h,r} \cos\left(\varepsilon_r + s_r t - \sum_{i=1}^{n} u_i x_{g,i} \right), \tag{4}$$

$$\sum_{h=1}^{n} A_{h,r}^2 = 1, \tag{5}$$

$$s_r^2 A_{h,r} = \sum_{i=1}^{n} H_{h,i} A_{i,r}, \tag{6}$$

$$H_{h,h} = \sum_{\Delta g} \{R + R'(\Delta_g x_{g,h})^2\} \operatorname{vers}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i \Delta_g x_{g,i} \right) \quad [^3], \tag{7}$$

$$H_{h,i} = \sum_{\Delta g} R' \Delta_g x_{g,h} \Delta_g x_{g,i} \operatorname{vers}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i \Delta_g x_{g,i} \right), \tag{7'}$$

где индекс r – некоторое целое число, пробегающее значения от 1 до n. Оно вводится для того, чтобы различать между n различных систем значений s^2 и $n - 1$ отношений $A_1, \ldots, A_h, \ldots, A_n$, которые получаются решением системы n уравнений вида

$$s^2 A_h = \sum_{i=1}^{n} H_{h,i} A_i, \tag{6'}$$

в которых согласно (7′)

$$H_{i,h} = H_{h,i}. \tag{7''}$$

Существенно отметить, что согласно форме уравнений (6′), которые встречаются во многих задачах, мы будем иметь соотношение

$$\sum_{h=1}^{n} A_{h,q} A_{h,r} = 0, \tag{5'}$$

если q не равно r; согласно (5) и (5′) мы имеем также соотношения

$$\sum_{r=1}^{n} A_{h,r}^2 = 1, \tag{8}$$

$$\sum_{r=1}^{n} A_{h,r} A_{i,r} = 0. \tag{8'}$$

В частном интеграле (4) можно рассматривать $u_1, \ldots, u_n$ как произвольные параметры, функции которых X_r и ε_r вещественны и произвольны, в то время как s_r^2 и $A_{h,r}$ – вещественные и определенные функции. Следовательно, суммированием по

индексу r и интегрированиями по параметрам u_i, используя (5), (5′), (8), (8′) и теорему Фурье, распространенную на случай нескольких переменных, мы получим общий интеграл, применимый ко всем вещественным значениям начальных данных:

$$\xi_{g,h,t} = \left(\prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} du_i \right) \left(E_{h,t} \cos + F_{h,t} \sin \right) \sum_{i=1}^{n} u_i x_{g,i}, \tag{9}$$

в котором

$$\prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} du_i = \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \int_{-\infty}^{\infty} du_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} du_n, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} E_{h,t} &= \sum_{r=1}^{n} A_{h,r} (Y_r \cos ts_r + Y' s_r^{-1} \sin ts_r), \\ F_{h,t} &= \sum_{r=1}^{n} A_{h,r} (Z_r \cos ts_r + Z'_r s_r^{-1} \sin ts_r), \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} Y_r &= \sum_{h=1}^{n} A_{h,r} E_{h,0}, \quad Y' = \sum_{h=1}^{n} A_{h,r} E'_{h,0}, \\ Z_r &= \sum_{h=1}^{n} A_{h,r} F_{h,0}, \quad Z'_r = \sum_{h=1}^{n} A_{h,r} F'_{h,0}, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} E_{h,0} &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^n \left(\prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} dx_{g,i} \right) \xi_{g,h,0} \cos \left(\sum_{i=1}^{n} u_i x_{g,i} \right), \\ E'_{h,0} &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^n \left(\prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} dx_{g,i} \right) \xi'_{g,h,0} \cos \left(\sum_{i=1}^{n} u_i x_{g,i} \right), \\ F_{h,0} &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^n \left(\prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} dx_{g,i} \right) \xi_{g,h,0} \sin \left(\sum_{i=1}^{n} u_i x_{g,i} \right), \\ F'_{h,0} &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^n \left(\prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} dx_{g,i} \right) \xi'_{g,h,0} \sin \left(\sum_{i=1}^{n} u_i x_{g,i} \right). \end{aligned} \tag{13}$$

Это общее решение заключает в себе многократные интегралы порядка $2n$; однако многие частные предположения о начальных данных приводят к более простым выражениям, из которых следующие заслуживают быть отмеченными.

Положим, что, взяв некоторую частную совокупность $u'_1, \ldots, u'_n$ значений произвольных величин $u_1, \ldots, u_n$, мы нашли соответствующую совокупность коэффициентов $H'_{h,h}, H'_{h,i}$ по формулам (7) и (7′) и представили с помощью

$s_1'^2$ и $A'_{1,1},\ldots,A'_{h,1},\ldots,A'_{n,1}$ некоторую соответственную систему величин, которая удовлетворяет уравнениям

$$\sum_{h=1}^{n} A'^2_{h,1} = 1, \tag{5'}$$

$$s'^2_1 A'_{h,1} = \sum_{i=1}^{n} H'_{h,i} A'_{i,1}\,; \tag{6'}$$

тогда мы имеем в качестве частного интеграла системы

$$\xi_{g,h,t} = X'_1 P'_{h,1} \cos\left(\varepsilon' + s'_1 t - \sum_{i=1}^{n} u'_i x_{g,i}\right), \tag{4'}$$

где X'_1, ε'_1 – некоторые произвольные вещественные величины. Если, следовательно, мы предположим, что начальные данные $\xi_{g,h,0}$ и $\xi'_{g,h,0}$ все таковы, что согласуются с этим частным решением, т.е. если мы имеем для всех значений g и h

$$\xi_{g,h,0} = X'_1 A'_{h,1} \cos\left(\varepsilon'_1 - \sum_{i=1}^{n} u'_i x_{g,i}\right), \tag{14}$$

$$\xi'_{g,h,0} = -s'_1 X'_1 A'_{h,1} \sin\left(\varepsilon'_1 - \sum_{i=1}^{n} u'_i x_{g,i}\right), \tag{14'}$$

то видим a priori: многократное интегрирование должно быть таким, что будет выражено конечными членами, и тем самым общее выражение (9) будет приведено к частному виду (4'). Это ожидание, как показывает вычисление, a posteriori является оправданным. Аналогичное, но менее простое приведение имеет место, если предположить, что начальные уравнения (14) и (14′) остаются в силе после того, как вторые члены в них будут умножены на прерывный множитель такого вида:

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{k}\sin\left(k\sum_{i=1}^{n} u'_i x_{g,i}\right)dk\right), \tag{15}$$

который равен 1, или 1/2, или нулю соответственно тому, что

$$\sum_{i=1}^{n} u'_i x_{g,i} < 0, \quad \text{или} = 0, \quad \text{или} > 0.$$

Найдено, что в этом случае $2n$ последовательных интегрирований (требуемых для общего решения) могут быть полностью выполнены по частям, а оставшаяся часть приведена к вычислению простого определенного интеграла. Таким образом, выражение (9) строго приводится к следующему:

$$\xi_{g,h,t} = \frac{1}{2} X'_1 A'_{h,1} \cos\left(\varepsilon'_1 + t s'_1 \sum_{i=1}^{n} u'_i x_{g,i}\right) + \frac{1}{\pi} X'_1 \int_0^\infty \frac{dk}{k^2 - k'^2}(L_t \cos\varepsilon'_1 + M_t \sin\varepsilon'_1), \tag{16}$$

в котором

$$L_t = P_t\, k'\cos kx - Q_t\, k\sin kx,$$

$$M_t = P_t\, k\sin kx - Q_t\, k'\cos kx, \tag{17}$$

$$P_t = s'_t \sum_{r=1}^{n} \left(A_{h,r} s_r^{-1} \sin ts_r \sum_{h=1}^{n} A_{h,r} A'_{h,1} \right),$$

$$Q_t = \sum_{r=1}^{n} \left(A_{h,r} \cos ts_r \sum_{h=1}^{n} A_{h,r} A'_{h,1} \right), \tag{18}$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} a'_i x_{g,i}, \tag{19}$$

$$ka'_i = u_i, \quad k' a'_i = u'_i, \quad k'^2 = \sum_{i=1}^{n} u'^2_i, \tag{20}$$

а s_r, $A_{h,r}$ суть такие же, как выше, функции $u_1, \ldots, u_n$.

Из этих выражений можно теперь получить замечательное следствие, положив, что все величины вида s_r^2 не только вещественны, но и положительны, так что функции $\cos ts_r$ и $\sin ts_r$ периодические. В этом случае $\cos(ts_r \pm kx)$ и $\sin(ts_r \pm kx)$ будут изменяться быстро и проходить через все колебания значений между пределами 1 и –1, в то время как k и другие функции этих переменных почти не меняются в силу того, что $tds_r/dk \pm x$ велико и что знаменатель $k^2 - k'^2$ не очень мал. Мы можем поэтому в общем ограничить себя соображением о малых значениях этого знаменателя и записать его в форме $2k'(k - k')$, положив $k = k'$ в числителе, за исключением значений под знаками периодичности, и проинтегрировать по k между какими-либо пределами, которые заключают k', например между $-\infty$ и $+\infty$. Так как

$$\sum_{h=1}^{n} A'_{h,r} A'_{h,1} = 1 \quad \text{или} \quad = 0,$$

соответственно тому $r = 1$ или > 1, мы можем положить

$$P_t = A'_{h,1} \sin ts_1, \quad Q_t = A'_{h,1} \cos ts_1,$$

$$L_t = k' A'_{h,1} \sin(ts_1 - kx), \quad M_t = k' A'_{h,1} \cos(ts_1 - kx)$$

и

$$\xi_{g,h,t} = \frac{1}{2} X'_1 A'_{h,1} \left\{ \cos(\varepsilon' + ts'_1 - k'x) + \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\sin(\varepsilon'_1 + ts'_1 - kx)}{\pi(k - k')} \right\}, \tag{21}$$

т.е. приближенно, если x значительно отличается от tds'_1/dk',

$$\xi_{g,h,t} = \frac{1}{2} X'_1 A'_{h,1} \cos(\varepsilon'_1 + ts'_1 - k'x) \left\{ 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\pi k} \sin\left(t\frac{ds'_1}{dk'} - x \right) k \right\}. \tag{21'}$$

Мы имеем, следовательно, приближенные выражения

$$\xi_{g,h,t} = X_1' A_{h,1}' \cos(\varepsilon' + ts_1' - k'x), \text{ если } x < tds_1'/dk' \tag{22}$$

и

$$\xi_{g,h,t} = 0, \text{ если } x > tds_1'/dk'. \tag{22'}$$

Следовательно, приближенно

$$\xi_{g,h,t} = \tfrac{1}{2} X_1' A_{h,1}' \cos(\varepsilon_1' + ts_1' - k'x), \text{ если } x = tds_1'/dk'. \tag{22''}$$

Однако обсуждение случая, когда x почти равен tds_1'/dk', слишком длинно, чтобы быть приведено здесь. Формула (22) для $\xi_{g,h,t}$ совпадает с частным интегралом (4'). Условие относительно x, которое заключено в нем, выражает закон, согласно которому этот частный интеграл делается приближенно верным для все бóльших и бóльших положительных значений x и t (если $ds_1'/dk' > 0$), если он был верен только для отрицательных значений x, когда t было равно нулю.

В частном случае $n = 3$ введенные выше формулы сразу имеют динамическое приложение и соответствуют распределению колебательного движения через систему взаимно притягивающихся или отталкивающихся точек; они приводят к тому замечательному результату, что скорость, с которой такое колебание распространяется в тех частях колеблющейся среды, которые ранее были невозмущенными, в общем случае отлична от скорости перехода некоторой данной фазы от одной частицы к другой внутри той части среды, которая уже полностью возбуждена:

$$\textit{Скорость переноса фазы} = \frac{s}{k}, \tag{A}$$

но

$$\textit{Скорость распространения колебательного движения} = \frac{ds}{dk}, \tag{B}$$

если прямоугольные компоненты колебаний сами представлены формулами

$$XA_1\cos(\varepsilon + st - kx), \qquad XA_2\cos(\varepsilon + st - kx), \qquad XA_3\cos(\varepsilon + st - kx), \tag{C}$$

t – время, x – перпендикулярное расстояние колеблющейся точки от некоторой заданной плоскости.

Этот результат, который представляется новым, включает как частный случай вывод, полученный в предыдущем сообщении в Академии от 11 февраля [4], о распространении поперечных колебаний вдоль ряда одинаковых и расположенных на равных расстояниях частиц, из которых каждая притягивает две – предшествующую и последующую; в этом частном случае $s = 2a \sin(k/2)$, а скорость распространения колебания равна $a \cos(k/2)$. Примененный к теории света этот результат позволяет показать, что если фаза колебания в обычной диспергирующей среде

для какого-либо цвета может быть представлена выражением

$$\varepsilon + \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{\mu} - x\right) \tag{C'}$$

так, что λ – есть длина волны для этого цвета и этой среды, и если возможно представить дисперсию разложением скорости переноса фазы $1/\mu$ в ряд вида

$$\frac{1}{\mu} = M_0 - M_1\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 + M_2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 - \ldots, \tag{A'}$$

то *скорость, с которой свет данного цвета завоевывает темноту,* в этой диспергирующей среде при *распространении колебания в те ее части, которые ранее не колебались, несколько меньше, чем* $1/\mu$ [5], и может быть представлена рядом

$$M_0 - 3M_1\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 + 5M_2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 - \ldots \tag{B'}$$

За другими деталями отсылаем к мемуару [6], который будет опубликован в "Proceedings" Ирландской академии и содержать много других результатов [7] о колеблющихся системах с приложениями к теории света.

ОПТИКО-МЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ

ОБ ОБЩЕМ МЕТОДЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПУТЕЙ СВЕТА И ПЛАНЕТ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ*

Принцип прямолинейности лучей зрения известен с самого зарождения оптики, поскольку обыденный опыт ежедневно и непрестанно привлекал к нему внимание людей. Как было не заметить, что человек, глядящий на любой предмет, может прервать его созерцание и всегда волен скрыть этот предмет от глаз своих, заслонив его рукой, помещаемой между глазами и рассматриваемым предметом, а затем, убрав руку, снова сделать предмет видимым. Таким образом, представление о прямых, или лучах, соединяющих видимый предмет и смотрящий на него глаз, должно было возникнуть и действительно возникло очень давно. В пользу представления о прямолинейности лучей зрения, разумеется, свидетельствовал и такой очевидный факт, как то, что предметы обычно можно разглядывать в прямую, но отнюдь не в изогнутую трубу. Новыми подтверждениями, равно как и новыми приложениями принципа прямолинейности лучей зрения, по нашему мнению, могли бы также стать хорошо известные свойства перспективы. Например, шар, с какой бы точки его ни рассматривали, всегда имеет очертания круга, в то время как круглая пластина или круглый стол, если их рассматривать под углом, кажутся овальными. Эти факты становятся объяснимыми и сводятся к математическому рассуждению, если показать, что прямые, или лучи зрения, касающиеся любого шара и проходящие через любую заданную точку, образуют полый конус идеально круговой формы, в то время как прямолинейные лучи, соединяющие глаз с краем круглой пластины или круглого стола, образуют, если они наклонны, эллиптический или овальный конус. Тот же принцип прямолинейности лучей зрения, должно быть, непрерывно использовался с древнейших времен при объяснении других хорошо известных явлений и при интерпретации свидетельств зрения относительно положения видимых тел в пространстве. Например, этот принцип играл важную роль в астрономии, как древней, так и современной.

Формы и размеры теней, в свою очередь, не могут не наводить на мысль о прямолинейности световых лучей, хотя представления (ныне отвергнутые) о природе света и зрения вынудили кое-кого из древних проводить различие между световыми лучами и лучами зрения и рассматривать последние как своего рода щупальцы, посредством которых глаз удостоверяется в существовании видимых предметов. Но, по-видимому, даже на заре оптики многие придерживались совре-

---

* On a general method of expressing the paths of light and of the planets, by the coefficients of a characteristic function // Dublin Univ. Rev. 1833. Oct. P. 795–826. [H. 1. P. 311–326]. Перевод Ю.А. Данилова.

менного взгляда на предмет и приписывали зрение, равно как и свечение, влиянию, оказываемому [на глаз] видимым или светящимся телом. Но окончательному установлению этого взгляда, а вместе с ним убеждения в конечной скорости распространения действия света способствовало открытие Рёмером на примере спутников Юпитера постепенного распространения света от объектов к глазу. Это дает нам достаточное основание, исходя из астрономических наблюдений, считать, что затмения мы никогда не видим ранее, чем через полчаса после того, как они произошли, причем запоздание тем больше, чем дальше находится Юпитер от Земли. Галилей предложил земные эксперименты для измерения скорости света, которую он считал конечной, а Декарт, полагавший, что свет распространяется мгновенно, понял, какие астрономические следствия проистекли бы из постепенного распространения света. Но опыты, предложенные Галилеем, не были и не могли быть поставлены в надлежащем масштабе, а состояние астрономических наблюдений во времена Декарта не позволяло ему проверить предсказанные им следствия и лишь служило обоснованием для использования невозможности прямой проверки следствий в качестве аргумента против утверждения о конечной скорости распространения света, с которым, как показал Декарт, эти следствия были логически связаны. Когда же астрономы прямыми наблюдениями установили существование явлений, которые казались и продолжают казаться объяснимыми лишь в рамках представления о постепенном распространении света от предметов к глазу, это представление стало необходимым и обрело свое место в закономерном развитии индукции.

Таковы этапы превращения [приведенного выше утверждения] в общепризнанную теорему, имеющую первостепенное значение в оптической науке и гласящую, что связь между освещающим телом и освещаемым телом или между видимым объектом и наблюдающим глазом осуществляется за счет постепенного, но чрезвычайно быстрого распространения некоторой субстанции (воздействия или состояния), называемой светом, от светящегося или видимого тела по математическим или физическим линиям, обычно называемым *лучами*, которые в большинстве случаев оказываются точно или приближенно прямолинейными.

Очень давно люди поняли и то, что в явлениях, связанных с зеркалами, плоскими или искривленными, световые лучи или лучи зрения распространяются по ломаным линиям. Когда мы глядим в плоское зеркало и нам кажется, будто мы видим какой-то предмет, например свечу, за зеркалом, было бы неверно распространять на этот новый случай правила более привычного нам опыта. Продолжив прямую, проведенную от глаза к руке или другому препятствию, расположенному между глазом и зеркалом так, чтобы скрыть из виду свечу, мы не наткнулись бы на свечу. Будучи продолжена, эта прямая пересеклась бы с зеркалом в определенном месте, из которого, если мы хотим достичь реальной, или осязаемой, свечи, следовало бы провести новую прямую, отличную от исходной. Вся ломаная в целом, составленная из двух прямолинейных участков, была бы лучом зрения, и ее надлежало бы теперь считать линейным путем света. Непрозрачное препятствие, помещенное в любом месте этой ломаной, скрывает отраженную свечу из виду, в то время как препятствие, помещенное где-нибудь еще, такого действия не производит. Очень давно был открыт закон, согласно которому для любого светового луча или луча

зрения нормаль, или перпендикуляр, к зеркалу в точке излома делит пополам угол между двумя смежными прямолинейными участками.

Столь же давним и важным явилось еще одно наблюдение – ломаных, или преломленных, лучей зрения между предметом в воде и глазом в воздухе или, более общо, между точкой в одной обыкновенной среде и точкой в другой обыкновенной среде. Ценную серию опытов с таким преломлением проделал и описал Птолемей, но лишь много времени спустя закон преломления был открыт Снеллиусом. Последний обнаружил, что если от точки преломления, или поворота, на преломленном луче и продолжении падающего луча отложить два отрезка, длины которых находятся в определенном отношении, или пропорции, определяемом природой двух сред, то проекции этих отрезков на преломляющую поверхность или касательную плоскость к ней совпадают. Этот закон обыкновенного лучепреломления был впоследствии усовершенствован Ньютоном, открывшим, что лучи различного цвета обладают различной преломляемостью, и применен к объяснению и вычислению кажущейся высоты звезд над горизонтом, обусловленной атмосферой Земли.

Явления, возникающие при прохождении света через кристаллы, были наблюдены лишь значительно позже. Бартолинус, по-видимому, первым обратил внимание на двойное лучепреломление исландского шпата, а Гюйгенс впервые открыл законы такого лучепреломления. Более сложное двойное лучепреломление в двухосных кристаллах стали наблюдать лишь в нашем веке, а открытие конической рефракции относится к совсем недавнему прошлому: опыты с образцом арагонита были поставлены (по моей просьбе) проф. Ллойдом лишь в прошлом году.

Для объяснения законов прямолинейного распространения света были предложены две главные теории, по поводу которых мнения ученых мужей все еще расходятся.

Теория Ньютона хорошо известна. Ньютон уподобил распространение света движению брошенного тела, а согласно первому закону движения, истинность которого сам Ньютон установил с помощью весьма обширной и красивой индукции, обычное брошенное тело продолжает двигаться прямолинейно и равномерно до тех пор, пока его движение не замедлится или не будет возмущено действием какого-нибудь постороннего тела. Аналогичным образом, полагал Ньютон, светящиеся и видимые тела испускают крохотные светоносные или светящиеся корпускулы, которые продолжают равномерно двигаться по прямым (либо потому, что на них вообще не действуют посторонние тела, либо потому, что посторонние действия равномерно распределены со всех сторон и взаимно уничтожаются, или компенсируются) до тех пор, покуда не будут тем или иным способом ускорены или замедлены притяжением или отталкиванием преломляющей или отражающей среды. Эта теория получила широкое признание среди математиков в прошлом веке и поныне имеет своих приверженцев.

Следует заметить, однако, что некоторые современные индуктивные открытия убедительно свидетельствуют в пользу другой теории, предложенной почти одновременно с ньютоновской другим великим философом. Этой теорией является теория Гюйгенса, сравнивавшего постепенное распространение света не с движением брошенного тела, а с распространением звука в воздухе или волн по воде.

Согласно Гюйгенсу, не существует ни *субстанции* в обычном смысле, ни *тел*, которые бы двигались от Солнца к Земли или от видимого предмета к глазу, а лишь *состояние, движение, возмущение* – сначала в одном, а затем в другом месте. Когда мы слышим, что где-то вдалеке выстрелила пушка, ни ядро, ни даже частичка воздуха не долетает от пушки до наших ушей, распространяется лишь движение воздуха: сначала возмущается воздух вблизи пушки, затем чуть дальше от нее, и, наконец, весь воздух, соприкасающийся с нами. Аналогичным образом обстоит дело и с волнами, которые расходятся и нарастают на поверхности спокойного озера, если ее возмутить брошенным камнем: плавающие водяные лилии вздымаются и опускаются, но отнюдь не покидают своего места, когда нарастающая волна проходит и одну за другой приводит их в движение. Так и бескрайний океан эфира, омывающий самые далекие звезды, непрестанно возмущают волны, распространяющиеся и нарастающие, от любого источника света, покуда они движутся и возбуждают все вокруг своими слабыми колебаниями. К тому же, подобно звуку в воздухе и волнам на воде, эти многочисленные возмущения не сливаются в нечто бесформенное, а свободно смешиваются и скрещиваются, причем каждое сохраняет свое тождество и хранит на себе отпечаток собственного происхождения. Таков взгляд на свет, принятый Гюйгенсом и по справедливости носящий ныне его имя, ибо какие бы схожие идеи ни приходили в голову предшественникам Гюйгенса, лишь он впервые ясно показал, каким образом этот взгляд приводит к законам оптики, объединив его с важным принципом волновой теории, впервые также открытым Гюйгенсом, а именно принципом накапливаемого возмущения.

Согласно этому принципу, слабые колебания упругого светового эфира не могут ощутимо воздействовать на наши глаза, производить воспринимаемый зрением свет, если они не образуют комбинаций и не действуют сообща в огромных, как бы бесконечных количествах. С другой стороны, такие комбинации возможны, поскольку теория [Гюйгенса] предполагает, что от каждой колеблющейся частицы как из отдельного центра распространяются собственные, или вторичные, волны, причем скорость распространения определяется природой среды. Отсюда, как считал Гюйгенс, следует, что свет в любой однородной среде распространяется только по прямым и поэтому достигает лишь тех частей пространства, которые доступны по прямолинейному пути, идущему от источника [света], ибо любое непрозрачное препятствие, нарушающее такое прямолинейное распространение света, хотя и не мешает слабым вторичным волнам распространяться в пространстве позади препятствия, но не позволяет им накапливаться в той части пространства в одну большую волну, достаточно интенсивную, чтобы породить свет. Невозможность скопления отдельных волн позади препятствия была изящно доказана Гюйгенсом. Взаимное погашение таких волн вследствие интерференции является важным дополнением к теории [Гюйгенса], внесенным Юнгом и Френелем. Аналогичные объяснения были предложены и для законов отражения и преломления.

Какую бы физическую теорию – Ньютона, Гюйгенса или какую-нибудь другую – мы ни приняли для объяснения законов, которым подчиняются световые лучи или лучи зрения, эти законы допускают и независимое рассмотрение. Свойства и

отношения линейных путей света как важная самостоятельная область исследований и как предмет отдельной науки часто называют *математической оптикой.* В свою очередь, эта наука о законах и отношениях световых лучей сама является разделом более общей науки, которую, по-видимому, можно было бы назвать *теорией систем лучей.* В XV и XVI томах "Transactions of the Royal Irish Academy" я опубликовал ряд исследований по этой теории [1] и попытался ввести новый принцип и метод для исследования оптических систем. Позднее в XVII томе тех же "Transactions" был опубликован еще один, дополнительный мемуар [2], но поскольку меня просили изложить здесь лишь самую суть моей теории и кратко проиллюстрировать мой взгляд новыми примерами, я начну с нескольких предварительных замечаний о состоянии дедуктивной оптики и важности общего метода.

Наука оптики, как и всякая другая физическая наука, имеет два различных направления развития, которые получили названия восходящего и нисходящего развития, индуктивного и дедуктивного метода, анализа и синтеза. В каждой физической науке нам необходимо подняться от фактов к законам с помощью индукции и анализа и спуститься от законов к следствиям с помощью дедукции и синтеза. Мы должны собирать и объединять явления в группы до тех пор, пока научное воображение не откроет нам таящийся в них закон, и из внешнего разнообразия не возникнет единства, после чего нам необходимо вновь извлечь из единства разнообразие и принудить открытый закон исторгнуть прогнозы на будущее.

Именно таких убеждений придерживался Ньютон, когда, завершая изложение своих трудов по оптике и окидывая единым взором проделанную работу, он обронил замечание в духе Бэкона о том, что "как в математике, так и в натуральной философии исследование трудных предметов методом анализа всегда должно предшествовать методу соединения. Такой анализ состоит в производстве опытов и наблюдений, извлечении общих заключений из них посредством индукции и недопущении иных возражений против заключений, кроме полученных из опыта или других достоверных истин... И хотя аргументация на основании опытов и наблюдений посредством индукции не является доказательством общих заключений, однако это лучший способ аргументации, допускаемый природой вещей, и может считаться тем более сильным, чем более общий характер носит индукция. Если нет исключения в явлениях, заключение может объявляться общим. Но если когда-нибудь после будет найдено исключение из опытов, то заключение должно высказываться с указанием найденных исключений. Путем такого анализа мы можем переходить от соединений к ингредиентам, от движений к силам, их производящим, и вообще от действий к их причинам, от частных причин к более общим, пока аргумент не закончится наиболее общей причиной. Таков метод анализа, синтез же предполагает причины открытыми и установленными в качестве принципов; он состоит в объяснении при помощи принципов явлений, происходящих от них, и доказательстве объяснений.

...Если натуральная философия, следуя этому методу, станет наконец совершенной во всех своих частях, расширятся также границы нравственной философии. Ибо, насколько мы можем познать при помощи натуральной философии, что такое первая причина, какую силу имеет она над нами и какие благодеяния мы от нее

получаем, настолько же станет ясным в свете природы наш долг по отношению к первой причине, а также друг к другу"[1].

В науке оптики, привлекавшей внимание почти каждого математика на протяжении двух последних тысячелетий, многие великие открытия были совершены как одним, так и другим способом. Замечательно, однако, что хотя законы науки оптики допускают представление по крайней мере в такой же чисто математической форме, как и любые другие физические результаты, математические следствия из них были проанализированы гораздо менее полно, чем математические следствия из многих других законов, и хотя современные эксперименты внесли немалый вклад в *индуктивный* прогресс оптики, ее *дедуктивный* прогресс извлек для себя лишь малую толику пользы от мощи современной алгебры.

Евклиду и Птолемею было известно, что связь между видимыми предметами и наблюдающим глазом обычно осуществляется по прямым линиям и что когда линия связи вследствие отражения становится ломаной, то в любой точке плоского или сферического зеркала угол изгиба между двумя смежными прямолинейными участками ломаной делится пополам нормалью к зеркалу в данной точке. Было известно также, что этот закон обобщается и на случай последовательных отражений.

Таким образом, две тысячи лет назад оптическая индукция была продвинута достаточно далеко для того, чтобы математики осознали и, насколько это зависит от знания физических законов, решили следующую проблему: определить расположение конечных прямых лучей или линий видимости, вдоль которых должен смотреть перемещающийся глаз, чобы увидеть данную светящуюся точку, отраженную комбинацией двух данных сферических зеркал. Тем не менее два основополагающих дедуктивных вывода относительно такого расположения лучей, без которого теория должна рассматриваться как весьма далекая от совершенства, а именно выводы о том, что конечные лучи в общем случае *касательны к двум поверхностям и перпендикулярны к семейству поверхностей*, являются – один теоремой новой и малоизвестной, а другой утверждением, истинность которого все еще остается под сомнением. Объясняется это по крайней мере отчасти следующим обстоятельством: Малюс, первым открывший, что лучи обыкновенной отражательной или преломленной системы в общем случае касательны к двум каустическим поверхностям, исходя из сложности своих вычислений, пришел к выводу о несуществовании в общем случае (открытых Гюйгенсом) поверхностей, перпендикулярных к таким лучам [[3]]. Возражение Малюса впоследствии было поднято вновь одним знаменитым аналитиком из Италии в ценном мемуаре о каустиках, опубликованном в прошлом году в трудах Брюссельской обсерватории [[4]].

Дальнейшее умножение числа подобных примеров существующего несовершенства математической, или дедуктивной, оптики было бы неблагодарной задачей и могло бы показаться попыткой умалить заслуги ныне живущих математиков. Предпочтительнее обратиться к источнику несовершенства – отсутствию общего метода, основополагающей идеи, к которой дедукция могла бы обращаться за руководством и помощью. Ибо хотя дедуктивный процесс в отличие от индук-

---

[1] *Ньютон И.* Оптика, или трактат об отражениях, преломлениях, изгибаниях и цветах света. М.: Гостехтеориздат, 1954. С. 306–307. (Классики естествознания). – *Примеч. пер.*

тивного с полным основанием может быть назван *методом*, диапазон его столь широк и разнообразен, что он нуждается в руководстве некоторым основополагающим принципом, способным придать ему неразрывность и силу.

Те, кто задумывался над красотой и пользой общего метода Лагранжа в теоретической механике, кто прочувствовал мощь и достоинство основной теоремы динамики, выведенной Лагранжем в "Аналитической механике" из комбинации принципа виртуальных скоростей и принципа Д'Аламбера и кто оценил простоту и гармонию, введенную Лагранжем в исследование возмущений планет с помощью идеи вариации параметров и дифференциалов возмущающей функции, должен ощутить, что математическая оптика сможет сравниться с математической механикой или динамической астрономией по красоте, мощи и гармонии, если она будет обладать подходящим методом и станет последовательным воплощением какой-либо основополагающей идеи.

Указанный существенный пробел [в математической оптике] уже давно привлек мое внимание, и я давно располагаю методом, позволяющим, как мне кажется, восполнить его. Высказывая такое мнение, я сознаю, что рискую оказаться предвзятым. Соображения, ставшие за давностью привычными, могут показаться мне, как это бывало и с другими, более важными, чем они являются в действительности, а используемый метод от длительного применения может обрести обманчивую простоту и легкость. Предоставляю другим судить, насколько успешны были мои попытки и придется ли их дополнять или отвергнуть по мере дальнейшего развития науки.

Пока же я склонен считать, что если общий метод вообще достижим в дедуктивной оптике, то он должен проистекать из какого-нибудь закона или принципа, в свою очередь обладающего наибольшей общностью, и высших результатов индукции. Что же можно в таком случае принять за высшую и наиболее общую аксиому (в смысле Бэкона) оптической индукции относительно правил и условий для световых лучей и лучей зрения?

Думаю, что ответом на этот вопрос должен быть принцип, или закон, обычно называемый принципом наименьшего действия, открытый с помощью сомнительных взглядов, но подтвержденный широчайшей индукцией и охватывающий любую известную комбинацию сред и любую прямую, ломаную или искривленную линию, обыкновенную и необыкновенную, вдоль которой свет, какова бы ни была его природа, последовательно распространяет свое влияние в пространстве и времени. Состоит этот принцип в следующем: линейный путь света из одной точки в другую всегда таков, что если сравнивать его с бесконечно многими другими линиями, которые мысленно или в геометрии можно провести между теми же двумя точками, то некий интеграл, или сумма, называемый *действием* и зависящий строго определенным образом от длины, формы и положения пути и от сред, через которые последний проходит, всегда меньше, чем все аналогичные интегралы, для других соседних линий или по крайней мере обладает относительно этих линий некоторым *стационарным* свойством. Такой принцип уместно назвать *принципом стационарного действия*, он наиболее удобен и многообещающ в качестве исходного принципа синтетического, или дедуктивного, процесса и при поиске математического метода.

Из этого известного принципа – принципа наименьшего, или стационарного, действия – я (уже давно) вывел другой тесно связанный с ним и эквивалентный ему принцип, заслуживающий по аналогии названия *принципа переменного действия*. Этот принцип совершенно естественно приводит к методу, который мы ищем: указанный принцип как бы является последней ступенью в восходящей лестнице индукции относительно линейных траекторий света, в то время как другой принцип может с успехом служить в нисходящей лестнице дедукции. Основная цель, которую я преследую в данной работе, состоит в том, чтобы привести несколько примеров и следствий из названных выше взаимосвязанных принципов.

Первый из этих двух принципов был открыт следующим образом. Элементарный принцип прямолинейности лучей показывает, что при наиболее простых и обычных обстоятельствах свет, распространяясь от точки к точке, использует прямой и, следовательно, кратчайший путь. Кроме того, в далекой древности было открыто (Лаплас приписывает это открытие Птолемею), что в случае плоского зеркала ломаная, образуемая падающим и отраженным лучами, короче, чем любая другая ломаная, имеющая те же начальную и конечную точку и точку излома, расположенную где угодно на зеркале.

Некоторые усматривали в этих фактах и результатах примеры простоты и экономии природы, а Ферма, в чьих работах о максимумах и минимумах континентальные математики склонны видеть зародыш дифференциального исчисления, упорно стремился проследить аналогичную экономию в более сложном случае – преломлении; Ферма считал, что в силу метафизической или космологической необходимости, возникающей вследствие простоты устройства Вселенной, свет всегда выбирает путь, проходимый за кратчайшее время. Для согласования этого метафизического утверждения с законом преломления, экспериментально открытым Снеллиусом, Ферма пришлось предположить, что длины двух отрезков, или *показатели преломления*, которые Снеллиус откладывал на продолжении падающего луча и на преломленном луче, наблюдая при этом совпадение их проекций на преломляющую плоскость, обратно пропорциональны скоростям света до и после преломления и, следовательно, что скорость света уменьшается при вхождении в те более плотные сферы, где по наблюдениям преломленный луч проходит ближе к перпендикуляру. Ферма считал, что время распространения света вдоль прямой, изломанной преломлением, представимо в виде двух произведений: длины отрезка, отложенного на продолжении падающего луча на показатель преломления первой среды и длины отрезка, отложенного на преломленном луче на показатель преломления второй среды. С помощью своего математического метода Ферма обнаружил, что в случае преломляющей плоскости эта сумма была бы меньше, если бы свет распространялся по любому пути, отличному от своей истинной траектории, из одной заданной точки в другую. Ферма сознавал также, что предположение о скорости, обратно пропорциональной показателю преломления, позволяет согласовать математическое открытие минимальности приведенной выше суммы с предложенным Ферма космологическим принципом наименьшего времени.

Декарт подверг взгляды Ферма на природу света резкой критике, но Лейбниц ревностно отстаивал их, а Гюйгенс с помощью рассуждений совершенно иного рода пришел к заключению о необходимости принятия выводов Ферма об обратной

пропорциональности скорости показателю преломления и о *минимальности времени* распространения света при переходе из одной данной точки в другую через обыкновенную преломляющую плоскость. Ньютон в своей теории испускания и притяжения пришел к заключению, что скорость света *прямо*, а не *обратно*, пропорциональна показателю преломления и что при входе в более плотную среду она *возрастает*, а не *убывает*. Такой вывод явно не согласовался с теоремой о кратчайшем времени при преломлении. В результате теорема о кратчайшем времени была отвергнута многими, в том числе и Мопертюи, выдвинувшим, однако, вместо нее новый космологический принцип – знаменитый *принцип наименьшего действия*, занявший после усовершенствований, внесенных в него Эйлером и Лагранжем, столь высокое положение в математической физике. Мопертюи назвал *действием* произведение расстояния и скорости, или, точнее, сумму всех таких произведений для различных элементов любого движения. Сочетая такое понимание действия с ньютоновским представлением о скорости света, возрастающей в более плотной среде и пропорциональной показателю преломления, с математической теоремой Ферма о минимальности суммы произведений путей и показателей преломления при обыкновенном преломлении на плоскости, Мопертюи пришел к заключению, что траектория, избираемая светом, всегда соответствует *наименьшему* возможному действию, но не всегда наименьшему возможному времени.

Свои идеи Мопертюи выдвинул, пытаясь примирить физические и метафизические принципы, которые были приведены в противоречие идеями Ньютона. Вскоре затем Мопертюи удалось распространить свой принцип наименьшего действия на явления соударения тел. Эйлер, бывший приверженцем Мопертюи и глубоко удовлетворенный новыми результатами, использовал все свои необычайные математические способности для того, чтобы доказать возможность распространения принципа наименьшего действия на все кривые, описываемые точками под действием центральных сил. Точнее, если любую такую кривую мы будем сравнивать со всеми остальными кривыми, которые проходят через те же начальные и конечные точки, бесконечно мало отличаются от исходной кривой по форме и положению и могут считаться описанными соседней точкой с тем же законом [изменения] скорости, и назовем *действием* интеграл от произведения скорости и элемента кривой, то разность между двумя соседними значениями такого действия бесконечно мала по сравнению с наибольшим линейным расстоянием (которое само бесконечно мало) между двумя соседними кривыми. Думаю, что теорему Эйлера удобнее формулировать как утверждение о *стационарном* действии. Лагранж обобщил эту теорему Эйлера на движение системы точек или тел, взаимодействующих между собой произвольным образом. Действие в этом случае равно сумме масс, умноженной на упоминавшиеся выше интегралы. Лаплас расширил приложения принципа [наименьшего действия] в оптике, применив его к преломлению в кристаллах, и указал аналогичный принцип в механике для всех мыслимых соотношений между силой и скоростью. Хотя принцип наименьшего действия занял, как видно из сказанного, подобающее место среди самых важных теорем физики, претензии его на некую космологическую необходимость на основе экономии во Вселенной в настоящее время всеми отвергаются.

Наряду с прочими причинами непринятие этих претензий связано просто с тем, что величина, подлежащая экономии, нередко расходуется расточительно. Например, в оптике, несмотря на то что сумма падающего и отраженного участков пути света при однократном обыкновенном отражении от плоскости всегда является кратчайшим из всех путей, при отражении от искривленного зеркала такая экономия нередко нарушается. Если поместить глаз внутрь отражающей полой сферы, но не в ее центре, то он увидит свое отражение в двух диаметрально противоположных точках, одна из которых будет ближайшей к нему, а другая, наоборот, наиболее удаленной от него. Это означает, что из двух различных путей света, соответствующих двум диаметрально противоположным точкам, один является кратчайшим, а другой – наиболее длинным из всех возможных путей, или в переводе на математический язык, что интеграл, называемый действием, вместо того, чтобы всегда достигать минимума, нередко достигает максимума, а часто не достигает ни того, ни другого, хотя неизменно обладает стационарным свойством. Мы уже бегло упоминали о нем и вскоре перейдем к его подробному объяснению.

Таким образом, мы не можем считать, что экономия такой величины заложена в божественном замысле Вселенной, хотя имеем все основания полагать, что простота того или иного возвышенного свойства заключена в этом замысле. И хотя мы можем сохранить название *действия* для обозначения стационарного интеграла, которому оно было дано (принимая такое название, мы можем не придавать ему того метафизического или (в оптике) физического смысла, который первоначально вкладывался в термин действие), нам отнюдь не следует сохранять за ним эпитет *наименьшее*. Наоборот, мы должны принять предложенные выше изменения и говорить в механике и оптике о *принципе стационарного действия* [5].

Для того чтобы проиллюстрировать этот великий принцип и другой общий принцип переменного действия, выведенный мной из первого, нам удобно начать с простого случая прямолинейных путей света, ибо прямолинейный путь, заведомо являющийся *кратчайшим* из всех, к тому же отличается от всех прочих путей неким *стационарным свойством* и *законом изменения*, которые, если включить их в общие принципы стационарного и переменного действия, могут служить подготовительными примерами.

Длину V любой линии, прямой или кривой, как известно, можно представить в виде интеграла

$$V = \int dV = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \qquad (1)$$

Если от этой линии перейти к другой, соседней с ней, с теми же концами и предположить, что точки новой линии связаны с точками исходной линии соотношениями между координатами точек вида

$$x_\varepsilon = x + \varepsilon\xi, \qquad y_\varepsilon = y + \varepsilon\eta, \qquad z_\varepsilon = z + \varepsilon\zeta, \qquad (2)$$

где ε – любая малая постоянная; ξ, η, ζ – произвольные функции от x, y, z, обращающиеся в нуль при граничных значениях этих переменных, т.е. в конечных точках заданной линии, и не обращающиеся в бесконечность ни в одной из промежуточных точек, ни при $\varepsilon = 0$, хотя в общем случае они могут зависеть от ε,

то длина V_ε новой линии представима в виде нового интеграла

$$V_\varepsilon=\int\sqrt{dx_\varepsilon^2+dy_\varepsilon^2+dz_\varepsilon^2}=\int\sqrt{(dx+\varepsilon d\xi)^2+(dy+\varepsilon d\eta)^2+(dz+\varepsilon d\zeta)^2}, \tag{3}$$

взятого при тех же пределах по x, y, z, как и исходный интеграл. Новую длину V_ε можно рассматривать как функцию от ε, которая стремится к старой длине V при $\varepsilon = 0$. Отношение $(V_\varepsilon - V)/\varepsilon$ стремится при $\varepsilon \to 0$, вообще говоря, к конечному пределу, представимому в виде

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(V_\varepsilon-V)=\int\frac{dxd\xi+dyd\eta+dzd\zeta}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}=-\int\left(\xi d\frac{dx}{dV}+\eta d\frac{dy}{dV}+\zeta d\frac{dz}{dV}\right). \tag{4}$$

Правая часть последнего равенства получена из правой части предыдущего равенства интегрированием по частям с учетом уже упоминавшегося условия обращения функций ξ, η, ζ в нуль на концах. В том случае, когда исходная линия такова, что предел (4) равен нулю независимо от вида функций ξ, η, ζ и, следовательно, разность длин $V_\varepsilon - V$ находится в исчезающе малом отношении к малой величине ε (определяющей отличие новой линии от исходной и находящейся в конечном отношении к наибольшему расстоянию между этими двумя линиями), мы можем сказать, что исходная линия обладает *стационарной длиной* V по сравнению со всеми линиями, проведенными между теми же концами и бесконечно мало отличающимися от нее по форме и положению.

Поскольку из правой части последнего равенства для предела (4), как нетрудно видеть, следует, что этот предел не может быть равен нулю независимо от вида функций ξ, η, ζ, если не выполняется условие

$$d\frac{dx}{dV}=0,\quad d\frac{dy}{dV}=0,\quad d\frac{dz}{dV}=0, \tag{5}$$

т.е. если отношения dx/dV, dy/dV, dz/dV непостоянны на всей линии. Если же условие (5) выполнено, то мы видим, что свойством *стационарной длины* (в пустом пространстве) обладают прямые и только прямые линии. Приведенное выше доказательство этого свойства прямой может оказаться полезным для тех, кто незнаком с вариационным исчислением.

Для того чтобы продемонстрировать на примерах это свойство стационарности прямой, рассмотрим прямую как общую хорду семейства дуг окружности и сравним ее длину с длинами дуг и длины дуг между собой. Пусть V – длина [отрезка] прямой, а $\varepsilon V/2$ – высота, или стрела, дуги окружности над хордой. Тогда $(\varepsilon + \varepsilon^{-1})V/2$ – диаметр окружности, ε – тригонометрический тангенс четверти дуги окружности единичного радиуса, стягивающий такое же число градусов, и мы получаем следующее выражение для длины V_ε дуги окружности над данной хордой V:

$$V_\varepsilon = V(\varepsilon + \varepsilon^{-1})\operatorname{arctg}\varepsilon. \tag{6}$$

Выражение (6) можно преобразовать к виду [6]

$$\frac{V_\varepsilon}{V}=1+4\left(\int_0^\varepsilon d\varepsilon\right)^2\varepsilon^{-3}\int_0^\varepsilon\frac{\varepsilon^2 d\varepsilon}{(1+\varepsilon^2)^2}, \tag{7}$$

из которого следует не только, что отношение дуги окружности к стягивающей ее хорде всегда больше единицы, но и, поскольку

$$\frac{dV_\varepsilon}{d\varepsilon} = 4V\int_0^\varepsilon \left(\varepsilon^{-3}\int_0^\varepsilon \frac{\varepsilon^2 d\varepsilon}{(1+\varepsilon^2)^2}\right)d\varepsilon, \tag{8}$$

что дуга V_ε с увеличением ее высоты возрастает со все большей скоростью. Производная $dV_\varepsilon/d\varepsilon$ положительна и возрастает, когда величина ε положительна и возрастает, и обращается в нуль вместе с ε, показывая тем самым, что из рассмотренного нами семейства дуг и хорды только хорда, т.е. отрезок прямой, обладает свойством стационарной длины.

Далее мы можем рассмотреть семейство полуэллипсов, построенных на данной общей оси V. Другая ось каждого эллипса сопряжена с данной и имеет длину εV. Длина дуги такого полуэллипса представима в виде

$$V_\varepsilon = V\int_0^\varepsilon (\cos^2\varphi + \varepsilon^2 \sin^2\varphi)^{1/2} d\varphi, \tag{9}$$

или после преобразования

$$\frac{V_\varepsilon}{V} = 1 + \left(\int_0^\varepsilon d\varepsilon\right)^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\varphi \cos^2\varphi d\varphi}{(\cos^2\varphi + \varepsilon^2 \sin^2\varphi)^{3/2}}. \tag{10}$$

Таким образом, отношение дуги эллипса V_ε к данному основанию, или оси, V не только всегда больше единицы и возрастает с увеличением высоты, но и возрастает со все большей скоростью, которая обращается в нуль, когда высота становится равной нулю. Следовательно, из семейства дуг полуэллипсов и оси только последняя обладает свойством стационарной длины.

Говоря более привычными словами, можно сказать, что если на основании, имеющем данную длину, например сто футов, построить семейство дуг окружностей или полуэллипсов, имеющих это основание своей хордой или осью, то длины дуг не только возрастают с высотой, но каждый дополнительный фут или дюйм высоты соответствует большему приращению длины дуги, чем предыдущий фут или дюйм. Чем более низкими, или плоскими, мы выберем две дуги, тем меньше будут отличаться их дуги по сравнению с различием между их высотами, пока разность длин не станет сколь угодно малой долей разности высот.

Например, если на предполагаемом основании длиной сто футов построить две дуги окружности, одну высотой пятьдесят футов, другую – пятьдесят один фут, из которых первая – полуокружность, а вторая – больше полуокружности, то разность длин этих двух дуг окажется чуть больше удвоенной разности их высот, т.е. более двух футов. Но если на том же основании построить одну дугу окружности высотой всего лишь один фут и другую высотой лишь два фута, то разность длин двух таких дуг будет равна одному дюйму, хотя разность их высот по-прежнему будет составлять один фут. Если же мы вообразим две дуги окружности, построенные на одном и том же основании, или общей хорде, длиной сто футов, с высотами, уменьшившимися соответственно до одного и двух дюймов, то разность их длин составит менее одной стопятидесятой дюйма.

Мы видим, что прямой луч, или прямолинейный путь, света из одной точки в другую обладает *стационарной длиной* по сравнению со всеми линиями, мало отличающимися от него по форме и положению, которые проведены между теми же концами. Но стоит лишь нам предположить, что концы соседней линии отличаются от концов луча, как мы получим, вообще говоря, не стационарную, а *переменную* длину. Чтобы исследовать закон изменения длины, представляющий собой простейший случай второго общего принципа, который мы вознамерились продемонстрировать на примерах, мы можем продолжить начатое нами сравнение длин V, V_ε двух соседних линий. Предположим, что на этот раз эти две линии имеют различные концы, или, иначе говоря, что функции ξ, η, ζ не обращаются в нуль в точках, соответствующих пределам интегрирования. Интегрирование по частям с учетом правой части последнего из равенств (4) для предела $(V_\varepsilon - V)/\varepsilon$ дает дополнительные члены

$$\xi\frac{dx}{dV}+\eta\frac{dy}{dV}+\zeta\frac{dz}{dV}+\xi'\frac{d'x'}{d'V}+\eta'\frac{d'y'}{d'V}+\zeta'\frac{d'z'}{d'V}.$$

Они соответствуют концам данной линии. Штрихованные величины означают начальные значения, а d' – бесконечно малые изменения, вызываемые движением начальной точки по начальному элементу линии, так что $d'V$ – начальный элемент, взятый со знаком минус:

$$d'V=-\sqrt{d'x'^2+d'y'^2+d'z'^2}. \tag{11}$$

Следовательно, когда интеграл в правой части последнего равенства (4) обращается в нуль при прямолинейной исходной линии и мы сравниваем эту линию с другой бесконечно близкой, *принцип переменной длины* выражается соотношением

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(V_\varepsilon - V)=\xi\frac{dx}{dV}+\eta\frac{dy}{dV}+\zeta\frac{dz}{dV}+\xi'\frac{d'x'}{d'V'}+\eta'\frac{d'y'}{d'V'}+\zeta'\frac{d'z'}{d'V'}=$$
$$=(\xi-\xi')\frac{dx}{dV}+(\eta-\eta')\frac{dy}{dV}+(\zeta-\zeta')\frac{dz}{dV}. \tag{12}$$

Оно представимо также в виде

$$\delta V=\frac{dx}{dV}(\delta x-\delta x')+\frac{dy}{dV}(\delta y-\delta y')+\frac{dz}{dV}(\delta z-\delta z') \tag{13}$$

и показывает, что длину $V+\delta V$ любой другой линии, бесконечно мало отличающейся от прямого луча по форме и положению, можно считать равной ее собственной проекции на этот луч.

Следует заметить, что в некоторых особых случаях расстояние между двумя линиями может быть сделано всюду меньше любой заранее заданной величины, хотя их длины отнюдь не будут стремиться к равенству.

Например, данную прямую можно разделить на большое число мелких отрезков, равных или неравных, и на каждом отрезке как на диаметре построить полуокружность. Волнистая линия, состоящая из малых, но многочисленных полуокружностей,

будет всюду мало отличаться от заданной прямой, причем отклонение ее может быть сделано сколь угодно малым, совпадение – сколь угодно близким к полному. Тем не менее длина волнистой линии отнюдь не будет стремиться к длине прямой, а будет находиться к последней в постоянном отношении, большем единицы, а именно в отношении π к 2. Ясно, что такие случаи, как этот, исключаются из приведенных выше рассуждений, исходящих из предположения о стремлении одной линии к другой как по форме, так и по убыванию линейного расстояния между ними.

Из *принципа переменной длины* для прямолинейного луча нетрудно вывести (впрочем, это ясно и так), что прямые лучи, расходящиеся из заданной точки x', y', z' или сходящиеся в заданной точке x, y, z, пересекаются ортогонально с семейством концентрических сфер, определяемых общим уравнением

$$V = \text{const.} \tag{14}$$

Верно и более общее утверждение: если множество прямых лучей перпендикулярно какой-то одной поверхности, то они перпендикулярны и семейству поверхностей, задаваемых уравнением (14), т.е. определяемых условием, что отрезок луча, заключенный между любыми двумя поверхностями семейства, имеет постоянную длину. Аналогичные следствия могут быть, вообще говоря, выведены и из принципа переменного действия.

Прежде чем переходить к свойствам других менее простых путей, быть может полезно остановиться несколько подробнее на случае прямолинейных путей и на следствиях из математического представления о луче света или зрения как о движении от точки к точке по математической прямой или по лучу.

Одно из очевидных следствий, проистекающих из такого представления, состоит в следующем: мы можем считать, что свет из любой точки A, принимаемой за начальную, распространяется, если не встречает на своем пути препятствий, в любую другую точку B, принимаемую за конечную, по одному вполне определенному лучу или линейному пути, форма которого (прямая) остается одинаковой, в каких бы точках ни были выбраны концы пути, между тем как его длина и положение зависят от местонахождения концов и варьируются беспредельно широко в соответствии с бесконечным множеством способов, которыми можно соединить две точки.

Поэтому если с помощью одного множества чисел мы запишем положения начальной и конечной точек, а с помощью другого – длину и положения луча, то числа второго множества, выражаясь математическим языком, являются *функциями* чисел первого множества, т.е. их можно считать вычислимыми по вполне определенным математическим правилам, коль скоро известны числа первого множества. Такое сведение одних чисел к другим – задача несложная, но имеющая первостепенное значение. Решить ее можно следующим образом.

Пусть каждая из двух точек A, B отнесена к общей системе трех взаимно перпендикулярных полуосей OX, OY, OZ, выходящих из произвольно выбранного начала координат O. Пусть x, y, z – положительные или отрицательные координаты конечной точки B, в которую свет *приходит*, а x', y', z' – координаты начальной точки A, из которой свет исходит; V – длина прямолинейного луча, или

[отрезка] прямой, AB; α, β, γ – положительные или отрицательные косинусы острых или тупых углов, образуемых направлением этого луча с положительными полуосями координат. Задача сводится к определению законов функциональной зависимости положительного числа V и трех положительных или отрицательных чисел α, β, γ от шести положительных или отрицательных чисел x, y, z, x', y', z'. Решение задачи дает следующие очевидные формулы:

$$V = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}\,, \tag{15}$$

$$\alpha = \frac{x-x'}{V}, \quad \beta = \frac{y-y'}{V}, \quad \gamma = \frac{z-z'}{V}. \tag{16}$$

Простым, но важным следствием из этого решения является то, что законы изменения трех направляющих косинусов α, β, γ, задаваемых соотношениями (16), связаны с законом изменения длины V, задаваемым соотношением (15). Эта связь может быть выражена следующим образом:

$$\alpha = \frac{\delta V}{\delta x}, \quad \beta = \frac{\delta V}{\delta y}, \quad \gamma = \frac{\delta V}{\delta z}, \tag{17}$$

где δ – символ взятия частной производной. Аналогичным образом, дифференцируя функцию V по координатам начальной точки, получаем

$$\alpha = -\frac{\delta V}{\delta x'}, \quad \beta = -\frac{\delta V}{\delta y'}, \quad \gamma = -\frac{\delta V}{\delta z'}. \tag{18}$$

Поскольку три направляющих косинуса α, β, γ связаны соотношением

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \tag{19}$$

мы заключаем, что функция V удовлетворяет системе следующих двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка и второй степени:

$$\left(\frac{\delta V}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta z}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{\delta V}{\delta x'}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta y'}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta z'}\right)^2 = 1. \tag{20}$$

Соотношения (17), (18) и уравнения (20) допускают далеко идущее обобщение, о котором пойдет речь в дальнейшем. Я считаю уместным отметить их здесь потому, что они содержат в себе зародыш моего общего метода исследования путей света и планет с помощью частных производных некоторой *характеристической функции*. Действительно, соотношения (17) и (18), содержащие частные производные первого порядка функции V, т.е. в нашем примере длины, могут рассматриваться как уравнения прямолинейного луча, приходящего в данную начальную или конечную точку. Аналогичные уравнения выведены мной для всех остальных путей света и даже для орбит планет, движущихся под действием взаимного притяжения.

Из соотношений (16), если их представить в виде

$$x - x' = \alpha V, \quad y - y' = \beta V, \quad z - z' = \gamma V, \tag{21}$$

после дифференцирования получаем

$$dx = \alpha dV, \quad dy = \beta dV, \quad dz = \gamma dV \tag{22}$$

и, следовательно,

$$dV^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{23}$$

Символ d здесь относится к бесконечно малому изменению конечной точки B при движении по лучу, продолженному за конец. Соотношения (22) можно рассматривать как дифференциальные уравнения луча. Из них следует, что

$$\alpha = \frac{dx}{dV}, \quad \beta = \frac{dy}{dV}, \quad \gamma = \frac{dz}{dV}. \tag{24}$$

Соотношения (24) можно представить в виде

$$\alpha = \frac{\delta dV}{\delta dx}, \quad \beta = \frac{\delta dV}{\delta dy}, \quad \gamma = \frac{\delta dV}{\delta dz}, \tag{25}$$

где δ по-прежнему означает взятие частной производной, а dV рассматривается как функция от dx, dy, dz. Сравнивая соотношения (25) и (17), мы получаем результат, обладающий (в чем нам вскоре предстоит убедиться) большой общностью и распространяющийся на все линейные пути света:

$$\frac{\delta V}{\delta x} = \frac{\delta dV}{\delta dx}, \quad \frac{\delta V}{\delta y} = \frac{\delta dV}{\delta dy}, \quad \frac{\delta V}{\delta z} = \frac{\delta dV}{\delta dz}. \tag{26}$$

Соотношения (26) не следует рассматривать как тождества, поскольку в их левых частях стоят частные производные одной функции (а именно V), а в их правых частях – частные производные другой функции (а именно dV).

Аналогичным образом, обозначив, как и прежде, символом d' бесконечно малые изменения, обусловленные смещением начальной точки A при движении по начальному элементу луча, мы приходим к дифференциальным уравнениям

$$d'x' = -\alpha d'V, \quad d'y' = -\beta d'V, \quad d'z' = -\gamma d'V, \tag{27}$$

где $d'V$, как и прежде, начальный элемент, взятый со знаком минус. Следовательно,

$$d'V^2 = d'x'^2 + d'y'^2 + d'z'^2, \tag{28}$$

и мы получаем

$$\alpha = -\frac{\delta d'V}{\delta d'x'}, \quad \beta = -\frac{\delta d'V}{\delta d'y'}, \quad \gamma = -\frac{\delta d'V}{\delta d'z'}, \tag{29}$$

или с учетом соотношений (18)

$$\frac{\delta V}{\delta x'} = \frac{\delta d'V}{\delta d'x'}, \quad \frac{\delta V}{\delta y'} = \frac{\delta d'V}{\delta d'y'}, \quad \frac{\delta V}{\delta z'} = \frac{\delta d'V}{\delta d'z'}. \tag{30}$$

К уравнениям (30) в равной мере относятся все те замечания, которые были сделаны нами относительно уравнений (26).

Общий принцип стационарного действия (в оптике) может быть сформулирован теперь следующим образом.

Для любого пути света, имеющего i точек излома за счет отражения или преломления и, следовательно, состоящего из $i + 1$ отдельных участков, оптическая величина, называемая *действием*, есть сумма $i + 1$ отдельных интегралов:

$$\textit{Действие} = \sum\int dV^{(r)} = V^{(1)} + V^{(2)} + \ldots + V^{(i)} + V^{(i+1)}, \tag{31}$$

каждый из которых определяется соотношением вида

$$V^{(r)} = \int dV^{(r)} = \int \text{v}^{(r)} \sqrt{dx^{(r)2} + dy^{(r)2} + dz^{(r)2}}. \tag{32}$$

Коэффициент $\text{v}^{(r)}$ перед элементом пути в r-й среде зависит в самом общем случае от оптических свойств этой среды, а также от положения, направления и цвета элемента по правилам, устанавливаемым опытным путем. Правила эти таковы, что если, например, r-я среда обыкновенная, то $\text{v}^{(r)}$ – показатель преломления и $dV^{(r)}$ – всегда однородная функция степени 1 дифференциалов $dx^{(r)}$, $dy^{(r)}$, $dz^{(r)}$, которая может также зависеть и от самих координат и в общем случае имеет вариацию вида

$$\delta dV^{(r)} = \sigma^{(r)}\delta dx^{(r)} + \tau^{(r)}\delta dy^{(r)} + \upsilon^{(r)}\delta dz^{(r)} + \\ +\left(\frac{\delta\,\text{v}^{(r)}}{\delta x^{(r)}}\delta x^{(r)} + \frac{\delta\,\text{v}^{(r)}}{\delta y^{(r)}}\delta y^{(r)} + \frac{\delta\,\text{v}^{(r)}}{\delta z^{(r)}}\delta z^{(r)}\right)ds^{(r)}, \tag{33}$$

если мы введем для краткости обозначения

$$\sigma^{(r)} = \frac{\delta dV^{(r)}}{\delta dx^{(r)}}, \quad \tau^{(r)} = \frac{\delta dV^{(r)}}{\delta dy^{(r)}}, \quad \upsilon^{(r)} = \frac{\delta dV^{(r)}}{\delta dz^{(r)}} \tag{34}$$

и

$$ds^{(r)} = \sqrt{dx^{(r)2} + dy^{(r)2} + dz^{(r)2}} \tag{35}$$

и воспользуемся однородностью $dV^{(r)}$, в силу которой

$$dV^{(r)} = \sigma^{(r)}dx^{(r)} + \tau^{(r)}dy^{(r)} + \upsilon^{(r)}dz^{(r)}. \tag{36}$$

Заменим теперь координаты $x^{(r)}$, $y^{(r)}$, $z^{(r)}$ пути света любыми мало отличающимися координатами

$$x_\varepsilon^{(r)} = x^{(r)} + \varepsilon\xi^{(r)}, \quad y_\varepsilon^{(r)} = y^{(r)} + \varepsilon\eta^{(r)}, \quad z_\varepsilon^{(r)} = z^{(r)} + \varepsilon\zeta^{(r)}, \tag{37}$$

где ε – любая малая постоянная; $\xi^{(r)}$, $\eta^{(r)}$, $\zeta^{(r)}$ – любые функции от ε и координат $x^{(r)}$, $y^{(r)}$, $z^{(r)}$, не обращающиеся в бесконечности при $\varepsilon = 0$ и в любой точке r-го участка пути, удовлетворяющие в точках пересечения двух смежных участков уравнению соответствующей отражающей или преломляющей поверхности и обращающиеся в нуль на концах всего пути. Произведя такую замену переменных, мы тем самым перейдем к соседней линии, имеющей общие концы с путем света и те же точки излома на тех же отражающих или преломляющих поверхностях. *Принцип стационарного действия* состоит в том, что если мы сравним интеграл или

сумму $V = \sum\int dV^{(r)}$ для пути света с соответствующим интегралом для соседней линии, то разность таких интегралов, или действий, будет находиться в бесконечно малом отношении к величине ε (которая, собственно, и отличает одну линию от другой), когда эта величина ε сама становится бесконечно малой. В итоге мы получаем предельное уравнение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(V_\varepsilon - V) = 0, \tag{38}$$

т.е.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum\frac{1}{\varepsilon}(V_\varepsilon^{(r)} - V^{(r)}) = \sum\int\lim_{\varepsilon\to 0}\sum\frac{1}{\varepsilon}(dV_\varepsilon^{(r)} - dV^{(r)}) = 0, \tag{39}$$

или окончательно

$$\sum\int\left(\frac{\delta dV_\varepsilon^{(r)}}{\delta\varepsilon}\right) = 0. \tag{40}$$

Уравнение (40) можно представить в развернутом виде, если воспользоваться соотношениями (33) и (37), из которых следует, что

$$\frac{\delta dV_\varepsilon^{(r)}}{\delta\varepsilon} = \sigma^{(r)}d\xi^{(r)} + \tau^{(r)}d\eta^{(r)} + \upsilon^{(r)}d\zeta^{(r)} + \\ +\left(\xi^{(r)}\frac{\delta \mathrm{v}^{(r)}}{\delta x^{(r)}} + \eta^{(r)}\frac{\delta \mathrm{v}^{(r)}}{\delta y^{(r)}} + \zeta^{(r)}\frac{\delta \mathrm{v}^{(r)}}{\delta z^{(r)}}\right)ds^{(r)}. \tag{41}$$

Интегрируя правую часть равенства (41) по частям и обозначая штрихами величины, относящиеся к r-му отрезку пути, получаем

$$\int\left(\frac{\delta dV_\varepsilon^{(r)}}{\delta\varepsilon}\right) = \sigma^{(r)}\xi^{(r)} - \sigma'^{(r)}\xi'^{(r)} + \tau^{(r)}\eta^{(r)} - \tau'^{(r)}\eta'^{(r)} + \upsilon^{(r)}\zeta^{(r)} - \upsilon'^{(r)}\zeta'^{(r)} + \\ +\int\xi^{(r)}\left(\frac{\delta \mathrm{v}^{(r)}}{\delta x^{(r)}}ds^{(r)} - d\sigma^{(r)}\right) + \int\eta^{(r)}\left(\frac{\delta \mathrm{v}^{(r)}}{\delta y^{(r)}}ds^{(r)} - d\tau^{(r)}\right) + \int\zeta^{(r)}\left(\frac{\delta \mathrm{v}^{(r)}}{\delta z^{(r)}}ds^{(r)} - d\upsilon^{(r)}\right). \tag{42}$$

Значения, принимаемые в остальном произвольными функциями ξ, η, ζ на концах пути и в точках сочленения [отдельных участков], удовлетворяют условиям

$$\xi'^{(1)} = 0, \quad \eta'^{(1)} = 0, \quad \zeta'^{(1)} = 0, \quad \xi^{(i+1)} = 0, \quad \eta^{(i+1)} = 0, \quad \zeta^{(i+1)} = 0 \tag{43}$$

и

$$\xi^{(r)} = \xi'^{(r+1)}, \quad \eta^{(r)} = \eta'^{(r+1)}, \quad \zeta^{(r)} = \zeta'^{(r+1)}. \tag{44}$$

Индекс r принимает значения от 1 до i. Наконец, при каждом значении r из этого интервала ξ, η, ζ удовлетворяют условию

$$n_x^{(r)}\xi^{(r)} + n_y^{(r)}\eta^{(r)} + n_z^{(r)}\zeta^{(r)} = 0, \tag{45}$$

где $n^{(r)}$ – любая из полунормалей к r-й отражающей или преломляющей поверхности в r-й точке падения [луча], а $n_x^{(r)}$, $n_y^{(r)}$, $n_z^{(r)}$ – косинусы углов, образуемых полунормалью $n^{(r)}$ с тремя положительными полуосями прямоугольной системы координат x, y, z. Принцип стационарного действия сводится, таким образом, к соотношениям

$$d\sigma^{(r)} = \frac{\delta v^{(r)}}{\delta x^{(r)}} ds^{(r)}, \quad d\tau^{(r)} = \frac{\delta v^{(r)}}{\delta y^{(r)}} ds^{(r)}, \quad d\upsilon^{(r)} = \frac{\delta v^{(r)}}{\delta z^{(r)}} ds^{(r)} \tag{46}$$

и

$$\sigma'^{(r+1)} - \sigma^{(r)} = \lambda^{(r)} n_x^{(r)}, \quad \tau'^{(r+1)} - \tau^{(r)} = \lambda^{(r)} n_y^{(r)}, \quad \upsilon'^{(r+1)} - \upsilon^{(r)} = \lambda^{(r)} n_z^{(r)}, \tag{47}$$

где $\lambda^{(r)}$ – неопределенный множитель. Используя условие (36), можно показать, что три уравнения (46) согласуются между собой и выражают постепенные изменения, если таковые существуют, луча между точками его излома, а в соотношениях (47) содержатся законы обыкновенного и необыкновенного отражения и преломления. Все эти следствия из известного принципа, названного мной принципом стационарного действия, полностью подтверждаются опытом при подходящем выборе вида функций, обозначенных $v^{(r)}$.

Например, в случае однородной среды, обыкновенной или необыкновенной, функции $v^{(r)}$ надлежит считать независимыми от недифференцированных координат $x^{(r)}$, $y^{(r)}$, $z^{(r)}$ и дифференциальные уравнения (46) r-го участка пути света вырождаются просто в

$$d\sigma^{(r)} = 0, \quad d\tau^{(r)} = 0, \quad d\upsilon^{(r)} = 0 \tag{48}$$

и при интегрировании дают

$$\sigma^{(r)} = 0, \quad \tau^{(r)} = 0, \quad \upsilon^{(r)} = 0, \tag{49}$$

выражая тем самым известный факт прямолинейного распространения света в однородной среде, поскольку в такой среде $\sigma^{(r)}$, $\tau^{(r)}$, $\upsilon^{(r)}$ зависят только от цвета и направления, но не от координат, и являются функциями от $\alpha^{(r)}$, $\beta^{(r)}$, $\gamma^{(r)}$, не содержащими $x^{(r)}$, $y^{(r)}$, $z^{(r)}$, если ввести для краткости обозначения

$$\alpha^{(r)} = \frac{dx^{(r)}}{ds^{(r)}}, \quad \beta^{(r)} = \frac{dy^{(r)}}{ds^{(r)}}, \quad \gamma^{(r)} = \frac{dz^{(r)}}{ds^{(r)}}, \tag{50}$$

из которых следует, что $\alpha^{(r)}$, $\beta^{(r)}$, $\gamma^{(r)}$ – косинусы угла наклона (в рассматриваемом случае постоянного) элемента r-го участка пути к положительным полуосям координат. Формулы (46) задают также известные дифференциальные уравнения луча в земной атмосфере.

Что касается законов отражения или преломления света, задаваемых соотношениями (47), то в общем случае их можно записать в виде

$$t_x^{(r)} \Delta\sigma^{(r)} + t_y^{(r)} \Delta\tau^{(r)} + t_z^{(r)} \Delta\upsilon^{(r)} = 0, \tag{51}$$

где Δ означает резкие изменения при отражении или преломлении, а $t_x^{(r)}$, $t_y^{(r)}$, $t_z^{(r)}$ – косинусы углов наклона к положительным полуосям координат произвольной линии

$t^{(r)}$, касающейся r-й отражающей или преломляющей поверхности в r-й точке падения, вследствие чего

$$t_x^{(r)} n_x^{(r)} + t_y^{(r)} n_y^{(r)} + t_z^{(r)} n_z^{(r)} = 0. \quad (52)$$

Например, для обыкновенной среды

$$\sigma^{(r)} = \nu^{(r)}\alpha^{(r)}, \quad \tau^{(r)} = \nu^{(r)}\beta^{(r)}, \quad \upsilon^{(r)} = \nu^{(r)}\gamma^{(r)}, \quad (53)$$

и соотношение (51) может быть представимо в виде

$$\Delta \nu^2 \nu_t^{(r)} = 0, \quad (54)$$

где

$$\nu_t^{(r)} = \alpha^{(r)} t_x^{(r)} + \beta^{(r)} t_y^{(r)} + \gamma^{(r)} t_z^{(r)}. \quad (55)$$

Таким образом, неизменяющаяся величина $\nu^{(r)}\nu_t^{(r)}$ есть проекция показателя [преломления] $\nu^{(r)}$ на произвольную касательную $t^{(r)}$ (каждый показатель измеряется от точки падения в направлении соответствующего луча, что согласуется с законом Снеллиуса). В общем случае [7], если положить

$$\nu^{(r)} = \sqrt{\sigma^{(r)2} + \tau^{(r)2} + \upsilon^{(r)2}} \quad (56)$$

и

$$\sigma^{(r)} = \nu^{(r)}\nu_x^{(r)}, \quad \tau^{(r)} = \nu^{(r)}\nu_y^{(l)}, \quad \upsilon^{(r)} = \nu^{(r)}\nu_z^{(r)}, \quad (57)$$

то $\sigma^{(r)}$, $\tau^{(l)}$, $\upsilon^{(r)}$ можно рассматривать как проекции на оси координат отрезка прямой, длина и направление которого зависят (по правилам, задаваемым предыдущими соотношениями) от вида функций $\nu^{(r)}$ или $dV^{(r)}$ и от направления и цвета элемента пути света до и после падения. Если положить

$$\nu_t^{(r)} = \nu_x^{(r)} t_x^{(r)} + \nu_y^{(r)} t_y^{(r)} + \nu_z^{(r)} t_z^{(r)}, \quad (58)$$

то уравнение (51) можно записать в виде

$$\Delta \nu^{(l)} \nu_t^{(l)} = 0, \quad (59)$$

означающем, что проекция отрезка прямой $\nu^{(r)}$ на произвольную касательную $t^{(r)}$ к отражающей или преломляющей поверхности в точке падения [луча] остается неизменной при отражении или преломлении, обыкновенном или необыкновенном. Это и есть удобный общий вид для всех известных законов резкого изменения направления пути света. Я обнаружил, что в волновой теории длина отрезка $\nu^{(r)}$ есть величина, обратная нормальной скорости распространения волны, в силу чего его проекции могут быть названы *компонентами нормальной медленности*. На языке волновой теории сформулированное выше свойство сохранения проекции отрезка $\nu^{(r)}$ эквивалентно утверждению о том, что компонента нормальной медленности в направлении любой линии, касающейся произвольной обыкновенной или необыкновенной отражающей или преломляющей поверхности в любой точке падения не изменяется при отражении или преломлении. Первоначально эта общая форму-

лировка законов оптического отражения и преломления была получена мной другим методом, а именно с помощью моего принципа характеристической функции. К обсуждению этого нового общего принципа мы и приступим.

Новый общий принцип – *принцип переменного действия* – следует из известного принципа, рассмотренного нами выше, если концы пути света считать незакрепленными, т.е. не предполагать, что шесть функций (43) обращаются на концах пути в нуль. Обозначая для краткости три функции в конце пути через ξ, η, ζ, а три функции в начале пути через ξ', η', ζ' и записывая аналогичным образом v, dV вместо величин $v^{(i+1)}$, $dV^{(i+1)}$ и т.д. в конце пути и v′, dV' и т.д. вместо величин $v^{(1)}$, $dV^{(1)}$ и т.д. в начале пути, приходим к новому соотношению

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(V_\varepsilon - V) = \sum\int\left(\frac{\delta dV_\varepsilon^{(r)}}{\delta\varepsilon}\right) = \sigma\xi - \sigma'\xi' + \tau\eta - \tau'\eta' + \upsilon\zeta - \upsilon'\zeta'. \quad (60)$$

Оно-то и составляет полученный мной общий результат. Соотношение (60) удобно также представить в виде

$$\delta V = \sigma\delta x - \sigma'\delta x' + \tau\delta y - \tau'\delta y' + \upsilon\delta z - \upsilon'\delta z', \quad (61)$$

где

$$\sigma = \frac{\delta\, dV}{\delta\, dx} = \frac{\delta\, \mathrm{v}\, ds}{\delta\, dx}, \quad \tau = \frac{\delta\, dV}{\delta\, dy} = \frac{\delta\, \mathrm{v}\, ds}{\delta\, dy}, \quad \upsilon = \frac{\delta\, dV}{\delta\, dz} = \frac{\delta\, \mathrm{v}\, ds}{\delta\, dz} \quad (62)$$

и

$$-\sigma' = -\left(\frac{\delta\, \mathrm{v}\, ds}{\delta\, dx}\right) = \frac{\delta\, d'V}{\delta\, d'x'}, \quad -\tau' = -\left(\frac{\delta\, \mathrm{v}\, ds}{\delta\, dx}\right) = \frac{\delta\, d'V}{\delta\, d'y'}, \quad -\upsilon' = -\left(\frac{\delta\, \mathrm{v}\, ds}{\delta\, dz}\right)' = \frac{\delta\, d'V}{\delta\, d'z'}. \quad (63)$$

Символы

$$\left(\frac{\delta\, \mathrm{v}\, ds}{\delta\, dx}\right)' \quad \text{и т.д.}$$

означают начальные величины, соответствующие величинам

$$\frac{\delta\, \mathrm{v} ds}{\delta\, dx} \quad \text{и т.д.,}$$

dV' по аналогичным соображениям означает бесконечно малое изменение всего интеграла V, возникающее при бесконечно малых изменениях $d'x'$, $d'y'$, $d'z'$ координат начала [пути], т.е. от движения начальной точки x', y', z' по начальному элементу пути света, в силу чего $d'V$ – начальный элемент интеграла, взятый со знаком минус:

$$d'V = -\mathrm{v}'\sqrt{d'x'^2 + d'y'^2 + d'z'^2}. \quad (64)$$

Если интеграл, или *действие*, V рассматривать как функцию от шести координат концов пути (я называю такую функцию *характеристической*) и продифференцировать ее по этим координатам, то, как нетрудно убедиться, ее частные про-

изводные первого порядка в общем случае задаются соотношениями (26) и (30), которые по доказанному выше выполняются в простом случае прямолинейных путей света. Мы видели, что в этом простом случае соотношения (26) и (30), эквивалентные формулам (17) и (18), определяют ход прямолинейного луча, проходящего в данном направлении через данную начальную или конечную точку. Аналогичным образом и в общем случае, если известны начальные координаты, направление и цвет пути света, а также оптические свойства начальной среды, мы можем определить или хотя бы ограничить (в общем случае) конечными пределами множество значений производных в начале пути $\frac{\delta d'V}{\delta d'x'}, \frac{\delta d'V}{\delta d'y'}, \frac{\delta d'V}{\delta d'z'}$, входящих в правые части уравнений (30). Следовательно, мы можем считать известными левые части этих же уравнений, а именно частные производные $\frac{\delta V}{\delta x'}, \frac{\delta V}{\delta y'}, \frac{\delta V}{\delta z'}$ характеристической функции V по известным начальным координатам. Если вид функции V известен, то мы получаем при этом между конечными координатами x, y, z следующие три уравнения пути или по крайней мере его конечного участка:

$$\frac{\delta V}{\delta x'} = \text{const}, \quad \frac{\delta V}{\delta y'} = \text{const}, \quad \frac{\delta V}{\delta z'} = \text{const}. \tag{65}$$

Эти три уравнения совместны и эквивалентны лишь двум различным соотношениям между переменными координатами x, y, z, поскольку характеристическая функция V должна, вообще говоря, удовлетворять уравнению в частных производных вида

$$\Omega'(\sigma', \tau', \upsilon', x', y', z') = 0, \tag{66}$$

где, как показано,

$$\sigma' = -\frac{\delta V}{\delta x'}, \quad \tau' = -\frac{\delta V}{\delta y'}, \quad \upsilon' = -\frac{\delta V}{\delta z'}. \tag{67}$$

Таким образом, уравнение (66) аналогично второму из уравнений (20): оно получено в результате исключения из общих уравнений (30) отношений дифференциалов $d'x'$, $d'y'$, $d'z'$. Уравнения (20) точно так же порождают в общем случае и уравнение в частных производных вида

$$\Omega\left(\frac{\delta V}{\delta x}, \frac{\delta V}{\delta y}, \frac{\delta V}{\delta z}, x, y, z\right) = 0, \tag{68}$$

аналогичное первому из уравнений (20), и три следующих совместных уравнений между переменными начальными координатами пути света, который должен проходить в данном направлении через данную конечную точку:

$$\frac{\delta V}{\delta x} = \text{const}, \quad \frac{\delta V}{\delta y} = \text{const}, \quad \frac{\delta V}{\delta z} = \text{const}. \tag{69}$$

Что касается интегрирования и применения этих дифференциальных уравнений в частных производных, то ограниченный объем настоящего сообщения вынуждает меня ограничиться ссылкой на уже упоминавшиеся тома "Transactions of the Royal

Irish Academy". Следует упомянуть, что, используя характеристическую функцию V во всех вопросах, связанных с отражением и преломлением, я исхожу из уравнения в конечных разностях, справедливого вследствие интегральной природы функции V:

$$\Delta V - \lambda u = 0, \tag{70}$$

где Δ, как и прежде, относится к резким изменениям на любой отражающей или преломляющей поверхности, задаваемой уравнением

$$u = 0, \tag{71}$$

а λ – неопределенный множитель, вводимый для того, чтобы координаты [точки] падения можно было считать независимыми переменными. Например, формулы (47) для резкого изменения направления получаются в виде

$$\Delta\frac{\delta V}{\delta x} = \lambda\frac{\delta u}{\delta x}, \quad \Delta\frac{\delta V}{\delta y} = \lambda\frac{\delta u}{\delta y}, \quad \Delta\frac{\delta V}{\delta z} = \lambda\frac{\delta u}{\delta z} \tag{72}$$

непосредственно из уравнения (70) при дифференцировании его по координатам [точки] падения как по независимым переменным уравнения (71) обыкновенной или необыкновенной отражающей или преломляющей поверхности. Полученные результаты относительно изменения направления луча света могут быть представлены и в ином виде – как

$$\Delta\frac{\delta V/\delta x}{\delta u/\delta x} = \Delta\frac{\delta V/\delta y}{\delta u/\delta y} = \Delta\frac{\delta V/\delta z}{\delta u/\delta z}, \tag{73}$$

а также в следующем виде:

$$\Delta\left(\frac{\delta u}{\delta x}\frac{\delta V}{\delta y} - \frac{\delta u}{\delta y}\frac{\delta V}{\delta x}\right) = 0, \quad \Delta\left(\frac{\delta u}{\delta y}\frac{\delta V}{\delta z} - \frac{\delta u}{\delta z}\frac{\delta V}{\delta y}\right) = 0, \quad \Delta\left(\frac{\delta u}{\delta z}\frac{\delta V}{\delta x} - \frac{\delta u}{\delta x}\frac{\delta V}{\delta z}\right) = 0. \tag{74}$$

Справедливо и более общее утверждение: все теоремы относительно изменений, происходящих при отражении или преломлении в свойствах оптической системы, могут быть выражены с помощью уравнения (70) в виде *законов сохранения* некоторых других свойств. Мысль об уже упоминавшемся замечательном законе сохранения компонент нормальной медленности распространения световой волны возникла у меня, когда я заметил, что моя функция V (в волновой теории) есть время распространения света от начальной точки до конечной и, следовательно, волны в той же теории могут быть описаны общим уравнением

$$V = \text{const}, \tag{75}$$

а компоненты нормальной медленности – частными производными первого порядка функции V. Свойства функции V, от которых зависит весь мой оптический метод, позволили мне давно дать простое доказательство уже упоминавшейся "соперничающей" теоремы Гюйгенса, утверждающей, что лучи любой обыкновенной однородной системы, первоначально испущенные светящейся точкой или перпендикулярные (в начальном и однородном состоянии) какой-то общей поверхности, претерпевающие, прежде чем достичь конечного состояния, любое число отражений или преломлений, как обыкновенных, так и необыкновенных, перпендикулярны

в конечном состоянии семейству (75), члены которого в теории Гюйгенса являются волнами. Действительно, по свойствам моей функции дифференциальное уравнение этого семейства имеет вид

$$\alpha\delta x + \beta\delta y + \gamma\delta z = 0, \tag{76}$$

где α, β, γ – косинусы, определяющие конечное направление луча. Свойства той же характеристической функции V в сочетании с физическими принципами Френеля позволили мне также (после того как я обратил внимание на неопределенность в двух частных случаях соотношений между частными производными $\delta dV/\delta dx$, $\delta dV/\delta dy$, $\delta dV/\delta dz$ и отношений дифференциалов dx, dy, dz) впервые теоретически предсказать два рода *конической рефракции*[2], о чем я доложил в октябре прошлого (1832 г.) Королевской ирландской академии и сообщил проф. Ллойду, успевшему за это время получить экспериментальное подтверждение моего предсказания. М-р Мак-Куллах сообщил мне позднее о том, что те же два неопределенных случая были установлены им несколькими годами раньше в теории Френеля из геометрических соображений и что он намеревался выяснить, к каким геометрическим и физическим следствиям это могло бы привести.

Метод характеристической функции позволил мне извлечь многие другие следствия, помимо тех, которые я опубликовал в "Transactions of the Royal Irish Academy". Не сомневаюсь, что в руках математиков этот метод со временем займет в дедуктивной оптике такое же место, какое занимает в алгебраической геометрии метод координат. Действительно, с помощью последнего из упомянутых методов Декарт свел изучение плоской кривой или искривленной поверхности к исследованию одной функции, выражающей закон [изменения] ординат, и тем самым получил возможность открывать общие формулы для касательных, кривизн и всех прочих геометрических свойств исследуемой кривой или поверхности и рассматривать их как охватываемые единым законом – основным алгебраическим соотношением. Я глубоко убежден, что настанет время, когда математики будут выводить все свойства оптических систем, исследуя одно основное соотношение, задающее для каждой конкретной системы зависимость от начальных и конечных координат, а также от цвета оптической функции V, частные производные которой связаны с начальным и конечным направлением луча принципом переменного действия или соотношениями (26) и (30).

В заключение этих заметок мне остается лишь кратко пояснить высказанные ранее несколько туманные намеки относительно моих взглядов на аналогичную функцию и метод в исследовании орбит планет и комет под действием взаимных возмущений. Мои взгляды сформировались много лет назад, и я опубликовал их в виде краткой заметки (или скорее аннотации) в "Transactions of the Royal Irish Academy" (т. XV, с. 80) [8]. Лишь недавно я вновь вернулся к этой идее и до сих пор не опубликовал сколько-нибудь подробного изложения данного предмета.

Начнем с простого примера. Рассмотрим комету, лишенную сколько-нибудь заметной массы и движущуюся по невозмущенной параболе вокруг Солнца. Последнее тело [т.е. Солнце] будем считать покоящимся в начале координат и имеющим

---

[2] См. "Третье дополнение...", п. 29.

притягивающую массу, равную едиинце. Пусть r – радиус-вектор кометы в момент времени t, принимаемый за конечный, r' – радиус-вектор той же кометы в любой другой момент времени t', принимаемый за начальный, и пусть r'' – хорда, соединяющая концы векторов r и r''. Введем для краткости величину

$$V = 2\sqrt{r + r' + r''} \mp 2\sqrt{r + r' - r''}\,. \tag{77}$$

Я обнаружил, что при этих предположениях конечные и начальные компоненты скорости кометы, параллельные трем полуосям прямоугольной системы координат, могут быть выражены через частные производные функции V:

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dt} = \frac{\delta V}{\delta x}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\delta V}{\delta y}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\delta V}{\delta z}, \\ \frac{dx'}{dt'} = -\frac{\delta V}{\delta x'}, \quad \frac{dy'}{dt'} = -\frac{\delta V}{\delta y'}, \quad \frac{dz'}{dt'} = -\frac{\delta V}{\delta z'}\end{gathered} \tag{78}$$

и что функция V удовлетворяет двум уравнениям в частных производных:

$$\left(\frac{\delta V}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta z}\right)^2 = \frac{2}{r}, \quad \left(\frac{\delta V}{\delta x'}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta y'}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta z'}\right)^2 = \frac{2}{r'}, \tag{79}$$

согласующим соотношения (78) с известным законом [измерения] скорости кометы. Я нашел также, что если функцию V выбрать в виде (77), то все остальные свойства движения планеты по параболической орбите согласуются с соотношениями (78) и содержатся в них. Например, из них (после простых преобразований) следует открытая Эйлером теорема о зависимости интервала времени $t - t'$ от хорды параболы r'' и от суммы $r + r'$ радиусов, проведенных в ее концы.

Мне удалось получить и более общий результат, в любой системе точек или тел, сила взаимного притяжения или отталкивания которых задается некоторой функцией расстояния (например, в Солнечной системе), начальные и конечные компоненты импульса могут быть, подобно компонентам скорости, выражены через частные производные первого порядка одной основной, или *характеристической*, функции V начальных и конечных координат. Таким образом, в общем случае при подходящем выборе функции V мы получаем уравнения

$$m_1 \frac{dx_1}{dt} = \frac{\delta V}{\delta x_1}, \quad m_1 \frac{dy_1}{dt} = \frac{\delta V}{\delta y_1}, \quad m_1 \frac{dz_1}{dt} = \frac{\delta V}{\delta z_1}, \quad m_2 \frac{dx_2}{dt} = \frac{\delta V}{\delta x_2} \quad \text{и т.д.} \tag{80}$$

и

$$m_1 \frac{dx_1'}{dt} = -\frac{\delta V}{\delta x_1'}, \quad m_1 \frac{dy_1'}{dt} = -\frac{\delta V}{\delta y_1'}, \quad m_1 \frac{dz_1'}{dt} = \frac{\delta V}{\delta z_1'}, \quad m_2 \frac{dx_2'}{dt} = -\frac{\delta V}{\delta x_2'} \quad \text{и т.д.} \tag{81}$$

где m_1, m_2,... – массы системы. Функция V должна удовлетворять двум дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка второй степени,

аналогичным уравнениям (79). Их можно записать в следующем виде:

$$\sum \frac{1}{m}\left\{\left(\frac{\delta V}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta y}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta z}\right)^2\right\}=2F,$$

$$\sum \frac{1}{m}\left\{\left(\frac{\delta V}{\delta x'}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta y'}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta z'}\right)^2\right\}=2F'. \qquad (82)$$

Функция F зависит от конечных, а функция F' – аналогичным образом от начальных координат, причем общий вид этих функций определяется законом притяжения или отталкивания. Для Солнечной системы

$$F=\sum \frac{m_i m_k}{\sqrt{(x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2+(z_i-z_k)^2}}+H,$$

$$F'=\sum \frac{m_i m_k}{\sqrt{(x_i'-x_k')^2+(y_i'-y_k')^2+(z_i'-z_k')^2}}+H, \qquad (83)$$

где H – некоторая постоянная. Уравнения (82) содержат в общем случае закон живых сил, в то время как другие известные общие законы [сохранения], или интегралы уравнений движения, выражаются другими общими и простыми свойствами той же характеристической функции V. Частных производных этой функции вместе с уравнениями (80) и (81) достаточно для определения всех обстоятельств движения системы. С этой точки зрения изучение самых сложных орбит в лунной, планетной или звездной астрономии сводится к исследованию свойств единственной функции V, аналогичной моей оптической функции и представляющей *действие* системы из одного положения в другое. Например, если бы мы знали вид этой единственной функции V для системы трех тел, притягивающих друг друга по закону [всемирного тяготения] Ньютона (такой системой может быть система Солнце–Земля–Луна или Солнце–Юпитер–Сатурн), то нам не пришлось бы производить интегрирование, чтобы найти орбиты каждого из тел и последовательные конфигурации трех тел. Восемь не зависящих от времени соотношений между девятью переменными координатами мы получили бы сразу, дифференцируя одну и ту же функцию V и используя девять начальных уравнений вида (81), которые в силу второго из уравнений (82) эквивалентны лишь восьми различным уравнениям, при условии, что положения и скорости заданы в некую начальную эпоху. Переменное время t достижения системой любого из последующих состояний можно найти, интегрируя любое из этих соотношений с учетом уравнений (80). Я считаю, что дальнейшая разработка этого подхода, в том числе его распространение на другие аналогичные вопросы, открывает в механике и астрономии совершенно новую область исследований. Добавлю лишь, что сама идея такого подхода была подсказана мне общим принципом переменного действия в динамике, который я вывел из известного динамического принципа наименьшего или стационарного действия с помощью соображений, аналогичных тем общим рассуждениям в оптике, которые я попытался проиллюстрировать.

О ПРИЛОЖЕНИИ К ДИНАМИКЕ ОБЩЕГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЕТОДА, РАНЕЕ ПРИЛОЖЕННОГО К ОПТИКЕ*

Метод основан на комбинации принципов вариационного исчисления с частными производными и может рассматриваться математиками как особая ветвь алгебры, которая может быть названа исчислением главной функции, потому что во всех важных приложениях алгебры к физике и в очень широком классе чисто математических вопросов этот метод сводит определение многих взаимно связанных функций к отысканию и изучению главного, или центрального, соотношения. В приложениях этого метода к динамике (прежде этот метод был применен к оптике) профессор Гамильтон открыл существование главной функции, которая, если ее форма полностью известна, дает по определении ее частных производных все первые и все конечные интегралы известных уравнений движения. Профессор Гамильтон придерживается мнения, что математическое объяснение всех явлений материи, отличных от жизненных явлений, будет окончательно найдено в зависимости от свойств системы отталкивающихся или притягивающихся точек. И он думает, что те, кто не одобряет его мнения во всей его общности, могут все же признать при современном состоянии науки свойства таких систем более важными, чем какая-либо другая область приложения математики к физике.

Он, таким образом, считает фундаментальной проблемой динамики "определить $3n$ прямоугольных координат или других характеристик положения свободной системы притягивающихся и отталкивающихся точек как функцию времени", включающих, следовательно, $6n$ начальных постоянных, которые зависят от начальных условий движения, и включающих, кроме того, n других констант, называемых массами, которые измеряют на стандартном расстоянии притягательные и отталкивательные действия (energies). Обозначая эти n масс через $m_1, m_2, ..., m_n$ и их $3n$ прямоугольных координат через $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$ и, следовательно, $3n$ компонент ускорения, или вторых производных этих координат по времени, через $x_1'', y_1'', z_1'', \ldots, x_n'', y_n'', z_n''$, он принимает лагранжеву постановку этой проблемы, именно формулу следующего вида:

$$\sum m(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z) = \delta U, \tag{1}$$

в которой U есть сумма произведений взятых попарно и перемноженных между собой масс на некоторую функцию их взаимного расстояния, так что первая производная этой функции выражает закон их взаимного притяжения, являясь отрицательной в случае отталкивания. Таким образом, для Солнечной системы каждое произведение двух масс умножается на обратное значение их расстояния, и результаты должны быть сложены для того, чтобы образовать функцию U.

М-р Гамильтон умножает далее эту формулу Лагранжа на элемент времени dt и интегрирует от 0 до t, полагая, что время и его элемент не подлежат варьиро-

---

* On the application to dynamics of a general mathematical method previously applied to optics // Brit. Assoc. Rep. 1834. P. 513–518 [H. 2. P. 212–216]. Перевод Н.В. Александровой.

ванию. Он обозначает начальные значения (или значения для времени $t = 0$) координат x, y, z и их первых производных x', y', z' через a, b, c и a', b', c' и, таким образом, получает из формулы Лагранжа (1) другую важную формулу:

$$\sum m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z - a'\delta a - b'\delta b - c'\delta c) = \delta S, \tag{2}$$

S – определенный интеграл:

$$S = \int_0^t \left\{ U + \sum \frac{m}{2}\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right) \right\} dt. \tag{3}$$

Если известные уравнения движения в форме

$$m_i x_i'' = \frac{\delta U}{\delta x_i}, \quad m_i y_i'' = \frac{\delta U}{\delta y_i}, \quad m_i z_i'' = \frac{\delta U}{\delta z_i} \tag{4}$$

полностью интегрируемы, то они дадут $3n$ координат x, y, z и, следовательно, S как функцию времени t, масс $m_1, \ldots, m_n$ и $6n$ начальных констант a, b, c, a', b', c', так что по исключении $3n$ начальных компонент скорости a', b', c', мы в общем получим отношение между $7n + 2$ величинами $S, t, m, x, y, z, a, b, c$, которые дадут S как функцию времени, масс и конечных и начальных координат. Мы еще не знаем формы этой последней функции, но мы знаем ее вариацию (2), взятую в отношении $6n$ координат; вследствие независимости этих $6n$ вариаций мы можем разделить выражение (2) на две группы, содержащие каждая $3n$ уравнений, а именно:

$$\frac{\delta S}{\delta x_i} = m_i x_i', \quad \frac{\delta S}{\delta y_i} = m_i y_i', \quad \frac{\delta S}{\delta z_i} = m_i z_i' \tag{5}$$

и

$$\frac{\delta S}{\delta a_i} = -m_i a'_i, \quad \frac{\delta S}{\delta b_i} = -m_i b'_i, \quad \frac{\delta S}{\delta c_i} = -m_i c'_i. \tag{6}$$

Члены, стоящие в этих равенствах слева, суть частные производные функции S, которую м-р Гамильтон назвал *главной функцией* движения притягивающихся или отталкивающихся систем. Он думает, что если математики изучат эту главную функцию S и эти группы уравнений (5) и (6), они должны будут оценить их значение. Из группы (5) определяют $3n$ промежуточных интегралов известных уравнений движения (4) в форме $3n$ отношений между временем t, массами m, варьированными координатами x, y, z, варьированными составляющими скорости x', y', z' и $3n$ начальными константами a, b, c, в то время как группа (6) определяет $3n$ конечных интегралов тех же известных дифференциальных уравнений как $3n$ отношений с $6n$ начальными и произвольными константами a, b, c, a', b', c' между временем, массами и $3n$ варьированными координатами. Эти $3n$ промежуточных и $3n$ конечных интегралов разрешают проблему динамики. Математики же находят семь промежуточных и ни одного конечного интеграла.

Решение профессором Гамильтоном этой замечательной проблемы содержит,

действительно, одну неизвестную функцию, именно *главную функцию* S, к изучению и отысканию которой сводится математическая динамика. Эта функция не может быть смешана с прекрасно известной функцией Лагранжа[1] для простого и удобного выражения известных уравнений движения.

Функция Лагранжа ставит, функция Гамильтона решает проблему. Одна годится для того, чтобы образовать *дифференциальные* уравнения движения, другая может давать их *интегралы*. Разрабатывая продолжение этого нового пути и открывая формулу этой новой функции, м-р Гамильтон замечает, что она должна удовлетворять следующему уравнению в частных производных первого порядка и второй степени (время теперь варьируется):

$$\frac{\delta S}{\delta t}+\sum\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\delta S}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta S}{\delta y}\right)^2+\left(\frac{\delta S}{\delta z}\right)^2\right\}=U, \tag{7}$$

которое может быть строго преобразовано следующим образом при помощи уравнения (5):

$$S=S_1+\int_0^t\left\{U-\frac{\delta S_1}{\delta t}+\sum\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\delta S_1}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta S_1}{\delta y}\right)^2+\left(\frac{\delta S_1}{\delta z}\right)^2\right]\right\}dt+$$

$$+\int_0^t\sum\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\delta S}{\delta x}-\frac{\delta S_1}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta S}{\delta y}-\frac{\delta S_1}{\delta y}\right)^2+\left(\frac{\delta S}{\delta z}-\frac{\delta S_1}{\delta z}\right)^2\right\}dt, \tag{8}$$

S_1 – произвольная функция тех же величин $t, m, x, y, z, a, b, c,$ предполагаемая только (подобно S) исчезающей в момент времени $t = 0$. Если эта произвольная функция S_1 выбрана так, что она дает приближенное значение искомой функции S (и всегда легко выбрать ее таким образом), то оба определенных интеграла в формуле (8) малы, но второй в общем меньше, чем первый; им можно пренебречь, переходя ко второму приближению, и в вычислении первого определенного интеграла можно употреблять следующую приближенную форму уравнений (6):

$$\frac{\delta S}{\delta a}=-ma',\quad \frac{\delta S}{\delta b}=-mb',\quad \frac{\delta S}{\delta c}=-mc'. \tag{9}$$

Таким образом, первое приближение может быть успешно и неограниченно исправлено. И для практического улучшения метода ничего более, кажется, не требуется, кроме того, чтобы сделать этот процесс исправления более легким и скорым в его приложениях.

Профессор Гамильтон написал две статьи об этом новом методе динамики, и одна из них уже печатается во второй части "Philosophical Transactions" за 1834 г. в Лондоне. Метод не является в первом представлении таким простым по форме. Он употребляет сначала *характеристическую функцию* V, более тесно связанную с той оптической функцией, которую он открыл и обозначил той же буквой в своей

[1] Здесь имеется в виду уравнение (1).

"Теории систем лучей". И в динамике, и в оптике эта функция есть величина, называемая *действием* и рассматриваемая как зависящая (главным образом) от конечных и начальных координат. Но если эта *функция действия* применяется в динамике, она включает вспомогательную величину H, а именно известную постоянную часть в выражении половины живой силы системы; и много беспокойных исключений требуется впоследствии при применении этой функции, которые устраняются новой формой метода.

М-р Гамильтон думает, однако, отметить кратко новые свойства этой постоянной H, которые подсказывают новый способ выражения дифференциалов и интегралов уравнений движения притягивающихся или отталкивающихся систем. Часто полезно выразить $3n$ координат $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$ как функции $3n$ других отметок положения, которые могут быть обозначены так: $\eta_1, \ldots, \eta_{3n}$, и если $3n$ новых переменных $\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_{3n}$ будут введены и определены как

$$\overline{\omega}_i = \sum m\left(x'\frac{\delta x}{\delta\eta_i} + y'\frac{\delta y}{\delta\eta_i} + z'\frac{\delta z}{\delta\eta_i}\right); \tag{10}$$

то в общем возможно обратно выразить $6n$ переменных x, y, z, x', y', z' как функции $6n$ переменных η и $\overline{\omega}$, т.е. возможно, следовательно, выразить H как функцию

$$H = \sum\frac{m}{2}\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right) - U \tag{11}$$

в форме

$$H = F\left(\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_{3n}, \eta_1, \ldots, \eta_{3n}\right) - U\left(\eta_i, \ldots, \eta_{3n}\right), \tag{12}$$

в которой F есть рациональная, целая и однородная функция второй степени относительно переменных $\overline{\omega}$; теперь м-р Гамильтон находит, что если величина H выражена таким образом, как функция $6n$ новых переменных $\eta_i, \overline{\omega}_i$, то ее вариация может быть определена в такой форме:

$$\delta H = \sum\left(\eta'\delta\overline{\omega} - \overline{\omega}'\delta\eta\right), \tag{13}$$

где $\eta', \overline{\omega}'$ обозначают первые производные новых переменных $\eta, \overline{\omega}$, взятые по времени. $3n$ дифференциальных уравнений движения второго порядка (4), связывающие прямоугольные координаты и время для какой-либо притягивающейся или отталкивающейся системы, могут быть, следовательно, общим образом преобразованы в двойное число уравнений первого порядка между $6n$ переменными и временем в форме

$$\eta'_i = \frac{\delta H}{\delta\overline{\omega}_i}, \quad \overline{\omega}'_i = -\frac{\delta H}{\delta\eta_i}. \tag{14}$$

Проинтегрировать эту систему уравнений – значит выделить из нее $6n$ отношений между временем t и $6n$ переменными $\eta_i, \overline{\omega}_i$ и $6n$ их начальными значениями, которые могут быть обозначены как e_i, p_i. М-р Гамильтон решает проблему в этой

более общей форме при помощи той же самой *главной функции* S, что и выше, рассматривая ее, однако, как зависящую теперь от новых отметок η и e конечных и начальных положений различных точек системы. Полагая в этом новом обозначении

$$S=\int_0^t \sum \left(\overline{\omega}\frac{\delta H}{\delta \overline{\omega}}-H\right)dt \tag{15}$$

и рассматривая время как заданное, он находит формулу вариации

$$\delta S=\sum(\overline{\omega}\delta\eta-p\delta e) \tag{16}$$

и, следовательно, $6n$ отдельных уравнений

$$\overline{\omega}_i=\frac{\delta S}{\delta\eta_i},\quad p_i=-\frac{\delta S}{\delta e_i}, \tag{17}$$

которые суть формы искомых отношений. Профессор Гамильтон думает, что эти две формы для вариаций (13) и (16), а именно

$$\delta H=\sum(\eta'\delta\overline{\omega}-\overline{\omega}'\delta\eta), \tag{A}$$

$$\delta S=\sum(\overline{\omega}\delta\eta-p\delta e), \tag{B}$$

заслуживают внимания, как выражающие в сжатой и простой форме одна – дифференциалы, а другая – интегралы уравнений движения притягивающейся или отталкивающейся системы. Они могут быть распространены и на другие проблемы динамики, кроме этой главной задачи. Выражение H всегда может быть легко найдено, и функция S может быть определена с неограниченной точностью методом последовательных приближений в том смысле, как это разъяснено выше.

Эти свойства его *главной функции* рассматриваются более полно в его труде "Second essay on a general method in dynamics", в котором он вводит различные формы некоторой функции элементов (function of elements), связанные с главной функцией и друг с другом, применяет их к вопросу о возмущениях и показывает, что для возмущений систем из трех или большего числа масс с некоторым законом притяжения или отталкивания и с одной преобладающей массой дифференциальные уравнения варьированных элементов всех малых масс могут быть выражены вместе так же просто, как и обычным путем, коэффициентами одной функции возмущения, которой является возмущенная часть полного выражения H, и могут быть строго интегрированы при помощи следствий его общего метода.

ДИНАМИКА

ОБ ОБЩЕМ МЕТОДЕ В ДИНАМИКЕ, ПОСРЕДСТВОМ КОТОРОГО ИЗУЧЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ ВСЕХ СВОБОДНЫХ СИСТЕМ ПРИТЯГИВАЮЩИХСЯ ИЛИ ОТТАЛКИВАЮЩИХСЯ ТОЧЕК СВОДИТСЯ К ОТЫСКАНИЮ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЮ ОДНОГО ЦЕНТРАЛЬНОГО СООТНОШЕНИЯ, ИЛИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ* [1]

Вводные замечания

Теоретическое развитие законов движения тел [2] — проблема настолько интересная и значительная, что она привлекала к себе внимание всех самых выдающихся математиков, начиная с создания Галилеем динамики как математической науки и в особенности со времени того изумительного развития, которое было дано этой науке Ньютоном! Из числа последователей этих блестящих ученых Лагранж, пожалуй, больше, чем какой-либо другой аналитик, сделал для того, чтобы расширить и придать стройность подобным дедуктивным исследованиям, доказав, что самые разнообразные следствия, относящиеся к движению системы тел, могут быть выведены из одной основной формулы. При этом красота метода настолько соответствует достоинству результата, что эта великая работа превращается в своего рода математическую поэму. Однако наука о действии силы в пространстве и времени претерпела еще один переворот [3] и сделалась более "динамичной", полностью отказавшись от представлений о твердых телах, о сцеплении и о материальных связях или о представленных геометрических условиях, которые были так удачно использованы Лагранжем в качестве основы его рассуждений, и все больше склоняясь к тому, чтобы свести все связи и действия тел к притяжению и отталкиванию точек; в то время как эта наука развивается таким образом в направлении усовершенствования физических воззрений, она может развиваться и в другом направлении путем разработки математических методов. Поэтому предложенный в данной работе метод для дедуктивного изучения движений притягивающихся и отталкивающихся систем, быть может, будет встречен со снисходительностью как попытка помочь в дальнейшем развитии исследования, ставящего перед собой столь высокие цели.

---

* On a general method in dynamics, by which the study of the motions of all free systems of attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central relation or characteristic function // Philos. Trans. Roy. Soc. 1834. Pt. 2. P. 247–308. [H.2.P. 103–161]. Перевод Н.В. Александровой и Л.С. Полака.

В обычно применяемых методах определение движения свободной точки в пространстве под влиянием ускоряющих сил состоит в интегрировании трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, а определение движения системы свободных точек, взаимно притягивающихся или отталкивающихся, – в интегрировании системы подобных уравнений, число которых втрое больше числа притягивающихся или отталкивающихся точек, если только мы предварительно не уменьшим это последнее число на единицу, рассматривая только относительные движения. Таким образом, в Солнечной системе, если мы рассматриваем только взаимные притяжения Солнца и десяти [4] известных планет, определение движений последних относительно первого при помощи обычных методов сводится к интегрированию системы тридцати обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, связывающих координаты и время, или же, при помощи преобразования Лагранжа, – к интегрированию системы шестидесяти обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, связывающих время и эллиптические элементы.

При помощи этих интегрирований тридцать переменных координат или шестьдесят переменных элементов могут быть найдены как функции времени. В методе, предложенном в данной работе, задача сводится к отысканию и дифференцированию единственной функции, которая удовлетворяет двум уравнениям в частных производных первого порядка и второй степени; подобным же образом всякая другая динамическая задача, относящаяся к движениям (как бы многочисленны они ни были) любой системы притягивающихся или отталкивающихся точек (даже если мы предполагаем, что эти точки ограничены какими-либо условиями связи, совместными с законом живой силы), сводится к изучению одной центральной функции, форма которой определяет и характеризует свойства движущейся системы и которая определяется двумя дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка в сочетании с некоторыми простыми соображениями.

Таким образом, по крайней мере интегрирование многих уравнений одного класса заменяется интегрированием двух уравнений другого класса, и даже если считать, что этим не достигается никакого практического облегчения, тем не менее можно получить некое интеллектуальное наслаждение от сведения, пожалуй, самого сложного из иследований, относящихся к силам и движениям тела, к изучению одной характеристической[1] функции; к раскрытию одного центрального отношения.

Данная работа не претендует на то, чтобы полностью исчерпать этот обширный предмет, так как это представляет собой задачу, которая может потребовать многих лет трудов многих ученых, но имеет своей целью развить самую мысль и наметить путь для других. Поэтому, хотя этот метод может быть использован в самых разнообразных динамических исследованиях, в настоящей работе он применяется только к орбитам и возмущениям системы с любыми законами притя-

[1] Лагранж, а после него Лаплас и другие применяли единственную функцию для выражения различных сил системы, получая, таким образом, изящным способом дифференциальные уравнения ее движения. Эта концепция придает огромную простоту постановке задачи динамики, но решение этой задачи или выражение самих движений и их интегралов зависит от весьма отличной и бывшей до сих пор неизвестной функции, показать которую представляет собой задачу настоящей работы.

жения или отталкивания и с одной преобладающей массой или центром преобладающей энергии и притом в данном исследовании лишь настолько, насколько это представляется нужным, чтобы сделать понятным самый принцип. Следует отметить, что этот динамический принцип представляет собой лишь другую форму той же идеи, которая уже была применена в оптике в "Теории систем лучей", и что намерение приложить ее к движениям системы тел было выражено при опубликовании этой теории. При этом не только сама идея, но также и способ вычисления, примененный к наукам оптики и динамики, по-видимому, не ограничивается этими двумя науками, но может найти и другие применения; при этом характерное для него специфическое сочетание принципов вариаций с принципом частных производных для определения и использования важного класса интегралов может при дальнейшем развитии этого метода будущими трудами математиков вырасти в отдельную отрасль анализа [5].

Уильям Р. Гамильтон

Обсерватория, Дублин
Март 1834

Интегрирование уравнений движения системы; характеристическая функция такого движения и закон переменного действия

1. Известные дифференциальные уравнения движения системы свободных точек, отталкивающих или притягивающих друг друга согласно любым функциям их расстояний и не возмущенных какой-либо внешней силой, могут быть представлены следующей формулой:

$$\sum m(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z) = \delta U. \qquad (1)$$

В этой формуле знак суммирования $\sum$ распространяется на все точки системы; m – для любой такой точки константа, называемая ее массой; x'', y'', z'' – компоненты ускорения или вторые производные прямоугольных координат x, y, z, взятые по времени; $\delta x, \delta y, \delta z$ – любые произвольные бесконечно малые смещения, которые может получить точка в тех же трех взаимно перпендикулярных направлениях; δU представляет собой бесконечно малую, соответствующую этим смещениям вариацию функции U масс и взаимных расстояний отдельных точек системы, форма которой зависит от законов их взаимодействия согласно уравнению

$$U = \sum m m_{,} f(r), \qquad (2)$$

причем r представляет собой расстояние между любыми двумя точками $m, m_{,}$, а функция $f(r)$ такова, что ее производная или дифференциал $f(r)$ выражает закон их отталкивания, являясь отрицательной в случае притяжения. Функция, обозначенная здесь через U, может быть названа силовой функцией системы; она в высшей степени полезна в теоретической механике, в которую она была введена Лагранжем [6], и дает следующие изящные формы дифференциальных уравнений дви-

жения, входящих в формулу (1):

$$m_1 x_1'' = \frac{\delta U}{\delta x_1}, \quad m_2 x_2'' = \frac{\delta U}{\delta x_2}, \; \ldots, \; m_n x_n'' = \frac{\delta U}{\delta x_n},$$

$$m_1 y_1'' = \frac{\delta U}{\delta y_1}, \quad m_2 y_2'' = \frac{\delta U}{\delta y_2}, \; \ldots, \; m_n y_n'' = \frac{\delta U}{\delta y_n},$$

$$m_1 z_1'' = \frac{\delta U}{\delta z_1}, \quad m_2 z_2'' = \frac{\delta U}{\delta z_2}, \; \ldots, \; m_n z_n'' = \frac{\delta U}{\delta z_n}, \tag{3}$$

причем вторые члены этих уравнений представляют собой частные производные первого порядка функции U [7]. Однако, несмотря на изящество и простоту этого хорошо известного способа изложения главной задачи динамики, трудность решения этой задачи, или хотя бы выражения ее решения, до сих пор казалась непреодолимой, так что до сих пор для этих общих уравнений системы, состоящей из n точек, было найдено только семь промежуточных интегралов или интегралов первого порядка с таким же числом произвольных постоянных вместо $3n$ промежуточных и $3n$ конечных интегралов, включающих $6n$ постоянных.

Кроме того, не найден такой интеграл относительного движения, который не нужно было бы проинтегрировать вновь. Не найдено также общее решение, определяющее (как это следует требовать от общего решения) $3n$ отношений между n массами $m_1,\ldots, m_n,$ $3n$ переменными координатами $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$, временем t и $6n$ начальными данными задачи, а именно начальными координатами $a_1, b_1, c_1, \ldots, a_n, b_n, c_n$ и их начальными скоростями $a_1', b_1', c_1', \ldots, a_n', b_n', c_n'$; величины, названные здесь начальными, – это те, которые соответствуют произвольному началу времени. Однако (как будет видно далее) эти давно искомые зависимости можно выразить при помощи частных производных новой центральной или главной функции, к отысканию и использованию которой сводится трудность математической динамики.

2. Если мы для краткости напишем

$$T = \frac{1}{2}\sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2), \tag{4}$$

причем $2T$ означает, как в "Mécanique analytique", полную живую силу [8] системы (x', y', z' по аналогии с нашим предыдущим обозначением представляют собой прямоугольные компоненты скорости точки m или первые производные ее координат по времени); удобное и хорошо известное сочетание дифференциальных уравнений движения, получаемое путем замены вариаций координат их дифференциалами в формуле (1), может быть выражено следующим образом:

$$dT = dU, \tag{5}$$

что дает по интегрировании знаменитый закон живой силы:

$$T = U + H. \tag{6}$$

В этом выражении, которое представляет собой один из семи упомянутых выше известных интегралов, величина H не зависит от времени и не меняется при переходе точек системы от одной группы положений к другой. Например, исходное уравнение, соответствующее начальному моменту времени, может быть написано следующим образом:

$$T_0 = U_0 + H. \quad (7)$$

Однако величина H может получить любое произвольное приращение, когда мы мысленно переходим от системы, движущейся по одному пути, к той же системе, движущейся по другому пути, при тех же динамических соотношениях между ускорениями и положениями ее точек, но при различных начальных данных; полученное таким образом приращение H, очевидно, связано с аналогичными приращениями функций T и U при помощи отношения

$$\Delta T = \Delta U + \Delta H, \quad (8)$$

а это в случае бесконечно малых изменений удобно записать следующим образом:

$$\delta T = \delta U + \delta H. \quad (9)$$

Это последнее отношение, будучи умножено на dt и проинтегрировано, приводит к важному результату, ибо с помощью (4) и (1) оно принимает следующий вид:

$$\int \sum m(dx\delta x' + dy\delta y' + dz\delta z') = \int \sum m(dx'\delta x + dy'\delta y + dz'\delta z) + \int \delta H dt, \quad (10)$$

что дает, согласно принципам вариационного исчисления,

$$\delta V = \sum m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z) - \sum m(a'\delta a + b'\delta b + c'\delta c) + t\delta H, \quad (2.1)$$

если мы обозначим через V интеграл:

$$V = \int \sum m(x'dx + y'dy + z'dz) = \int_0^t 2T dt, \quad (2.2)$$

а именно накопленную живую силу, часто называемую действием системы от ее начального до конечного положения.

Если же мы будем рассматривать (и, как легко заметить, мы имеем на это право) действие V как функцию начальных и конечных координат и величины H, то мы получим посредством (2.1) следующие группы уравнений: во-первых,

$$\frac{\delta V}{\delta x_1} = m_1 x'_1, \quad \frac{\delta V}{\delta x_2} = m_2 x'_2, \ldots, \quad \frac{\delta V}{\delta x_n} = m_n x'_n,$$

$$\frac{\delta V}{\delta y_1} = m_1 y'_1, \quad \frac{\delta V}{\delta y_2} = m_2 y'_2, \ldots, \quad \frac{\delta V}{\delta y_n} = m_n y'_n,$$

$$\frac{\delta V}{\delta z_1} = m_1 z'_1, \quad \frac{\delta V}{\delta z_2} = m_2 z'_2, \ldots, \quad \frac{\delta V}{\delta z_n} = m_n z'_n, \quad (2.3)$$

во-вторых,

$$\frac{\delta V}{\delta a_1} = -m_1 a_1', \quad \frac{\delta V}{\delta a_2} = -m_2 a_2', \ldots, \quad \frac{\delta V}{\delta a_n} = -m_n a_n',$$

$$\frac{\delta V}{\delta b_1} = -m_1 b_1', \quad \frac{\delta V}{\delta b_2} = -m_2 b_2', \ldots, \quad \frac{\delta V}{\delta b_n} = -m_n b_n',$$

$$\frac{\delta V}{\delta c_1} = -m_1 c_1', \quad \frac{\delta V}{\delta c_2} = -m_2 c_2', \ldots, \quad \frac{\delta V}{\delta c_n} = -m_n c_n' \qquad (2.4)$$

и, наконец, уравнение

$$\delta V/\delta H = t. \qquad (2.5)$$

Таким образом, если бы эта функция V была известна, оставалось бы только исключить H из $3n + 1$ уравнений (2.3) и (2.5) для того, чтобы получить все $3n$ промежуточных интегралов, или из (2.4) и (2.5) для того, чтобы получить все $3n$ конечных интегралов дифференциальных уравнений движения, т.е. получить искомые $3n$ зависимости между $3n$ переменными координатами и временем, включающие также массы и упомянутые выше $6n$ начальных данных. Открытие этих зависимостей (как мы уже говорили) представляло бы собой общее решение общей задачи динамики. Таким образом, мы по крайней мере свели общую задачу к отысканию и дифференцированию единственной функции V, которую мы будем называть *характеристической функцией* движения системы, а уравнение (2.1), выражающее фундаментальный закон ее вариации, будем называть *уравнением характеристической функции* или *законом переменного действия*.

3. Для того чтобы более ясно показать, что действие, или накопленную живую силу системы, или, другими словами, интеграл произведения живой силы на элемент времени, можно рассматривать как функцию упомянутых выше $6n + 1$ величин, а именно начальных и конечных координат и величины H, следует отметить, что все, что зависит от способа и времени движения системы, может рассматриваться как такая функция. В самом деле, закон живой силы в первоначальном виде в сочетании с известными или неизвестными $3n$ зависимостями между временем, начальными данными и переменными координатами всегда дает известные или неизвестные $3n + 1$ зависимости, связывающие время и начальные компоненты скоростей с начальными и конечными координатами и с H. Однако, благодаря тому что Лагранж не пришел к представлению о действии как функции такого рода, те следствия, которые были выведены здесь из формулы (2.1) для изменения этого определенного интеграла, не были замечены ни им, ни другими блестящими аналитиками, занимавшимися вопросами теоретической механики, несмотря на то что в их распоряжении была формула для вариации этого интеграла, не очень отличающаяся от нашей.

Дело в том, что Лагранж и другие, рассматривая движение системы, показали, что вариация этого определенного интеграла обращается в нуль, когда даны крайние координаты и постоянная H. Они, по-видимому, вывели из этого резуль-

тата только хорошо известный закон *наименьшего действия,* а именно: 1) если представить точки или тела системы движущимися от данной группы начальных к заданной группе конечных положений не так, как это в действительности происходит, и даже не так, как они могли бы двигаться в соответствии с общими законами динамики или с дифференциальными уравнениями движения, но так, чтобы не нарушать какие-либо предполагаемые геометрические связи, а также ту единственную динамическую зависимость между скоростями и конфигурациями, которая составляет закон живой силы; 2) если, кроме того, это геометрически мыслимое, но динамически невозможное движение заставить отличаться бесконечно *мало* от действительного способа движения системы между заданными крайними положениями, то варьированное значение определенного интеграла, называемого действием или накопленной живой силой системы, находящейся в представленном таким образом движении, будет отличаться бесконечно мало от действительного значения этого интеграла. Но когда этот закон наименьшего, или, как его лучше было бы назвать, *стационарного действия,* применяется к определению фактического движения системы, он служит только для того, чтобы по правилам вариационного исчисления получить дифференциальные уравнения движения второго порядка, которые всегда можно получить другим путем. Поэтому Лагранж, Лаплас и Пуассон, по-видимому, не без основания пренебрежительно отзывались о полезности этого принципа при тогдашнем состоянии динамики. Возможно, что иной принцип, который вводится в настоящей работе под названием закона переменного действия, в котором мы переходим от действительного движения к другому, динамически возможному движению, варьируя крайние положения системы и (вообще) величину H, и который служит для выражения посредством единственной функции не только дифференциальных уравнений движения, но и их промежуточных и конечных интегралов, встретит другую оценку.

Проверка предыдущих интегралов

4. Для проверки, которой не следует пренебрегать, и в то же время для иллюстрации этого нового принципа мы можем вывести известные дифференциальные уравнения движения из нашей системы промежуточных интегралов и затем снова показать соответствие их нашей конечной интегральной схеме. В качестве предпосылки к такой проверке полезно отметить, что конечное уравнение (6) живой силы в сочетании с системой (2.3) принимает следующий новый вид [9]:

$$\frac{1}{2}\sum\frac{1}{m}\left\{\left(\frac{\delta V}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta y}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta z}\right)^2\right\}=U+H, \tag{4.1}$$

а начальное уравнение живой силы (7) с помощью (2.4) принимает вид

$$\frac{1}{2}\sum\frac{1}{m}\left\{\left(\frac{\delta V}{\delta a}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta b}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta c}\right)^2\right\}=U_0+H. \tag{4.2}$$

Этим двум уравнениям в частных производных, начальному и конечному, первого порядка, но второй степени, должна тождественно удовлетворять харак-

теристическая функция V; они дают (как мы увидим далее) основное средство для раскрытия формы этой функции V и имеют существенное значение для ее теории. Если бы форма этой функции была известна, то мы могли бы исключить $3n-1$ начальных координат из $3n$ уравнений (2.3), и хотя мы еще не можем фактически осуществить процесс этого исключения, мы вправе утверждать, что оно удалит с другими и остающуюся начальную координату и приведет к уравнению (6) конечной живой силы, которое затем могло бы быть преобразовано в уравнение (4.1). Подобным же образом мы можем заключить, что все $3n$ конечных координат могут быть совместно исключены из $3n$ уравнений (2.4) и что результатом этого будет начальное уравнение живой силы (7) или преобразованное уравнение (4.2). Поэтому мы можем рассматривать закон живой силы, который помог нам раскрыть свойства нашей характеристической функции V, как включенный в эти свойства и получающийся в каждом частном случае путем исключения из систем (2.3) и (2.4); при рассмотрении любой из этих систем или при проведении любого другого динамического исследования методом этой характеристической функции мы вправе использовать уравнения в частных производных (4.1) и (4.2), которым эта функция необходимо должна удовлетворять.

Теперь нам будет легко вывести, как мы и предполагали, известные уравнения движения (3) второго порядка путем дифференцирования и исключения постоянных из нашей промежуточной интегральной системы (2.3), (2.5) или даже из части этой системы, а именно из группы (2.3) в сочетании с уравнением (4.1). Таким образом, мы получаем

$$m_1 x_1'' = \frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta x_1} = x_1'\frac{\delta^2 V}{\delta x_1^2} + x_2'\frac{\delta^2 V}{\delta x_1 \delta x_2} + \ldots + x'_n\frac{\delta^2 V}{\delta x_1 \delta x_n} + y'_1\frac{\delta^2 V}{\delta x_1 \delta y_1} + y'_2\frac{\delta^2 V}{\delta x_1 \delta y_2} + \ldots$$

$$\ldots + y'_n\frac{\delta^2 V}{\delta x_1 \delta y_n} + z'_1\frac{\delta^2 V}{\delta x_1 \delta z_1} + z'_2\frac{\delta^2 V}{\delta x_1 \delta z_2} + \ldots + z'_n\frac{\delta^2 V}{\delta x_1 \delta z_n} + \ldots = \frac{1}{m_1}\frac{\delta V}{\delta x_1}\frac{\delta^2 V}{\delta x_1^2} +$$

$$+ \frac{1}{m_2}\frac{\delta V}{\delta x_2}\frac{\delta^2 V}{\delta x_1 \delta x_2} + \ldots + \frac{1}{m_n}\frac{\delta V}{\delta x_n}\frac{\delta^2 V}{\delta x_1 \delta x_n} + \frac{1}{m_1}\frac{\delta V}{\delta y_1}\frac{\delta^2 V}{\delta x_1 \delta y_1} + \frac{1}{m_2}\frac{\delta V}{\delta y_2}\frac{\delta^2 V}{\delta x_1 \delta y_2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{m_n}\frac{\delta V}{\delta y_n}\frac{\delta^2 V}{\delta x_1 \delta y_n} + \frac{1}{m_1}\frac{\delta V}{\delta z_1}\frac{\delta^2 V}{\delta x_1 \delta z_1} + \frac{1}{m_2}\frac{\delta V}{\delta z_2}\frac{\delta^2 V}{\delta x_1 \delta z_2} + \ldots + \frac{1}{m_n}\frac{\delta V}{\delta z_n}\frac{\delta^2 V}{\delta x_1 \delta z_n} =$$

$$= \frac{\delta}{\delta x_1}\sum\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\delta V}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta z}\right)^2\right\} = \frac{\delta}{\delta x_1}(U+H), \tag{11}$$

т.е. мы получаем

$$m_1 x_1'' = \delta U / \delta x_1. \tag{12}$$

Подобным же образом мы можем (при помощи дифференцирования) вывести из интегралов (2.3) и из выражения (4.1) все другие известные дифференциальные

уравнения движения второго порядка, содержащиеся в группе (3), или, точнее, мы можем сразу же вывести формулу (1), которая содержит все эти известные уравнения, приняв во внимание, что промежуточные интегралы (2.3) вместе с соотношением (4.1) дают

$$\sum m(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z) = \sum\left(\frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta x}\delta x + \frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta y}\delta y + \frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta z}\delta z\right) =$$

$$= \sum \frac{1}{m}\left(\frac{\delta V}{\delta x}\frac{\delta}{\delta x} + \frac{\delta V}{\delta y}\frac{\delta}{\delta y} + \frac{\delta V}{\delta z}\frac{\delta}{\delta z}\right)\sum\left(\frac{\delta V}{\delta x}\delta x + \frac{\delta V}{\delta y}\delta y + \frac{\delta V}{\delta z}\delta z\right) =$$

$$= \sum\left(\delta x\frac{\delta}{\delta x} + \delta y\frac{\delta}{\delta y} + \delta z\frac{\delta}{\delta z}\right)\sum\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\delta V}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta z}\right)^2\right\} =$$

$$= \sum\left(\delta x\frac{\delta}{\delta x} + \delta y\frac{\delta}{\delta y} + \delta z\frac{\delta}{\delta z}\right)(U + H) = \delta U. \qquad (13)$$

5. Теперь мы должны показать, что наша промежуточная интегральная система, состоящая из уравнений (2.3) и (2.5) с $3n$ произвольными постоянными a_1, b_1, c_1, ..., a_n, b_n, c_n (включающая также вспомогательную постоянную H), совместна с нашей конечной интегральной системой уравнений (2.4) и (2.5), которая содержит $3n$ других произвольных постоянных, именно $a'_1, b'_1, c'_1, \ldots, a'_n, b'_n, c'_n$. Взяв производные от уравнений (2.3), (2.4), (2.5) по времени, получим для первой группы:

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta x_1} = m_1 x''_1,\quad \frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta x_2} = m_2 x''_2, \ldots, \frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta x_n} = m_n x''_n,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta y_1} = m_1 y''_1,\quad \frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta y_2} = m_2 y''_2, \ldots, \frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta y_n} = m_n y''_n,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta z_1} = m_1 z''_1,\quad \frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta z_2} = m_2 z''_2, \ldots, \frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta z_n} = m_n z''_n, \qquad (5.1)$$

для второй группы:

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta a_1} = 0,\quad \frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta a_2} = 0, \ldots, \frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta a_n} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta b_1} = 0,\quad \frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta b_2} = 0, \ldots, \frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta b_n} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta c_1} = 0,\quad \frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta c_2} = 0, \ldots, \frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta c_n} = 0 \qquad (5.2)$$

и, наконец, для последнего уравнения

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta H}=1. \tag{5.3}$$

Комбинируя уравнения (2.3) с (5.1) и с соотношением (4.1), мы вывели в предыдущем пункте известные уравнения движения (3) и теперь должны показать совместность тех же промежуточных интегралов (2.3) с группой производных (5.2), выведенных из конечных интегралов.

Первое уравнение группы (5.2) может быть развернуто так:

$$x_1'\frac{\delta^2 V}{\delta a_1 \delta x_1}+x_2'\frac{\delta^2 V}{\delta a_1 \delta x_2}+\ldots+x_n'\frac{\delta^2 V}{\delta a_1 \delta x_n}+y_1'\frac{\delta^2 V}{\delta a_1 \delta y_1}+y'_2\frac{\delta^2 V}{\delta a_1 \delta y_2}+\ldots+y_n'\frac{\delta^2 V}{\delta a_1 \delta y_n}+$$

$$+z'_1\frac{\delta^2 V}{\delta a_1 \delta z_1}+z'_2\frac{\delta^2 V}{\delta a_1 \delta z_2}+\ldots+z_n'\frac{\delta^2 V}{\delta a_1 \delta z_n}=0, \tag{14}$$

другие могут быть развернуты аналогичным образом. Поэтому, для того чтобы показать, что уравнения удовлетворяются группой (2.3), достаточно доказать, что верны следующие уравнения:

$$\frac{\delta}{\delta a_i}\sum\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\delta V}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta y}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta z}\right)^2\right\}=0,$$

$$\frac{\delta}{\delta b_i}\sum\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\delta V}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta y}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta z}\right)^2\right\}=0,$$

$$\frac{\delta}{\delta c_i}\sum\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\delta V}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta y}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta z}\right)^2\right\}=0, \tag{5.4}$$

где целое число i получает любое значение от 1 до n включительно. Это можно немедленно показать и получить таким образом требуемую проверку, для чего достаточно взять вариацию выражения (4.1) по начальным координатам, подобно тому как в предыдущей проверке мы брали ее вариацию по конечным координатам, и таким образом получить результаты, которые согласуются с известными уравнениями движения и могут быть представлены следующим образом:

$$\frac{\delta}{\delta x_i}\sum\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\delta V}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta y}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta z}\right)^2\right\}=\frac{\delta U}{\delta x_i},$$

$$\frac{\delta}{\delta y_i}\sum\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\delta V}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta y}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta z}\right)^2\right\}=\frac{\delta U}{\delta y_i},$$

$$\frac{\delta}{\delta z_i}\sum\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\delta V}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta y}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta z}\right)^2\right\}=\frac{\delta U}{\delta z_i}. \tag{5.5}$$

То же соотношение (4.1), когда оно варьируется по величине H, приводит к выражению

$$\frac{\delta}{\delta H}\sum\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\delta V}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta y}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta z}\right)^2\right\}=1, \tag{5.6}$$

а это последнее, будучи развернуто, согласуется с уравнением (5.3), что представляет собой новое подтверждение совместности наших предыдущих результатов. Точно так же не многим труднее было бы, исходя из изложенных выше принципов, прямо проинтегрировать наши интегралы первого порядка и таким образом вывести нашу конечную интегральную систему другим способом.

6. Мы можем считать еще одним подтверждением наших собственных общих уравнений для интегралов доказательство того, что они заключают в себе не только известный закон живой силы, но также шесть других известных интегралов первого порядка: закон движения центра тяжести и закон площадей. Для этой цели необходимо только отметить, что из концепции нашей характеристической функции V с очевидностью следует, что эта функция зависит от начальных и конечных положений притягивающихся или отталкивающихся точек системы, не как отнесенных к какому-либо внешнему стандарту, а только как сравниваемых друг с другом; следовательно, эта функция не будет меняться, если мы, не делая никаких реальных изменений ни в начальной, ни в конечной конфигурациях, ни в их отношении друг к другу, сразу изменим все начальные и все конечные положения точек системы при помощи какого-нибудь общего движения, будь то перенос или вращение [10]. Теперь, рассматривая три координатных переноса, мы получим три следующих уравнения в частных производных первого порядка, которым должна удовлетворять функция V:

$$\sum\frac{\delta V}{\delta x}+\sum\frac{\delta V}{\delta a}=0,\quad \sum\frac{\delta V}{\delta y}+\sum\frac{\delta V}{\delta b}=0,\quad \sum\frac{\delta V}{\delta z}+\sum\frac{\delta V}{\delta c}=0, \tag{6.1}$$

а рассматривая три координатных вращения, мы получим три других соотношения между частными производными того же порядка той же характеристической функции:

$$\begin{gathered}\sum\left(x\frac{\delta V}{\delta y}-y\frac{\delta V}{\delta x}\right)+\sum\left(a\frac{\delta V}{\delta b}-b\frac{\delta V}{\delta a}\right)=0,\\ \sum\left(y\frac{\delta V}{\delta z}-z\frac{\delta V}{\delta y}\right)+\sum\left(b\frac{\delta V}{\delta c}-c\frac{\delta V}{\delta b}\right)=0,\\ \sum\left(z\frac{\delta V}{\delta x}-x\frac{\delta V}{\delta z}\right)+\sum\left(c\frac{\delta V}{\delta a}-a\frac{\delta V}{\delta c}\right)=0.\end{gathered} \tag{6.2}$$

Если мы заменим конечные производные V конечными компонентами импульса, а начальные производные – начальными компонентами, взятыми с отрицательным знаком, согласно динамическим свойствам этой функции, выраженным интегралами (2.3) и (2.4), то мы изменим также уравнения в частных производных (6.1) и (6.2) и получим следующее:

$$\sum mx' = \sum ma', \quad \sum my' = \sum mb', \quad \sum mz' = \sum mc' \tag{15}$$

и

$$\sum m(xy' - yx') = \sum m(ab' - ba'),$$

$$\sum m(yz' - zy') = \sum m(bc' - cb'),$$

$$\sum m(zx' - xz') = \sum m(ca' - ac'). \tag{16}$$

Следовательно, таким путем мы можем вывести из свойств нашей характеристической функции шесть других известных интегралов, упомянутых выше, помимо того седьмого, который содержится в законе живой силы и который помог нам открыть наш метод.

Введение относительных или полярных координат или других отметок положения системы [11]

7. Свойство нашей характеристической функции, выражающееся в том, что она зависит только от внутренних или взаимных отношений между начальными и конечными положениями точек притягивающейся или отталкивающейся системы, свидетельствует о преимуществе применения внутренних или относительных координат. По аналогии с другими применениями алгебраических методов к исследованиям геометрического типа можно предполагать, что полярные и другие отметки положения могут также зачастую оказаться полезными. Предполагая, следовательно, что $3n$ конечных координат $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$ выражены как $3n$ функций других переменных $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{3n}$ и что $3n$ начальных координат подобным же образом выражены как функции аналогичных $3n$ величин, которые мы обозначим $e_1, e_2, \ldots, e_{3n}$, перейдем к определению общего метода для введения этих новых отметок положения в выражения наших основных зависимостей.

Для этой цели нам нужно только преобразовать закон переменного действия или основную формулу (2.1) путем преобразования двух сумм:

$$\sum m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z) \quad \text{и} \quad \sum m(a'\delta a + b'\delta b + c'\delta c),$$

которые она включает и которые соответственно эквивалентны следующим более развернутым выражениям:

$$\sum m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z) = m_1(x'_1\,\delta x_1 + y'_1\,\delta y_1 + z'_1\delta z_1) +$$

$$+ m_2(x'_2\,\delta x_2 + y'_2\,\delta y_2 + z'_2\delta z_2) + \ldots + m_n(x'_n\delta x_n + y'_n\delta y_n + z'_n\delta z_n), \tag{17}$$

$$\sum m(a'\delta a+b'\delta b+c'\delta c)=m_1(a_1'\delta a_1+b_1'\delta b_1+c_1'\delta c_1)+$$

$$+m_2(a_2'\delta a_2+b_2'\delta b_2+c_2'\delta c_2)+\ldots+m_n(a_n'\delta a_n+\ b_n'\delta b_n+\ c_n'\delta c_n). \quad (18)$$

Теперь поскольку x_i является по предположению функцией $3n$ новых отметок положения $\eta_1, \ldots, \eta_{3n}$, его вариация δx_i и его производная x'_i могут быть выражены следующим образом:

$$\delta x_i=\frac{\delta x_i}{\delta\eta_1}\delta\eta_1+\frac{\delta x_i}{\delta\eta_2}\delta\eta_2+\ldots+\frac{\delta x_i}{\delta\eta_{3n}}\delta\eta_{3n}, \quad (19)$$

$$x_i'=\frac{\delta x_i}{\delta\eta_1}\eta_1'+\frac{\delta x_i}{\delta\eta_2}\eta_2'+\ldots+\frac{\delta x_i}{\delta\eta_{3n}}\eta_{3n}' \quad (20)$$

и аналогично для y_i и z_i. Таким образом, если мы посредством равенств (20) будем рассматривать x_i' как функцию $\eta_1',\ldots,\eta'_{3n}$, включающую вообще также и $\eta_1, \ldots, \eta_{3n}$, и если мы возьмем ее частные производные первого порядка по $\eta_1',\ldots,\eta_{3n}'$, то мы найдем соотношения

$$\frac{\delta x_i'}{\delta\eta_1'}=\frac{\delta x_i}{\delta\eta_1},\quad \frac{\delta x_i'}{\delta\eta_2'}=\frac{\delta x_i}{\delta\eta_2},\ldots,\frac{\delta x_i'}{\delta\eta_{3n}'}=\frac{\delta x_i}{\delta\eta_{3n}} \quad (21)$$

и получим следующие новые выражения для вариаций $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$:

$$\delta x_i=\frac{\delta x_i'}{\delta\eta_1'}\delta\eta_1+\frac{\delta x_i'}{\delta\eta_2'}\delta\eta_2+\ldots+\frac{\delta x_i'}{\delta\eta_{3n}'}\delta\eta_{3n},$$

$$\delta y_i=\frac{\delta y'_i}{\delta\eta_1'}\delta\eta_1+\frac{\delta y'_i}{\delta\eta_2'}\delta\eta_2+\ldots+\frac{\delta y'_i}{\delta\eta_{3n}'}\delta\eta_{3n},$$

$$\delta z_i=\frac{\delta z'_i}{\delta\eta_1'}\delta\eta_1+\frac{\delta z'_i}{\delta\eta_2'}\delta\eta_2+\ldots+\frac{\delta z'_i}{\delta\eta_{3n}'}\delta\eta_{3n}. \quad (22)$$

Подставляя эти выражения (22) вместо вариаций в сумму (17), мы легко преобразуем ее в следующую:

$$\sum m(x'\delta x+y'\delta y+z'\delta z)=$$

$$=\sum m\left(x'\frac{\delta x'}{\delta\eta_1'}+y'\frac{\delta y'}{\delta\eta_1'}+z'\frac{\delta z'}{\delta\eta_1'}\right)\delta\eta_1+$$

$$+\sum m\left(x'\frac{\delta x'}{\delta\eta_2'}+y'\frac{\delta y'}{\delta\eta_2'}+z'\frac{\delta z'}{\delta\eta_2'}\right)\delta\eta_2+\ldots$$

$$\ldots+\sum m\left(x'\frac{\delta x'}{\delta\eta'_{3n}}+y'\frac{\delta y'}{\delta\eta'_{3n}}+z'\frac{\delta z'}{\delta\eta'_{3n}}\right)\delta\eta_{3n}=$$
$$=\frac{\delta T}{\delta\eta'_1}\delta\eta_1+\frac{\delta T}{\delta\eta'_2}\delta\eta_2+\ldots+\frac{\delta T}{\delta\eta'_{3n}}\delta\eta_{3n}. \quad (23)$$

Здесь T – та же величина, что и раньше, а именно половина конечной живой силы системы, но теперь рассматриваемая как функция $\eta'_1,\ldots,\eta'_{3n}$ и включающая также массы и в общем случае величины $\eta_1,\ldots,\eta_{3n}$, полученная путем подстановки вместо величин x', y', z' их значений вида (20) в уравнение (4), определяющее T:

$$T=\frac{1}{2}\sum m(x'^2+y'^2+z'^2).$$

Подобным же образом мы находим следующее преобразование для суммы (18):

$$\sum m(a'\,\delta a+b'\,\delta b+c'\,\delta c)=\frac{\delta T_0}{\delta e'_1}\delta e_1+\frac{\delta T_0}{\delta e'_2}\delta e_2+\ldots+\frac{\delta T_0}{\delta e'_{3n}}\delta e_{3n}. \quad (24)$$

Таким образом, закон переменного действия [формула (2.1)], будучи выражен данными более общими координатами или отметками положения, принимает вид [12]

$$\delta V=\sum\frac{\delta T}{\delta\eta'}\delta\eta-\sum\frac{\delta T_0}{\delta e'}\delta e+t\delta H, \quad (7.1)$$

но вместо групп (2.3) и (2.4), на которые распадался этот закон, он дает теперь совместно с уравнением (2.5) другие группы:

$$\frac{\delta V}{\delta\eta_1}=\frac{\delta T}{\delta\eta'_1},\quad \frac{\delta V}{\delta\eta_2}=\frac{\delta T}{\delta\eta'_2},\ldots,\frac{\delta V}{\delta\eta_{3n}}=\frac{\delta T}{\delta\eta'_{3n}}, \quad (7.2)$$

$$\frac{\delta V}{\delta e_1}=-\frac{\delta T_0}{\delta e'_1},\quad \frac{\delta V}{\delta e_2}=-\frac{\delta T_0}{\delta e'_2},\ldots,\frac{\delta V}{\delta e_{3n}}=-\frac{\delta T_0}{\delta e'_{3n}}. \quad (7.3)$$

Величины $e_1,e_2,\ldots,e_{3n}$ и $e'_1,e'_2,\ldots,e'_{3n}$ представляют собой начальные данные, относящиеся к способу движения системы, а $3n$ конечных интегралов, связывающих эти $6n$ начальных данных и масс со временем t и с $3n$ конечными или переменными величинами $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{3n}$, отмечающими переменные положения n движущихся точек системы, получаются теперь путем исключения вспомогательной постоянной H из $3n+1$ уравнений (7.3) и (2.5). В то же время $3n$ промежуточных интеграла или интегралы первого порядка, которые связывают те же переменные отметки положения и их первые производные со временем, массами и начальными отметками положения, получаются в результате исключения той же вспомогательной постоянной H из уравнений (7.2) и (2.5). Поэтому наша основная формула и промежуточные и конечные интегралы могут быть очень просто выражены в любой новой группе координат. При этом частные производные (4.1), (4.2), которым должна удовлетворять наша характеристическая функция V и которые, как мы уже

говорили, имеют существенное значение для теории этой функции, также могут быть легко выражены любыми подобными преобразованными координат путем простого сочетания конечных и начальный выражений (6), (7) закона живой силы

$$T = U + H, \quad T_0 = U_0 + H$$

с новыми группами уравнений (7.2) и (7.3). Для этого мы теперь должны рассматривать функцию U масс и взаимных расстояний отдельных точек системы как зависящую от новых отметок положения $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{3n}$, а аналогичную функцию U_0 – как зависящую подобным же образом от начальных величин e_1, $e_2, \ldots$, e_{3n}. Мы должны также предположить, что T является (что в действительности возможно) функцией своих собственных производных $\delta T / \delta\eta'_1, \delta T / \delta\eta'_2, \ldots, \delta T / \delta\eta'_{3n}$, всегда однородной второй степени относительно них, и может также в явном виде включать величины $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{3n}$, а T_0 является подобной же функцией производных

$$\frac{\delta T_0}{\delta e'_1}, \ \frac{\delta T_0}{\delta e'_2}, \ \ldots, \ \frac{\delta T_0}{\delta e'_{3n}}.$$

Итак,

$$T = F\left(\frac{\delta T}{\delta\eta'_1}, \frac{\delta T}{\delta\eta'_2}, \ldots, \frac{\delta T}{\delta\eta'_{3n}}\right),$$

$$T_0 = F\left(\frac{\delta T_0}{\delta e'_1}, \frac{\delta T_0}{\delta e'_2}, \ldots, \frac{\delta T_0}{\delta e'_{3n}}\right), \tag{25}$$

причем производные T и T_0 заменяются своими значениями (7.2) и (7.3), давая взамен (4.1) и (4.2) два других преобразованных уравнения, а именно:

$$F\left(\frac{\delta V}{\delta\eta_1}, \frac{\delta V}{\delta\eta_2}, \ldots, \frac{\delta V}{\delta\eta_{3n}}\right) = U + H \tag{7.4}$$

и вследствие однородности и размерности T_0

$$F\left(\frac{\delta V}{\delta e_1}, \frac{\delta V}{\delta e_2}, \ldots, \frac{\delta V}{\delta e_{3n}}\right) = U_0 + H. \tag{7.5}$$

8. Точно так же совсем нетрудно вывести аналогичное преобразование известных дифференциальных уравнений движения второго порядка для любой системы свободных точек, взяв вариацию новой формы (7.4) закона живой силы и использовав динамические значения производных нашей характеристической функции. В самом деле, если мы заметим, что конечная живая сила $2T$, рассматриваемая как функция переменных $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{3n}$ и $\eta'_1, \eta'_2, \ldots, \eta'_{3n}$, обязательно является однородной функцией второй степени последней группы переменных и, следовательно,

должна удовлетворять условию

$$2T = \eta_1' \frac{\delta T}{\delta \eta_1'} + \eta_2' \frac{\delta T}{\delta \eta_2'} + \ldots + \eta_{3n}' \frac{\delta T}{\delta \eta_{3n}'}, \tag{26}$$

то мы найдем, что ее полная вариация

$$\delta T = \frac{\delta T}{\delta \eta_1}\delta\eta_1 + \frac{\delta T}{\delta \eta_2}\delta\eta_2 + \ldots + \frac{\delta T}{\delta \eta_{3n}}\delta\eta_{3n} + \frac{\delta T}{\delta \eta_1'}\delta\eta_1' + \frac{\delta T}{\delta \eta_2'}\delta\eta_2' + \ldots + \frac{\delta T}{\delta \eta_{3n}'}\delta\eta_{3n}' \tag{27}$$

может быть представлена в виде

$$\delta T = \eta_1'\delta\frac{\delta T}{\delta \eta_1'} + \eta_2'\delta\frac{\delta T}{\delta \eta_2'} + \ldots + \eta_{3n}'\delta\frac{\delta T}{\delta \eta_{3n}'} - \frac{\delta T}{\delta \eta_1}\delta\eta_1 - \frac{\delta T}{\delta \eta_2}\delta\eta_2 - \ldots - \frac{\delta T}{\delta \eta_{3n}}\delta\eta_{3n} =$$

$$= \sum \eta'\delta\frac{\delta T}{\delta\eta'} - \sum\frac{\delta T}{\delta\eta}\delta\eta = \sum\left(\eta'\delta\frac{\delta V}{\delta\eta} - \frac{\delta T}{\delta\eta}\delta\eta\right). \tag{28}$$

Таким образом, полная вариация нового уравнения в частных производных (7.4) может быть записана следующим образом:

$$\sum\left(\eta'\delta\frac{\delta V}{\delta\eta} - \frac{\delta T}{\delta\eta}\delta\eta\right) = \sum\frac{\delta U}{\delta\eta}\delta\eta + \delta H. \tag{8.1}$$

Заметив, что $\eta' = d\eta/dt$ и что величины вида η являются единственными, которые меняются со временем, найдем, что

$$\sum \eta'\delta\frac{\delta V}{\delta\eta} = \sum\left(\frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta\eta}\delta\eta + \frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta e}\delta e\right) + \frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta H}\delta H, \tag{29}$$

так как тождество $\delta dV = d\delta V$ в развернутом виде дает

$$\sum\left(\delta\frac{\delta V}{\delta\eta}d\eta + \delta\frac{\delta V}{\delta e}de\right) + \delta\frac{\delta V}{\delta H}dH = \sum\left(d\frac{\delta V}{\delta\eta}\delta\eta + d\frac{\delta V}{\delta e}\delta e\right) + d\frac{\delta V}{\delta H}\delta H. \tag{30}$$

Разбивая выражение (8.1) вариации половины живой силы на столько отдельных уравнений, сколько оно содержит независимых вариаций, мы получаем не только уравнение (5.3)

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta H} = 1,$$

которое уже появлялось, и группу

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta e_1} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta e_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta e_{3n}} = 0, \tag{8.2}$$

которая может быть сразу же получена путем дифференцирования конечных интегралов (7.3), но также группу других $3n$ уравнений вида

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta V}{\delta\eta} - \frac{\delta T}{\delta\eta} = \frac{\delta U}{\delta\eta}, \tag{8.3}$$

которые посредством промежуточных интегралов (7.2) дают уравнение

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta \eta'} - \frac{\delta T}{\delta \eta} = \frac{\delta U}{\delta \eta}, \tag{8.4}$$

или в более полном виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta \eta'_1} - \frac{\delta T}{\delta \eta_1} = \frac{\delta U}{\delta \eta_1},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta \eta'_2} - \frac{\delta T}{\delta \eta_2} = \frac{\delta U}{\delta \eta_2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta \eta'_{3n}} - \frac{\delta T}{\delta \eta_{3n}} = \frac{\delta U}{\delta \eta_{3n}}. \tag{8.5}$$

Эти последние преобразования дифференциальных уравнений движения второго порядка системы притягивающихся или отталкивающихся точек во всех отношениях совпадают (не считая небольших различий в написании) с изящными каноническими формами, данными Лагранжем в "Mécanique analytique", но нам казалось, что стоит вывести их заново из свойств нашей характеристической функции. Предположим (как это часто считается удобным и даже необходимым), что n точек системы не являются целиком свободными и подвержены не только своим собственным взаимным притяжениям и отталкиваниям, но связаны любыми геометрическими условиями и подвергаются влиянию любых внешних факторов, согласующихся с законом сохранения живой силы, так что число независимых отметок положения будет менее велико, а силовая функция менее проста, чем раньше. Тогда мы можем доказать при помощи рассуждения, очень сходного с предыдущим, что и при этих предположениях (которые, однако, дух динамики все более и более склонен исключать) накопленная живая сила, или действие V системы, представляет собой *характеристическую функцию движения* уже разобранного выше рода. Эта функция выражается тем же законом и формулой вариации, подверженной тем же преобразованиям, и обязана удовлетворять таким же способом, как и выше, конечной и начальной зависимости между ее частными производными первого порядка. Она приводит при помощи варьирования одной из этих двух зависимостей к тем же каноническим формам, которые были даны Лагранжем для дифференциальных уравнений движения, и дает, исходя из изложенных выше принципов, их промежуточные и конечные интегралы. По отношению к тем же мыслимым случаям, в которых закон живой силы не имеет места, наш метод также неприменим; однако среди людей, наиболее глубоко занимавшихся математической динамикой Вселенной, все более крепнет убеждение, что представление о таких случаях вызывается недостаточным пониманием взаимодействия тел.

9. Из предыдущих замечаний следует, что, для того чтобы применить наш метод к любой задаче динамики, относящейся к любой движущейся системе, необходимо сочетать известный закон живой силы с нашим законом переменного действия.

Общее выражение этого последнего закона может быть получено следующим образом. Прежде всего мы должны выразить величину T, т.е. половину живой силы системы, как функцию (которая всегда будет однородной функцией второй степени) производных η'_1, η'_2 и т.д. любых прямоугольных координат или других отметок положения системы. Затем мы должны взять вариацию этой однородной функции по η'_1, η'_2 и т.д. и заменить вариации $\delta\eta'_1$, $\delta\eta'_2$ и т.д. вариациями $\delta\eta_1$, $\delta\eta_2$ и т.д. самих отметок положения. Наконец, надо вычесть из конечного результата начальное значение и приравнять полученную разность величине $\delta V - t\delta H$ [13]. Легко заметить, что это общее правило, или процесс получения вариации характеристической функции V, применимо даже тогда, когда отметки положения η_1, η_2 и т.д. не независимы одна от другой. Это будет иметь место в том случае, когда по соображениям удобства они взяты в числе большем, чем число прямоугольных координат отдельных точек системы. В самом деле, если мы предположим, что $3n$ прямоугольных координат $x, y, z, \ldots, x_n, y_n, z_n$ выражены посредством какого-либо преобразования как функции $3n + k$ других отметок положения $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{3n+k}$, которые поэтому должны быть связаны k уравнениями условий

$$\begin{aligned} &\varphi_1(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{3n+k}) = 0, \\ &\varphi_2(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{3n+k}) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_k(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{3n+k}) = 0, \end{aligned} \tag{31}$$

дающими k новых отметок положения как функции остальных $3n$ отметок,

$$\begin{aligned} &\eta_{3n+1} = \psi_1(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{3n}), \\ &\eta_{3n+2} = \psi_2(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{3n}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\eta_{3n+k} = \psi_k(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{3n}), \end{aligned} \tag{32}$$

то выражение (4)

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

превратится благодаря введению этих новых переменных в однородную функцию степени $3n + k$ величин $\eta'_1, \eta'_2, \ldots, \eta'_{3n+k}$, включающую вообще также $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{3n+k}$. Вариация ее может быть выражена следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta T = &\left(\frac{\delta T}{\delta\eta'_1}\right)\delta\eta'_1 + \left(\frac{\delta T}{\delta\eta'_2}\right)\delta\eta'_2 + \ldots + \left(\frac{\delta T}{\delta\eta'_{3n+k}}\right)\delta\eta'_{3n+k} + \\ &+ \left(\frac{\delta T}{\delta\eta_1}\right)\delta\eta_1 + \left(\frac{\delta T}{\delta\eta_2}\right)\delta\eta_2 + \ldots + \left(\frac{\delta T}{\delta\eta_{3n+k}}\right)\delta\eta_{3n+k}, \end{aligned} \tag{33}$$

или, иначе,

$$\delta T = \frac{\delta T}{\delta\eta'_1}\delta\eta'_1 + \frac{\delta T}{\delta\eta'_2}\delta\eta'_2 + \ldots + \frac{\delta T}{\delta\eta'_{3n}}\delta\eta'_{3n} + \frac{\delta T}{\delta\eta_1}\delta\eta_1 + \frac{\delta T}{\delta\eta_2}\delta\eta_2 + \ldots + \frac{\delta T}{\delta\eta_{3n}}\delta\eta_{3n}, \tag{34}$$

благодаря соотношениям (32), которые, будучи дифференцированы по времени, дают

$$\eta'_{3n+1} = \eta'_1 \frac{\delta\psi_1}{\delta\eta_1} + \eta'_2 \frac{\delta\psi_1}{\delta\eta_2} + \ldots + \eta'_{3n} \frac{\delta\psi_1}{\delta\eta_{3n}},$$

$$\eta'_{3n+2} = \eta'_1 \frac{\delta\psi_2}{\delta\eta_1} + \eta'_2 \frac{\delta\psi_1}{\delta\eta_2} + \ldots + \eta'_{3n} \frac{\delta\psi_2}{\delta\eta_{3n}},$$

. . . .

$$\eta'_{3n+k} = \eta'_1 \frac{\delta\psi_k}{\delta\eta_1} + \eta'_2 \frac{\delta\psi_k}{\delta\eta_2} + \ldots + \eta'_{3n} \frac{\delta\psi_k}{\delta\eta_{3n}} \tag{35}$$

и, следовательно, варьируя лишь величины вида η',

$$\delta\eta'_{3n+1} = \frac{\delta\psi_1}{\delta\eta_1}\delta\eta'_1 + \frac{\delta\psi_1}{\delta\eta_2}\delta\eta'_2 + \ldots + \frac{\delta\psi_1}{\delta\eta_{3n}}\delta\eta'_{3n},$$

$$\delta\eta'_{3n+2} = \frac{\delta\psi_2}{\delta\eta_1}\delta\eta'_1 + \frac{\delta\psi_2}{\delta\eta_2}\delta\eta'_2 + \ldots + \frac{\delta\psi_2}{\delta\eta_{3n}}\delta\eta'_{3n},$$

. . . .

$$\delta\eta'_{3n+k} = \frac{\delta\psi_k}{\delta\eta_1}\delta\eta'_1 + \frac{\delta\psi_k}{\delta\eta_2}\delta\eta'_2 + \ldots + \frac{\delta\psi_k}{\delta\eta_{3n}}\delta\eta'_{3n}. \tag{36}$$

Сравнивая два выражения (33) и (34), мы при помощи (36) находим соотношения

$$\frac{\delta T}{\delta\eta'_1} = \left(\frac{\delta T}{\delta\eta'_1}\right) + \left(\frac{\delta T}{\delta\eta'_{3n+1}}\right)\frac{\delta\psi_1}{\delta\eta_1} + \left(\frac{\delta T}{\delta\eta'_{3n+2}}\right)\frac{\delta\psi_2}{\delta\eta_1} + \ldots + \left(\frac{\delta T}{\delta\eta'_{3n+k}}\right)\frac{\delta\psi_k}{\delta\eta_1},$$

$$\frac{\delta T}{\delta\eta'_2} = \left(\frac{\delta T}{\delta\eta'_2}\right) + \left(\frac{\delta T}{\delta\eta'_{3n+1}}\right)\frac{\delta\psi_1}{\delta\eta_2} + \left(\frac{\delta T}{\delta\eta'_{3n+2}}\right)\frac{\delta\psi_2}{\delta\eta_2} + \ldots + \left(\frac{\delta T}{\delta\eta'_{3n+k}}\right)\frac{\delta\psi_k}{\delta\eta_2},$$

. . . .

$$\frac{\delta T}{\delta\eta'_{3n}} = \left(\frac{\delta T}{\delta\eta'_{3n}}\right) + \left(\frac{\delta T}{\delta\eta'_{3n+1}}\right)\frac{\delta\psi_1}{\delta\eta_{3n}} + \left(\frac{\delta T}{\delta\eta'_{3n+2}}\right)\frac{\delta\psi_2}{\delta\eta_{3n}} + \ldots + \left(\frac{\delta T}{\delta\eta'_{3n+k}}\right)\frac{\delta\psi_k}{\delta\eta_{3n}}, \tag{37}$$

которые дают посредством (32)

$$\frac{\delta T}{\delta\eta'_1}\delta\eta_1 + \frac{\delta T}{\delta\eta'_2}\delta\eta_2 + \ldots + \frac{\delta T}{\delta\eta'_{3n}}\delta\eta_{3n} = \left(\frac{\delta T}{\delta\eta'_1}\right)\delta\eta_1 + \ldots + \left(\frac{\delta T}{\delta\eta'_{3n+k}}\right)\delta\eta_{3n+k}. \tag{38}$$

Следовательно, мы можем написать выражение (7.1) в следующем более общем виде:

$$\delta V = \sum\left(\frac{\delta T}{\delta\eta'}\right)\delta\eta - \sum\left(\frac{\delta T_0}{\delta e'}\right)\delta e + t\delta H. \tag{9.1}$$

Здесь производные $(\delta T/\delta\eta')$ образуются, считая все $3n + k$ величин $\eta'_1, \eta'_2, \ldots, \eta'_{3n+k}$ независимыми; это есть распространение провозглашенного выше правила образования вариации характеристической функции V.

Мы не можем сразу разложить это новое выражение (9.1) для δV, как мы это делали для (7.1), рассматривая все вариации $\delta\eta$, δe как независимые. Однако мы сможем разложить (9.1), если предварительно примем во внимание конечные уравнения условий (31) и аналогичные начальные уравнения условий, а именно:

$$\Phi_1(e_1, e_2, \ldots, e_{3n+k}) = 0,$$
$$\Phi_2(e_1, e_2, \ldots, e_{3n+k}) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Phi_k(e_1, e_2, \ldots, e_{3n+k}) = 0. \qquad (39)$$

Для этого мы должны прибавить вариации функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$, соответственно помноженные на подлежащие определению множители $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k$. Таким образом, закон переменного действия принимает следующий новый вид:

$$\delta V = \sum\left(\frac{\delta T}{\delta\eta'}\right)\delta\eta - \sum\left(\frac{\delta T_0}{\delta e'}\right)\delta e + t\delta H + \sum\lambda\delta\varphi + \sum\Lambda\delta\Phi \qquad (9.2)$$

и распадается на $6n + 2k + 1$ отдельных выражений для частных производных первого порядка характеристической функции V:

$$\frac{\delta V}{\delta\eta_1} = \left(\frac{\delta T}{\delta\eta_1'}\right) + \lambda_1\frac{\delta\varphi_1}{\delta\eta_1} + \lambda_2\frac{\delta\varphi_2}{\delta\eta_1} + \ldots + \lambda_k\frac{\delta\varphi_k}{\delta\eta_1},$$
$$\frac{\delta V}{\delta\eta_2} = \left(\frac{\delta T}{\delta\eta_2'}\right) + \lambda_1\frac{\delta\varphi_1}{\delta\eta_2} + \lambda_2\frac{\delta\varphi_2}{\delta\eta_2} + \ldots + \lambda_k\frac{\delta\varphi_k}{\delta\eta_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\delta V}{\delta\eta_{3n+k}} = \left(\frac{\delta T}{\delta\eta_{3n+k}'}\right) + \lambda_1\frac{\delta\varphi_1}{\delta\eta_{3n+k}} + \ldots + \lambda_k\frac{\delta\varphi_k}{\delta\eta_{3n+k}}; \qquad (9.3)$$

$$\frac{\delta V}{\delta e_1} = -\left(\frac{\delta T_0}{\delta e_1'}\right) + \Lambda_1\frac{\delta\Phi_1}{\delta e_1} + \Lambda_2\frac{\delta\Phi_2}{\delta e_1} + \ldots + \Lambda_k\frac{\delta\Phi_k}{\delta e_1},$$
$$\frac{\delta V}{\delta e_2} = -\left(\frac{\delta T_0}{\delta e_2'}\right) + \Lambda_1\frac{\delta\Phi_1}{\delta e_2} + \Lambda_2\frac{\delta\Phi_2}{\delta e_2} + \ldots + \Lambda_k\frac{\delta\Phi_k}{\delta e_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\delta V}{\delta e_{3n+k}} = -\left(\frac{\delta T_0}{\delta e_{3n+k}'}\right) + \Lambda_1\frac{\delta\Phi_1}{\delta e_{3n+k}} + \ldots + \Lambda_k\frac{\delta\Phi_k}{\delta e_{3n+k}} \qquad (9.4)$$

и старое уравнение (2.5). Аналогичное введение множителей в канонических формах Лагранжа для дифференциальных уравнений движения второго порядка, посредством которых сумма вида $\sum\lambda(\delta\varphi/\delta\eta)$ складывается с $\delta U/\delta\eta$ во втором члене формулы (8.4), также легко оправдывается, исходя из принципов данной работы.

Отделение относительного движения системы от движения ее центра тяжести; характеристическая функция такого относительного движения и закон ее вариации

10. В качестве примера предыдущих преобразований и в то же время в качестве важного случая их применения мы введем теперь относительные координаты x, y, z, отнесенные к внутреннему началу $x_{,,}\ y_{,,} z_{,,}$ т.е. положим

$$x_i = x_{,i} + x_{,,}, \quad y_i = y_{,i} + y_{,,}, \quad z_i = z_{,i} + z_{,,} \tag{40}$$

и аналогичным образом

$$a_i = a_{,i} + a_{,,}, \quad b_i = b_{,i} + b_{,,}, \quad c_i = c_{,i} + c_{,,}, \tag{41}$$

совместно с дифференциальными выражениями

$$x_i' = x'_{,i} + x'_{,,}, \quad y_i' = y'_{,i} + y'_{,,}, \quad z_i' = z'_{,i} + z'_{,,} \tag{42}$$

и

$$a_i' = a'_{,i} + a'_{,,}, \quad b_i' = b'_{,i} + b'_{,,}, \quad c_i' = c'_{,i} + c'_{,,}. \tag{43}$$

Введя выражения (42) для прямоугольных компонент скорости в равенство (4), мы найдем, что значение живой силы $2T$ распадается на три следующие части:

$$2T = \sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \sum m(x'^2_{,} + y'^2_{,} + z'^2_{,}) +$$

$$+2(x'_{,,} \sum mx'_{,} + y'_{,,} \sum my'_{,} + z'_{,,} \sum mz'_{,}) + (x'^2_{,,} + y'^2_{,,} + z'^2_{,,}) \sum m, \tag{44}$$

и тогда, установив, как мы вправе сделать, три уравнения условий

$$\sum mx_{,} = 0, \quad \sum my_{,} = 0, \quad \sum mz_{,} = 0, \tag{45}$$

которые посредством равенств (40) дают

$$x_{,,} = \frac{\sum mx}{\sum m}, \quad y_{,,} = \frac{\sum my}{\sum m}, \quad z_{,,} = \frac{\sum mz}{\sum m}, \tag{46}$$

где $x_{,,}$, $y_{,,}$, $z_{,,}$ являются координатами точки, называемой центром тяжести системы, можем свести функцию T к форме

$$T = T_{,} + T_{,,}, \tag{47}$$

в которой

$$T_{,} = \tfrac{1}{2} \sum m(x'^2_{,} + y'^2_{,} + z'^2_{,}) \tag{48}$$

и

$$T_{,,} = \tfrac{1}{2}(x'^2_{,,} + y'^2_{,,} + z'^2_{,,}) \sum m. \tag{49}$$

Посредством этого известного разложения полная живая сила $2T$ системы распадается на две части $2T_{,}$ и $2T_{,,}$, первая из которых $2T_{,}$ может быть названа *относительной живой силой,* так как она получается исключительно из относительных скоростей точек системы в их движениях вокруг общего центра тяжести $x_{,,}, y_{,,}, z_{,,}$, в то время как вторая часть $2T_{,,}$ получается только из абсолютного движения этого центра тяжести в пространстве и будет такой, как если бы все массы системы были объединены в этом общем центре. В то же время закон живой силы $T = U + H$ (6) с помощью закона движения центра тяжести распадается на два следующих отдельных уравнения:

$$T_{,} = U + H_{,} \tag{50}$$

и

$$T_{,,} = H_{,,}, \tag{51}$$

причем $H_{,}$ и $H_{,,}$ представляют собой две новые постоянные, независимые от времени t и притом такие, что

$$H_{,} + H_{,,} = H. \tag{52}$$

Подобным же образом мы можем разложить действие или накопленную живую силу V, которая равна определенному интегралу $\int\limits_0^t 2T dt$, на аналогичные части:

$$V = V_{,} + V_{,,}, \tag{10.1}$$

определяемые двумя уравнениями

$$V_{,} = \int\limits_0^t 2T_{,} dt \tag{10.2}$$

и

$$V_{,,} = \int\limits_0^t 2T_{,,} dt. \tag{10.3}$$

Последнее уравнение при помощи равенства (51) приводится к виду

$$V_{,,} = 2H_{,,} t, \tag{53}$$

т.е. к результату, который согласно закону движения центра тяжести может быть выражен таким образом [14]:

$$V_{,,} = \sqrt{(x_{,,} - a_{,,})^2 + (y_{,,} - b_{,,})^2 + (z_{,,} - c_{,,})^2}\sqrt{2H_{,,}\sum m}, \tag{10.4}$$

где $a_{,,}, b_{,,}, c_{,,}$ — начальные координаты центра тяжести, так что

$$a_{,,} = \frac{\sum ma}{\sum m}, \quad b_{,,} = \frac{\sum mb}{\sum m}, \quad c_{,,} = \frac{\sum mc}{\sum m}. \tag{54}$$

Для вариации δV полной функции V получим

$$\delta V=\sum m(x'_{,}\delta x_{,}-a'_{,}\delta a_{,}+y'_{,}\delta y_{,}-b'_{,}\delta b_{,}+z'_{,}\delta z_{,}-c'_{,}\delta c_{,})+$$
$$+(x'_{,,}\delta x_{,,}-a'_{,,}\delta a_{,,}+y'_{,,}\delta y_{,,}-b'_{,,}\delta b_{,,}+z'_{,,}\delta z_{,,}-c'_{,,}\delta c_{,,})\sum m+$$
$$+t\delta H+\lambda_1\sum m\delta x_{,}+\lambda_2\sum m\delta y_{,}+\lambda_3\sum m\delta z_{,}+\Lambda_1\sum m\delta a_{,}+\Lambda_2\sum m\delta b_{,}+\Lambda_3\sum m\delta c_{,}. \quad (10.5)$$

В то время как вариация части $V_{,,}$, определяемой уравнением (10.4), как легко показать, иметь вид

$$\delta V_{,,}=(x'_{,,}\delta x_{,,}-a'_{,,}\delta a_{,,}+y'_{,,}\delta y_{,,}-b'_{,,}\delta b_{,,}+z'_{,,}\delta z_{,,}-c'_{,,}\delta c_{,,})\sum m+t\delta H_{,,}, \quad (10.6)$$

вариация части $V_{,}$ может быть выражена таким образом:

$$\delta V_{,}=\sum m(x'_{,}\delta x_{,}-a'_{,}\delta a_{,}+y'_{,}\delta y_{,}-b'_{,}\delta b_{,}+z'_{,}\delta z_{,}-c'_{,}\delta c_{,})+$$
$$+t\delta H_{,}+\lambda_1\sum m\delta x_{,}+\lambda_2\sum m\delta y_{,}+\lambda_3\sum m\delta z_{,}+\Lambda_1\sum m\delta a_{,}+\Lambda_2\sum m\delta b_{,}+\Lambda_3\sum m\delta c_{,}. \quad (10.7)$$

Она распадается на следующие отдельные выражения, в которых часть $V_{,}$ рассматривается как функция $6n+1$ величин $x_{,i}, y_{,i}, z_{,i}, a_{,i}, b_{,i}, c_{,i}, H_{,}$. Однако только $6n-5$ из них действительно являются независимыми.

Таким образом, имеем первую группу:

$$\frac{\delta V_{,}}{\delta x_{,1}}=m_1x'_{,1}+\lambda_1 m_1,\ldots,\ \frac{\delta V_{,}}{\delta x_{,n}}=m_nx'_{,n}+\lambda_1 m_n,$$
$$\frac{\delta V_{,}}{\delta y_{,1}}=m_1y'_{,1}+\lambda_2 m_1,\ldots,\ \frac{\delta V_{,}}{\delta y_{,n}}=m_ny'_{,n}+\lambda_2 m_n,$$
$$\frac{\delta V_{,}}{\delta z_{,1}}=m_1z'_{,1}+\lambda_3 m_1,\ldots,\ \frac{\delta V_{,}}{\delta z_{,n}}=m_nz'_{,n}+\lambda_3 m_n, \quad (10.8)$$

и вторую группу:

$$\frac{\delta V_{,}}{\delta a_{,1}}=-m_1a'_{,1}+\Lambda_1 m_1,\ldots,\ \frac{\delta V_{,}}{\delta a_{,n}}=-m_na'_{,n}+\Lambda_1 m_n,$$
$$\frac{\delta V_{,}}{\delta b_{,1}}=-m_1b'_{,1}+\Lambda_2 m_1,\ldots,\ \frac{\delta V_{,}}{\delta b_{,n}}=-m_nb'_{,n}+\Lambda_2 m_n,$$
$$\frac{\delta V_{,}}{\delta c_{,1}}=-m_1c'_{,1}+\Lambda_3 m_1,\ldots,\ \frac{\delta V_{,}}{\delta c_{,n}}=-m_nc'_{,n}+\Lambda_3 m_n. \quad (10.9)$$

Наконец,

$$\delta V_{,} / \delta H_{,} = t. \tag{10.10}$$

Для шести множителей $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$, которые были введены тремя конечными уравнениями условий (45) и тремя аналогичными начальными уравнениями условий

$$\sum ma_{,} = 0, \quad \sum mb_{,} = 0, \quad \sum mc_{,} = 0, \tag{55}$$

мы, продифференцировав эти уравнения, получаем

$$\sum mx'_{,} = 0, \quad \sum my'_{,} = 0, \quad \sum mz'_{,} = 0. \tag{56}$$

и

$$\sum ma'_{,} = 0, \quad \sum mb'_{,} = 0, \quad \sum mc'_{,} = 0. \tag{57}$$

Следовательно,

$$\lambda_1 = \frac{\sum(\delta V_{,} / \delta x_{,})}{\sum m}, \quad \lambda_2 = \frac{\sum(\delta V_{,} / \delta y_{,})}{\sum m}, \quad \lambda_3 = \frac{\sum(\delta V_{,} / \delta z_{,})}{\sum m} \tag{58}$$

и

$$\Lambda_1 = \frac{\sum(\delta V_{,} / \delta a_{,})}{\sum m}, \quad \Lambda_2 = \frac{\sum(\delta V_{,} / \delta b_{,})}{\sum m}, \quad \Lambda_3 = \frac{\sum(\delta V_{,} / \delta c_{,})}{\sum m}. \tag{59}$$

11. В качестве примера определения этих множителей мы можем предположить, что часть $V_{,}$ полного действия V была выражена до дифференцирования как функция $H_{,}$ и следующих $6n - 6$ независимых величин:

$$x_{,1} - x_{,n} = \xi_1, \; x_{,2} - x_{,n} = \xi_2, \; \ldots, \; x_{,n-1} - x_{,n} = \xi_{n-1},$$

$$y_{,1} - y_{,n} = \eta_1, \; y_{,2} - y_{,n} = \eta_2, \; \ldots, \; y_{,n-1} - y_{,n} = \eta_{n-1},$$

$$z_{,1} - z_{,n} = \zeta_1, \; z_{,2} - z_{,n} = \zeta_2, \; \ldots, \; z_{,n-1} - z_{,n} = \zeta_{n-1} \tag{60}$$

и

$$a_{,1} - a_{,n} = \alpha_1, \; a_{,2} - a_{,n} = \alpha_2, \; \ldots, \; a_{,n-1} - a_{,n} = \alpha_{n-1},$$

$$b_{,1} - b_{,n} = \beta_1, \; b_{,2} - b_{,n} = \beta_2, \; \ldots, \; b_{,n-1} - b_{,n} = \beta_{n-1},$$

$$c_{,1} - c_{,n} = \gamma_1, \; c_{,2} - c_{,n} = \gamma_2, \; \ldots, \; c_{,n-1} - c_{,n} = \gamma_{n-1}, \tag{61}$$

т.е. разностей *центробарических* координат [15] или, другими словами, как функция координат (начальных и конечных) $n - 1$ точек системы, отнесенных к n-й точке как внутреннему или подвижному началу, так как центробарические координаты

$x_{,i}$, $y_{,i}$, $z_{,i}$, $a_{,i}$, $b_{,i}$, $c_{,i}$ посредством уравнений условий могут быть сами выражены как их функции, а именно:

$$x_{,i} = \xi_i - \frac{\sum m\xi}{\sum m}, \quad y_{,i} = \eta_i - \frac{\sum m\eta}{\sum m}, \quad z_{,i} = \zeta_i - \frac{\sum m\zeta}{\sum m}; \tag{62}$$

подобным же образом

$$a_{,i} = \alpha_i - \frac{\sum m\alpha}{\sum m}, \quad b_{,i} = \beta_i - \frac{\sum m\beta}{\sum m}, \quad c_{,i} = \gamma_i - \frac{\sum m\gamma}{\sum m}, \tag{63}$$

относительно которых надо отметить, что шесть величин ξ_n, η_n, ζ_n, α_n, β_n, γ_n должны рассматриваться как обращающиеся в нуль независимо одна от другой. Когда $V_{,}$, таким образом, выражена как функция центробарических координат, включающая только их разности, она, очевидно, будет удовлетворять шести уравнениям в частных производных [16]:

$$\sum \frac{\delta V_{,}}{\delta x_{,}} = 0, \ \sum \frac{\delta V_{,}}{\delta y_{,}} = 0, \ \sum \frac{\delta V_{,}}{\delta z_{,}} = 0, \ \sum \frac{\delta V_{,}}{\delta a_{,}} = 0, \ \sum \frac{\delta V_{,}}{\delta b_{,}} = 0, \ \sum \frac{\delta V_{,}}{\delta c_{,}} = 0; \tag{11.1}$$

поэтому путем подстановки такой функции V шесть множителей, определенных посредством (58) и (59), исчезнут, так что мы получим

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad \Lambda_1 = 0, \quad \Lambda_2 = 0, \quad \Lambda_3 = 0, \tag{64}$$

а группы (10.8) и (10.9) сведутся к двум следующим группам:

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta V_{,}}{\delta x_{,1}} = m_1 x'_{,1}, \quad \frac{\delta V_{,}}{\delta x_{,2}} = m_2 x'_{,2}, \ \ldots, \ \frac{\delta V_{,}}{\delta x_{,n}} = m_n x'_{,n}, \\
&\frac{\delta V_{,}}{\delta y_{,1}} = m_1 y'_{,1}, \quad \frac{\delta V_{,}}{\delta y_{,2}} = m_2 y'_{,2}, \ \ldots, \ \frac{\delta V_{,}}{\delta y_{,n}} = m_n y'_{,n}, \\
&\frac{\delta V_{,}}{\delta z_{,1}} = m_1 z'_{,1}, \quad \frac{\delta V_{,}}{\delta z_{,2}} = m_2 z'_{,2}, \ \ldots, \ \frac{\delta V_{,}}{\delta z_{,n}} = m_n z'_{,n}
\end{aligned} \tag{11.2}$$

и

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta V_{,}}{\delta a_{,1}} = -m_1 a'_{,1}, \quad \frac{\delta V_{,}}{\delta a_{,2}} = -m_2 a'_{,2}, \ \ldots, \ \frac{\delta V_{,}}{\delta a_{,n}} = -m_n a'_{,n}, \\
&\frac{\delta V_{,}}{\delta b_{,1}} = -m_1 b'_{,1}, \quad \frac{\delta V_{,}}{\delta b_{,2}} = -m_2 b'_{,2}, \ \ldots, \ \frac{\delta V_{,}}{\delta b_{,n}} = -m_n b'_{,n}, \\
&\frac{\delta V_{,}}{\delta c_{,1}} = -m_1 c'_{,1}, \quad \frac{\delta V_{,}}{\delta c_{,2}} = -m_2 c'_{,2}, \ \ldots, \ \frac{\delta V_{,}}{\delta c_{,n}} = -m_n c'_{,n},
\end{aligned} \tag{11.3}$$

во всех отношениях аналогичным группам (2.3) и (2.4). Следовательно, для относительного движения системы около ее собственного центра тяжести мы находим уравнения того же вида, как те, которые мы получили раньше для абсолютного движения той же системы в пространстве.

Мы видим также, что, исследуя только такое относительное движение, полезно ограничиться частью $V_,$ нашей полной характеристической функции, т.е. *относительным действием* системы или накопленной живой силы движения вокруг центра тяжести, и рассматривать эту часть как *характеристическую функцию* такого относительного движения в смысле, аналогичном тому, который был уже разъяснен ранее.

Однако это относительное действие, или часть $V_,$, может быть выражено другим способом и даже бесконечно разнообразными способами с помощью шести уравнений условий, которые связывают $6n$ центробарических координат; каждая другая его форма дает другую группу значений для шести множителей λ_1, λ_2, λ_3, Λ_1, Λ_2, Λ_3.

Например, мы можем при помощи предыдущего способа исключить из выражения $V_,$ шесть центробарических координат точки m_n, с тем чтобы это выражение включало только центробарические координаты других $n-1$ точек системы, и тогда мы будем иметь

$$\frac{\delta V_,}{\delta x_{,n}} = 0, \quad \frac{\delta V_,}{\delta y_{,n}} = 0, \quad \frac{\delta V_,}{\delta z_{,n}} = 0, \quad \frac{\delta V_,}{\delta a_{,n}} = 0, \quad \frac{\delta V_,}{\delta b_{,n}} = 0, \quad \frac{\delta V_,}{\delta c_{,n}} = 0, \tag{11.4}$$

после чего посредством шести последних уравнений групп (10.8) и (10.9) эти множители примут значения

$$\lambda_1 = -x'_{,n}, \quad \lambda_2 = -y'_{,n}, \quad \lambda_3 = -z'_{,n}, \quad \Lambda_1 = a'_{,n}, \quad \Lambda_2 = b'_{,n}, \quad \Lambda_3 = c'_{,n} \tag{65}$$

и посредством равенств (60) и (61) предыдущие $6n-6$ уравнений тех же групп (10.8) и (10.9) сведутся к виду:

$$\frac{\delta V_,}{\delta x_{,1}} = m_1\xi'_1, \quad \frac{\delta V_,}{\delta x_{,2}} = m_2\xi'_2, \quad \ldots, \quad \frac{\delta V_,}{\delta x_{,n-1}} = m_{n-1}\xi'_{n-1},$$

$$\frac{\delta V_,}{\delta y_{,1}} = m_1\eta'_1, \quad \frac{\delta V_,}{\delta y_{,2}} = m_2\eta'_2, \quad \ldots, \quad \frac{\delta V_,}{\delta y_{,n-1}} = m_{n-1}\eta'_{n-1},$$

$$\frac{\delta V_,}{\delta z_{,1}} = m_1\zeta'_1, \quad \frac{\delta V_,}{\delta z_{,2}} = m_2\zeta'_2, \quad \ldots, \quad \frac{\delta V_,}{\delta z_{,n-1}} = m_{n-1}\zeta'_{n-1} \tag{11.5}$$

и

$$\frac{\delta V_{,}}{\delta a_{,1}} = -m_1\alpha'_1, \quad \frac{\delta V_{,}}{\delta a_{,2}} = -m_2\alpha'_2, \ \ldots, \ \frac{\delta V_{,}}{\delta a_{,n-1}} = -m_{n-1}\alpha'_{n-1},$$

$$\frac{\delta V_{,}}{\delta b_{,1}} = -m_1\beta'_1, \quad \frac{\delta V_{,}}{\delta b_{,2}} = -m_2\beta'_2, \ \ldots, \ \frac{\delta V_{,}}{\delta b_{,n-1}} = -m_{n-1}\beta'_{n-1},$$

$$\frac{\delta V_{,}}{\delta c_{,1}} = -m_1\gamma'_1, \quad \frac{\delta V_{,}}{\delta c_{,2}} = -m_2\gamma'_2, \ \ldots, \ \frac{\delta V_{,}}{\delta c_{,n-1}} = -m_{n-1}\gamma'_{n-1}. \qquad (11.6)$$

12. Мы можем также выразить относительное действие $V_{,}$ как функцию не центробарических, но каких-то других внутренних координат или отметок относительного положения. Мы можем, например, выразить $V_{,}$ и ее вариацию как функции уже упомянутых $6n - 6$ независимых внутренних координат ξ, η, ζ, α, β, γ и их вариаций, определяя их, совершенно безотносительно к центру тяжести, уравнениями

$$\xi_i = x_i - x_n, \quad \eta_i = y_i - y_n, \quad \zeta_i = z_i - z_n,$$
$$\alpha_i = a_i - a_n, \quad \beta_i = b_i - b_n, \quad \gamma_i = c_i - c_n. \qquad (66)$$

Для всех таких преобразований $\delta V_{,}$ легко установить правило, или закон, который можно назвать *законом относительного переменного действия* (в точности аналогично правилу (9.2)), а именно

$$\delta V_{,} = \sum \left(\frac{\delta T_{,}}{\delta \eta'_{,}}\right)\delta\eta_{,} - \sum \left(\frac{\delta T_{,0}}{\delta e'_{,}}\right)\delta e_{,} + t\delta H_{,} + \sum \lambda_{,} \delta\varphi_{,} + \sum \Lambda_{,} \delta\Phi_{,} . \qquad (12.1)$$

Это означает, что мы выразим половину $T_{,}$ относительной живой силы системы как функцию скоростей η' любых отметок относительного положения и затем, взяв вариацию T относительно η', заменим эти вариации вариациями самих отметок положения; вычтем начальное значение результата из конечного и сложим вариации конечной и начальной функций $\varphi_{,}$ и $\Phi_{,}$, которые входят в уравнения условий $\varphi_{,} = 0$, $\Phi_{,} = 0$ (соединяющие конечные и начальные отметки относительного положения), соответственно помноженные на неопределенные множители λ, Λ; наконец, приравняем полный результат величине $\delta V_{,} - t\delta H_{,}$, где $H_{,}$ является независимой от времени величиной в уравнении (50) относительной живой силы, а $V_{,}$ является относительным действием, вариацию которого мы хотим найти. Нет необходимости останавливаться здесь на демонстрации этого нового правила (12.1),

которое легко можно вывести либо на основе уже изложенных принципов, либо, исходя из закона живой силы, при помощи вариационного исчисления в сочетании с дифференциальными уравнениями второго порядка относительного движения.

Для того чтобы представить пример его применения, вернемся к уже упоминавшейся задаче, заключающейся в том, чтобы изобразить $\delta V_,$ посредством $6n-5$ независимых вариаций $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$, $\delta\zeta_i$, $\delta\alpha_i$, $\delta\beta_i$, $\delta\gamma_i$, $\delta H_,$. Для этой цели мы используем известную преобразованную форму живой силы $2T_,$, помноженную на сумму масс системы, а именно

$$2T_,\sum m=\sum m_i m_k\{(x_i'-x_k')^2-(y_i'-y_k')^2+(z_i'-z_k')^2\}, \tag{67}$$

причем знак суммирования Σ в правой части распространяется на все попарные сочетания точек, которые могут быть образованы без повторения. Это преобразование посредством (66) дает

$$2T_,\sum m=m_n\sum{}_,m(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)+\sum{}_,m_i m_k\{(\xi_i'-\xi_k')^2+(\eta_i'-\eta_k')^2+(\zeta_i'-\zeta_k')^2\}, \tag{68}$$

где знак суммирования $\Sigma_,$ распространяется только на первые $n-1$ точек системы.

Применяя, следовательно, наше общее правило, или закон переменного относительного действия, и следя за тем, чтобы $6n-6$ внутренних координат ξ, η, ζ, α, β, γ были независимы, мы найдем следующее новое выражение:

$$\begin{aligned}\delta V_,&=t\delta H_,+\frac{m_n}{\sum m}\sum{}_,m(\xi'\delta\xi-\alpha'\delta\alpha+\eta'\delta\eta-\beta'\delta\beta+\zeta'\delta\zeta-\gamma'\delta\gamma)+\\&+\frac{1}{\sum m}\sum{}_,m_i m_k\{(\xi_i'-\xi_k')(\delta\xi_i-\delta\xi_k)+(\eta_i'-\eta_k')(\delta\eta_i-\delta\eta_k)+\\&+(\zeta_i'-\zeta_k')(\delta\zeta_i-\delta\zeta_k)\}-\frac{1}{\sum m}\sum{}_,\{m_i m_k(\alpha_i'-\alpha_k')(\delta\alpha_i-\delta\alpha_k)+\\&+(\beta_i'-\beta_k')(\delta\beta_i-\delta\beta_k)+(\gamma_i'-\gamma_k')(\delta\gamma_i-\delta\gamma_k)\},\end{aligned} \tag{12.2}$$

которое помимо уравнения (10.10), даст следующие группы:

$$\begin{aligned}\frac{\delta V_,}{\delta\xi_i}&=\frac{m_i}{\sum m}\sum m(\xi_i'-\xi')=m_i\left(\xi_i'-\frac{\sum{}_,m\xi'}{\sum m}\right),\\\frac{\delta V_,}{\delta\eta_i}&=\frac{m_i}{\sum m}\sum m(\eta_i'-\eta')=m_i\left(\eta_i'-\frac{\sum{}_,m\eta'}{\sum m}\right),\\\frac{\delta V_,}{\delta\zeta_i}&=\frac{m_i}{\sum m}\sum m(\zeta_i'-\zeta')=m_i\left(\zeta_i'-\frac{\sum{}_,m\zeta'}{\sum m}\right)\end{aligned} \tag{12.3}$$

и

$$\frac{\delta V_,}{\delta \alpha_i} = -\frac{m_i}{\sum m}\sum m(\alpha'_i - \alpha') = -m_i\left(\alpha'_i - \frac{\sum_, m\alpha'}{\sum m}\right),$$

$$\frac{\delta V_,}{\delta \beta_i} = -\frac{m_i}{\sum m}\sum m(\beta'_i - \beta') = -m_i\left(\beta'_i - \frac{\sum_, m\beta'}{\sum m}\right),$$

$$\frac{\delta V_,}{\delta \gamma_i} = -\frac{m_i}{\sum m}\sum m(\gamma'_i - \gamma') = -m_i\left(\gamma'_i - \frac{\sum_, m\gamma'}{\sum m}\right). \tag{12.4}$$

Эти результаты могут быть суммируемы следующим образом:

$$\delta V_, = t\delta H_, + \sum_, m(\xi'\delta\xi - \alpha'\delta\alpha + \eta'\delta\eta - \beta'\delta\beta + \zeta'\delta\zeta - \gamma'\delta\gamma) -$$

$$-\frac{1}{\sum m}(\sum_, m\xi'\sum_, m\delta\xi + \sum_, m\eta'\sum_, m\delta\eta + \sum_, m\zeta'\sum_, m\delta\zeta) +$$

$$+\frac{1}{\sum m}(\sum_, m\alpha'\sum_, m\delta\alpha + \sum_, m\beta'\sum_, m\delta\beta + \sum_, m\gamma'\sum_, m\delta\gamma); \tag{12.5}$$

они могли бы быть выведены из нашего правила иным способом при помощи другого известного преобразования

$$T_, = \frac{1}{2}\sum_, m(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) - \frac{(\sum_, m\xi')^2 + (\sum_, m\eta')^2 + (\sum_, m\zeta')^2}{2\sum m}. \tag{69}$$

Для того же чтобы получить для любой группы внутренних или относительных отметок положения два уравнения в частных производных, которым должна удовлетворять характеристическая функция $V_,$ относительного движения и которые

представляют (как мы убедимся далее) главный способ раскрытия ее формы, а именно – уравнения, аналогичные тем, которые обозначены (4.1) и (4.2), нам только нужно исключить приращения отметок положения системы, которые определяют конечные и начальные компоненты относительных скоростей ее точек согласно закону переменного относительного действия, исходя из конечных и начальных выражений закона относительной живой силы, а именно из уравнения (50)

$$T_, = U + H_,$$

и уравнения

$$T_{,0} = U_0 + H_,. \tag{70}$$

Закон площадей (или свойство, относящееся к вращению, которое было выражено уравнениями в частных производных (6.2)) также всегда может быть выражен в относительных координатах; он поможет нам раскрыть форму харак-

теристической функции $V_{,}$, показав, что эта функция включает только внутренние координаты (числом $6n-9$), которые не меняются при любом общем выражении всех конечных и начальных точек вокруг центра тяжести или вокруг любого другого внутреннего начала, при условии, что при определении эффектов такого вращения это начало рассматривается как неподвижное, а величина $H_{,}$ как постоянная. Таким образом, общая задача динамики, касающаяся движений свободной системы n точек, притягивающих или отталкивающих друг друга, сводится в конце концов при использовании метода, изложенного в данной работе, к отысканию и дифференцированию функции $V_{,}$, зависящей от $6n-9$ внутренних или относительных координат [17] и от величины $H_{,}$, и удовлетворяющей двум уравнениям в частных производных первого порядка и второй степени. При интегрировании этих уравнений мы должны проследить за тем, чтобы в принятом начале движения, а именно в момент, когда $t=0$, конечные или переменные координаты были равны их начальным значениям, причем частная производная $\delta V'/\delta H$ обращается в нуль. При этом в момент времени, отстоящий на бесконечно малую величину от начального, дифференциальные изменения координат имеют коэффициенты, связанные посредством закона переменного относительного действия с другими частными производными характеристической функции $V_{,}$. Здесь можно отметить, что хотя рассмотрение точки, обычно называемой центром тяжести, весьма просто подсказывается процессом, описанным в п. 10, тем не менее этот внутренний центр еще проще определяется нашими более ранними выводами из закона переменного действия. Эти выводы показывают, что компоненты относительных конечных скоростей в любой системе притягивающихся или отталкивающихся точек могут быть выражены при помощи разностей величин вида

$$\frac{1}{m}\,\frac{\delta V}{\delta x},\quad \frac{1}{m}\,\frac{\delta V}{\delta y},\quad \frac{1}{m}\,\frac{\delta V}{\delta z}.$$

Следовательно, при вычислении этих относительных скоростей выгодно ввести в выражение характеристической функции $V_{,}$ среди отметок крайних положений системы конечные суммы Σmx, Σmy, Σmz и аналогично также начальные суммы Σma, Σmb, Σmc, так как при дифференцировании этого выражения для вычисления относительных скоростей эти суммы могут рассматриваться как постоянные.

О системах из двух точек в общем; характеристическая функция движения любой бинарной системы

13. Для иллюстрации изложенных выше принципов, которые распространяются на любую свободную систему точек, притягивающих или отталкивающих друг друга, каково бы ни было их число, рассмотрим, в частности, систему двух таких точек. Для такой системы известная *силовая функция* U посредством (2) принимает

вид

$$U = m_1 m_2 f(r), \tag{71}$$

где

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \tag{72}$$

представляет собой расстояние между двумя точками m_1, m_2, а $f(r)$ – функцию этого расстояния, так что ее производная или дифференциальный коэффициент $f'(r)$ выражает закон отталкивания или притяжения точек в зависимости от того, является ли она положительной или отрицательной. Теперь известные дифференциальные уравнения движения второго порядка выражаются на основании равенства (1) следующей формулой:

$$m_1(x_1''\delta x_1 + y_1''\delta y_1 + z_1''\delta z_1) + m_2(x_2''\delta x_2 + y_2''\delta y_2 + z_2''\delta z_2) = m_1 m_2 \delta f(r), \tag{73}$$

следовательно, отдельно они будут

$$x_1'' = m_2 \frac{\delta f(r)}{\delta x_1}, \quad y_1'' = m_2 \frac{\delta f(r)}{\delta y_1}, \quad z_1'' = m_2 \frac{\delta f(r)}{\delta z_1},$$

$$x_2'' = m_1 \frac{\delta f(r)}{\delta x_2}, \quad y_2'' = m_1 \frac{\delta f(r)}{\delta y_2}, \quad z_2'' = m_1 \frac{\delta f(r)}{\delta z_2}. \tag{74}$$

Задача интегрирования этих уравнений состоит в том, чтобы попытаться найти с их помощью шесть отношений между временем t, массами m_1, m_2, шестью переменными координатами $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ и их начальными значениями и начальными скоростями $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_1', b_1', c_1', a_2', b_2', c_2'$. Если бы мы знали эти шесть конечных интегралов и сочетали их с начальной формой закона живой силы или известного промежуточного интеграла

$$\tfrac{1}{2} m_1(x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2) + \tfrac{1}{2} m_2(x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2) = m_1 m_2 f(r) + H, \tag{75}$$

т.е. с выражением

$$\tfrac{1}{2} m_1(a_1'^2 + b_1'^2 + c_1'^2) + \tfrac{1}{2} m_2(a_2'^2 + b_2'^2 + c_2'^2) = m_1 m_2 f(r_0) + H, \tag{76}$$

в котором r_0 представляет собой начальное расстояние

$$r_0 = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2}, \tag{77}$$

а H – постоянную величину, введенную при интегрировании, то мы могли бы путем комбинирования этих семи отношений определить время t и шесть начальных компонент скорости $a_1', b_1', c_1', a_2', b_2', c_2'$ как функции двенадцати конечных и начальных координат $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ и величины H (включающей также массы). Следовательно, мы могли бы определить все, что зависит от способа и времени движения этой системы, как функцию тех же самых граничных координат и той же величины H. В частности, мы могли бы определить

действие или накопленную живую силу системы, т.е.

$$V = m_1\int_0^t (x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2)dt + m_2\int_0^t (x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2)dt, \qquad (13.1)$$

как функцию этих тринадцати величин $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$, H и вычислить вариацию этой функции

$$\delta V = \frac{\delta V}{\delta x_1}\delta x_1 + \frac{\delta V}{\delta y_1}\delta y_1 + \frac{\delta V}{\delta z_1}\delta z_1 + \frac{\delta V,}{\delta x_2}\delta x_2 + \frac{\delta V,}{\delta y_2}\delta y_2 + \frac{\delta V,}{\delta z_2}\delta z_2 +$$

$$+\frac{\delta V,}{\delta a_1}\delta a_1 + \frac{\delta V,}{\delta b_1}\delta b_1 + \frac{\delta V,}{\delta c_1}\delta c_1 + \frac{\delta V,}{\delta a_2}\delta a_2 + \frac{\delta V,}{\delta b_2}\delta b_2 + \frac{\delta V,}{\delta c_2}\delta c_2 + \frac{\delta V,}{\delta H}\delta H. \qquad (13.2)$$

Однако сущность нашего метода состоит в том, чтобы *предварительно вывести выражение этой вариации при помощи нашего закона переменного действия*, а именно

$$\delta V = m_1(x_1'\delta x_1 - a_1'\delta a_1 + y_1'\delta y_1 - b_1'\delta b_1 + z_1'\delta z_1 - c_1'\delta c_1) +$$

$$+m_2(x_2'\delta x_2 - a_2'\delta a_2 + y_2'\delta y_2 - b_2'\delta b_2 + z_2'\delta z_2 - c_2'\delta c_2) + t\delta H, \qquad (13.3)$$

и в том, чтобы *рассматривать V как характеристическую функцию движения*, из формы которой можно вывести все промежуточные и все конечные интегралы известных дифференциальных уравнений, разложив выражения (2.3) на следующие отдельные группы (включенные в(2.3) и (2.4)):

$$\frac{\delta V}{\delta x_1} = m_1 x_1', \quad \frac{\delta V}{\delta y_1} = m_1 y_1', \quad \frac{\delta V}{\delta z_1} = m_1 z_1',$$

$$\frac{\delta V}{\delta x_2} = m_2 x_2', \quad \frac{\delta V}{\delta y_2} = m_2 y_2', \quad \frac{\delta V}{\delta z_2} = m_2 z_2' \qquad (13.4)$$

и

$$\frac{\delta V}{\delta a_1} = -m_1 a_1', \quad \frac{\delta V}{\delta b_1} = -m_1 b_1', \quad \frac{\delta V}{\delta c_1} = -m_1 c_1',$$

$$\frac{\delta V}{\delta a_2} = -m_2 a_2', \quad \frac{\delta V}{\delta b_2} = -m_2 b_2', \quad \frac{\delta V}{\delta c_2} = -m_2 c_2' \qquad (13.5)$$

и на следующее, уже встречавшееся ранее, уравнение: $\delta V/\delta H = t$.

В этом новом методе трудность интегрирования шести известных уравнений движения второго порядка (74) сводится к отысканию и дифференцированию единственной функции V; для того чтобы найти форму этой функции, мы должны применить следующие два уравнения в частных производных первого порядка:

$$\frac{1}{2m_1}\left\{\left(\frac{\delta V}{\delta x_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta y_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta z_1}\right)^2\right\} + \frac{1}{2m_2}\left\{\left(\frac{\delta V}{\delta x_2}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta y_2}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta z_2}\right)^2\right\} = m_1 m_2 f(r) + H,$$

(13.6)

$$\frac{1}{2m_1}\left\{\left(\frac{\delta V}{\delta a_1}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta b_1}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta c_1}\right)^2\right\}+\frac{1}{2m_2}\left\{\left(\frac{\delta V}{\delta a_2}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta b_2}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta c_2}\right)^2\right\}=m_1m_2f(r_0)+H \tag{13.7}$$

совместно с некоторыми простыми соображениями. Из изложенных выше принципов легко вытекает, что интеграл этих двух уравнений в данном случае имеет вид

$$V=\sqrt{(x_{,,}-a_{,,})^2+(y_{,,}-b_{,,})^2+(z_{,,}-c_{,,})^2}\sqrt{2H_{,,}(m_1-m_2)}+$$
$$+\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(h\vartheta+\int_{r_0}^{r}\rho dr\right), \tag{13.8}$$

в котором $x_{,,}$, $y_{,,}$, $z_{,,}$, $a_{,,}$, $b_{,,}$, $c_{,,}$ обозначают конечные и начальные координаты центра тяжести системы:

$$x_{,,}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2},\quad y_{,,}=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2},\quad z_{,,}=\frac{m_1z_1+m_2z_2}{m_1+m_2},$$
$$a_{,,}=\frac{m_1a_1+m_2a_2}{m_1+m_2},\quad b_{,,}=\frac{m_1b_1+m_2b_2}{m_1+m_2},\quad c_{,,}=\frac{m_1c_1+m_2c_2}{m_1+m_2}, \tag{78}$$

а ϑ – угол между конечными и начальными расстояниями r, r_0. Мы также написали для краткости

$$\rho=\pm\left\{2(m_1+m_2)\left(f(r)+\frac{H_{,}}{m_1m_2}\right)-\frac{h^2}{r^2}\right\}^{1/2}, \tag{79}$$

где применение верхнего или нижнего знака зависит от того, увеличивается или уменьшается расстояние r; мы ввели три вспомогательных величины h, $H_{,}$, $H_{,,}$, определяемые условием

$$\vartheta+\int_{r_0}^{r}\frac{\delta\rho}{\delta h}dr=0, \tag{13.9}$$

в сочетании с двумя следующими:

$$\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\int_{r_0}^{r}\frac{\delta\rho}{\delta H_{,}}dr=\sqrt{(x_{,,}-a_{,,})^2+(y_{,,}-b_{,,})^2+(z_{,,}-c_{,,})^2}\left(\frac{m_1+m_2}{2H_{,,}}\right)^{1/2},$$
$$H_{,}+H_{,,}=H. \tag{13.10}$$

Эти вспомогательные величины, хотя и являются функциями двенадцати крайних координат, все же могут рассматриваться как постоянные при вычислении

трех определенных интегралов или пределов сумм многих малых элементов

$$\int_{r_0}^{r} \rho dr, \quad \int_{r_0}^{r} \frac{\delta\rho}{\delta h} dr, \quad \int_{r_0}^{r} \frac{\delta\rho}{\delta H_,} dr.$$

Форма (13.8) для *характеристической функции бинарной системы* может рассматриваться как главное или радикальное соотношение, которое включает всю теорию движения такой системы и все детали этого движения могут быть выведены из него при помощи нашего метода. Однако, ввиду того что теория бинарных систем трудами более ранних авторов доведена до большого совершенства, нам достаточно будет здесь дать вкратце несколько примеров такого вывода.

14. Форма (13.8) характеристической функции бинарной системы определенно включает случай, когда ρ заменяется своим выражением (79), зависящим от двенадцати величин $x_{,,}$, $y_{,,}$, $z_{,,}$, $a_{,,}$, $b_{,,}$, $c_{,,}$, r, r_0, ϑ, h, $H_,$, $H_{,,}$ (кроме масс m_1, m_2, которые всегда считаются данными); поэтому ее вариация может быть выражена следующим образом:

$$\delta V = \frac{\delta V}{\delta x_{,,}}\delta x_{,,} + \frac{\delta V}{\delta y_{,,}}\delta y_{,,} + \frac{\delta V}{\delta z_{,,}}\delta z_{,,} + \frac{\delta V}{\delta a_{,,}}\delta a_{,,} + \frac{\delta V}{\delta b_{,,}}\delta b_{,,} + \frac{\delta V}{\delta c_{,,}}\delta c_{,,} +$$

$$+ \frac{\delta V}{\delta r}\delta r + \frac{\delta V}{\delta r_0}\delta r_0 + \frac{\delta V}{\delta \vartheta}\delta\vartheta + \frac{\delta V}{\delta h}\delta h + \frac{\delta V}{\delta H_,}\delta H_, + \frac{\delta V}{\delta H_{,,}}\delta H_{,,}. \tag{14.1}$$

Если в этом выражении положить для краткости

$$\lambda = \left\{ \frac{2H_{,,}(m_1 + m_2)}{(x_{,,} - a_{,,})^2 + (y_{,,} - b_{,,})^2 + (z_{,,} - c_{,,})^2} \right\}^{1/2}, \tag{80}$$

то мы получим

$$\frac{\delta V}{\delta x_{,,}} = \lambda(x_{,,} - a_{,,}), \quad \frac{\delta V}{\delta y_{,,}} = \lambda(y_{,,} - b_{,,}), \quad \frac{\delta V}{\delta z_{,,}} = \lambda(z_{,,} - c_{,,}),$$

$$\frac{\delta V}{\delta a_{,,}} = \lambda(a_{,,} - x_{,,}), \quad \frac{\delta V}{\delta b_{,,}} = \lambda(b_{,,} - y_{,,}), \quad \frac{\delta V}{\delta c_{,,}} = \lambda(c_{,,} - z_{,,}), \tag{14.2}$$

а если положить

$$\rho_0 = \pm\left\{ 2(m_1 + m_2)\left(f(r_0) + \frac{H_,}{m_1 m_2} \right) - \frac{h^2}{r_0^2} \right\}^{1/2}, \tag{81}$$

то, так как знак радикала определяется тем же правилом, что и в случае ρ, мы получим

$$\frac{\delta V}{\delta r} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\rho, \quad \frac{\delta V}{\delta r_0} = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\rho_0, \quad \frac{\delta V}{\delta \vartheta} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}h. \tag{14.3}$$

Кроме того, согласно уравнениям условий (13.9), (13.10) мы имеем

$$\delta V/\delta h = 0 \tag{14.4}$$

$$\frac{\delta V}{\delta H_{,,}} = \frac{\delta V}{\delta H_{,}} = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\rho}, \qquad \delta H_{,} + \delta H_{,,} = \delta H. \tag{14.5}$$

Поэтому выражение (14.1) может быть преобразовано следующим образом:

$$\delta V = \lambda\{(x_{,,} - a_{,,})(\delta x_{,,} - \delta a_{,,}) + (y_{,,} - b_{,,})(\delta y_{,,} - \delta b_{,,}) + (z_{,,} - c_{,,})(\delta z_{,,} - \delta c_{,,})\} +$$
$$+ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\rho\delta r - \rho_0 \delta r_0 + h\delta\vartheta) + \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\rho}\delta H \tag{14.6}$$

и при помощи нашего общего метода может быть разложено на двенадцать отдельных выражений для конечных и начальных компонент скоростей, а именно:

$$x_1' = \frac{1}{m_1}\frac{\delta V}{\delta x_1} = \frac{\lambda}{m_1 + m_2}(x_{,,} - a_{,,}) + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\rho\frac{\delta r}{\delta x_1} + h\frac{\delta\vartheta}{\delta x_1}\right),$$

$$y_1' = \frac{1}{m_1}\frac{\delta V}{\delta y_1} = \frac{\lambda}{m_1 + m_2}(y_{,,} - b_{,,}) + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\rho\frac{\delta r}{\delta y_1} + h\frac{\delta\vartheta}{\delta y_1}\right),$$

$$z_1' = \frac{1}{m_1}\frac{\delta V}{\delta z_1} = \frac{\lambda}{m_1 + m_2}(z_{,,} - c_{,,}) + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\rho\frac{\delta r}{\delta z_1} + h\frac{\delta\vartheta}{\delta z_1}\right),$$

$$x_2' = \frac{1}{m_2}\frac{\delta V}{\delta x_2} = \frac{\lambda}{m_1 + m_2}(x_{,,} - a_{,,}) + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\rho\frac{\delta r}{\delta x_2} + h\frac{\delta\vartheta}{\delta x_2}\right),$$

$$y_2' = \frac{1}{m_2}\frac{\delta V}{\delta y_2} = \frac{\lambda}{m_1 + m_2}(y_{,,} - b_{,,}) + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\rho\frac{\delta r}{\delta y_2} + h\frac{\delta\vartheta}{\delta y_2}\right),$$

$$z_2' = \frac{1}{m_2}\frac{\delta V}{\delta z_2} = \frac{\lambda}{m_1 + m_2}(z_{,,} - c_{,,}) + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\rho\frac{\delta r}{\delta z_2} + h\frac{\delta\vartheta}{\delta z_2}\right) \tag{14.7}$$

и

$$a_1' = -\frac{1}{m_1}\frac{\delta V}{\delta a_1} = \frac{\lambda}{m_1 + m_2}(x_{,,} - a_{,,}) + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\rho_0\frac{\delta r_0}{\delta a_1} - h\frac{\delta\vartheta}{\delta a_1}\right),$$

$$b_1' = -\frac{1}{m_1}\frac{\delta V}{\delta b_1} = \frac{\lambda}{m_1 + m_2}(y_{,,} - b_{,,}) + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\rho_0\frac{\delta r_0}{\delta b_1} - h\frac{\delta\vartheta}{\delta b_1}\right),$$

$$c_1' = -\frac{1}{m_1}\frac{\delta V}{\delta c_1} = \frac{\lambda}{m_1 + m_2}(z_{,,} - c_{,,}) + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\rho_0\frac{\delta r_0}{\delta c_1} - h\frac{\delta\vartheta}{\delta c_1}\right),$$

$$a_2' = -\frac{1}{m_2}\frac{\delta V}{\delta a_2} = \frac{\lambda}{m_1 + m_2}(x_{,,} - a_{,,}) + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\rho_0\frac{\delta r_0}{\delta a_2} - h\frac{\delta\vartheta}{\delta a_2}\right),$$

$$b_2' = -\frac{1}{m_2}\frac{\delta V}{\delta b_2} = \frac{\lambda}{m_1+m_2}(y_{,,} - b_{,,}) + \frac{m_1}{m_1+m_2}\left(\rho_0\frac{\delta r_0}{\delta b_2} - h\frac{\delta \vartheta}{\delta b_2}\right),$$

$$c_2' = -\frac{1}{m_2}\frac{\delta V}{\delta c_2} = \frac{\lambda}{m_1+m_2}(z_{,,} - c_{,,}) + \frac{m_1}{m_1+m_2}\left(\rho_0\frac{\delta r_0}{\delta c_2} - h\frac{\delta \vartheta}{\delta c_2}\right) \qquad (14.8)$$

и на следующее выражение для времени движения системы:

$$t = \frac{\delta V}{\delta H} = \int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\rho}, \qquad (14.9)$$

которое при помощи равенств (13.10), (79) и (80) может быть выражено в виде

$$t = (m_1 + m_2)/\lambda. \qquad (14.10)$$

Шесть уравнений (14.7) дают шесть промежуточных интегралов, а шесть уравнений (14.8) дают шесть конечных интегралов шести известных дифференциальных уравнений движения для любой бинарной системы, если мы исключим или определим три вспомогательные величины h, $H_{,}$, $H_{,,}$ при помощи трех условий (13.9), (14.9), (14.10). Таким образом, если мы заметим, что расстояния r, r_0 и заключенный между ними угол ϑ зависят только от относительных координат, которые могут быть обозначены

$$x_1 - x_2 = \xi, \quad y_1 - y_2 = \eta, \quad z_1 - z_2 = \zeta, \quad a_1 - a_2 = \alpha, \quad b_1 - b_2 = \beta, \quad c_1 - c_2 = \gamma, \qquad (82)$$

то, выполнив простые вычисления, мы получим три промежуточных интеграла для центра тяжести системы

$$x_{,,}'t = x_{,,} - a_{,,}, \quad y_{,,}'t = y_{,,} - b_{,,}, \quad z_{,,}'t = z_{,,} - c_{,,} \qquad (83)$$

и три конечных интеграла

$$a_{,,}'t = x_{,,} - a_{,,}, \quad b_{,,}'t = y_{,,} - b_{,,}, \quad c_{,,}'t = z_{,,} - c_{,,}, \qquad (84)$$

выражающих хорошо известный закон прямолинейного и равномерного движения этого центра. Мы получаем также три промежуточных интеграла для относительного движения одной точки системы вокруг другой

$$\xi' = \rho\frac{\delta r}{\delta \xi} + h\frac{\delta\vartheta}{\delta\xi}, \quad \eta' = \rho\frac{\delta r}{\delta \eta} + h\frac{\delta\vartheta}{\delta\eta}, \quad \zeta' = \rho\frac{\delta r}{\delta \zeta} + h\frac{\delta\vartheta}{\delta\zeta} \qquad (85)$$

и три конечных интеграла

$$\alpha' = \rho_0\frac{\delta r_0}{\delta\alpha} - h\frac{\delta\vartheta}{\delta\alpha}, \quad \beta' = \rho_0\frac{\delta r_0}{\delta\beta} - h\frac{\delta\vartheta}{\delta\beta}, \quad \gamma' = \rho_0\frac{\delta r_0}{\delta\gamma} - h\frac{\delta\vartheta}{\delta\gamma}, \qquad (86)$$

в которых вспомогательные величины h, $H_{,}$ определяются посредством равенств (13.9), (14.9) и в которых зависимость величин r, r_0, ϑ от ξ, η, ζ, α, β, γ выражается

уравнениями

$$r=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\qquad r_0=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2},\qquad rr_0\cos\vartheta=\xi\alpha+\eta\beta+\zeta\gamma. \tag{87}$$

Теперь, если мы для краткости напишем

$$A=\frac{\rho}{r}+\frac{h}{r^2\operatorname{tg}\vartheta},\qquad B=\frac{h}{rr_0\sin\vartheta},\qquad C=\frac{-\rho}{r_0}+\frac{h}{r_0^2\operatorname{tg}\vartheta}, \tag{88}$$

то получим три промежуточных интеграла

$$\xi'=A\xi-B\alpha,\qquad \eta'=A\eta-B\beta,\qquad \zeta'=A\zeta-B\gamma \tag{89}$$

и три конечных интеграла

$$\alpha'=B\xi-C\alpha,\qquad \beta'=B\eta-C\beta,\qquad \gamma'=B\zeta-C\gamma \tag{90}$$

уравнений относительного движения. Эти интегралы дают

$$\begin{gathered}\xi\eta'-\eta\xi'=\alpha\beta'-\beta\alpha'=B(\alpha\eta-\beta\xi),\\ \eta\zeta'-\zeta\eta'=\beta\gamma'-\gamma\beta'=B(\beta\zeta-\gamma\eta),\\ \zeta\xi'-\xi\zeta'=\gamma\alpha'-\alpha\gamma'=B(\gamma\xi-\alpha\zeta)\end{gathered} \tag{91}$$

и

$$\zeta(\alpha\beta'-\beta\alpha')+\xi(\beta\gamma'-\gamma\beta')+\eta(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')=0; \tag{92}$$

они содержат, следовательно, известный закон равных площадей и закон плоскости относительной орбиты. Если ради упрощения мы возьмем эту плоскость вместо плоскости $\xi\eta$, то величины ζ, ζ', γ, γ' исчезнут и мы сможем написать

$$\xi=r\cos\theta,\qquad \eta=r\sin\theta,\qquad \zeta=0,\qquad \alpha=r_0\cos\theta_0,\qquad \beta=r_0\sin\theta_0,\qquad \gamma=0 \tag{93}$$

и

$$\begin{gathered}\xi'=r'\cos\theta-\theta'r\sin\theta,\qquad \eta'=r'\sin\theta-\theta'r\cos\theta,\qquad \zeta'=0,\\ \alpha'=r_0'\cos\theta_0-\theta_0'r_0\sin\theta_0,\qquad \beta'=r_0'\sin\theta_0-\theta_0'r_0\cos\theta_0,\qquad \gamma'=0.\end{gathered} \tag{94}$$

При этом углы θ, θ_0 отсчитываются от какой-либо неподвижной линии в плоскости, причем они таковы, что их разность

$$\theta-\theta_0=\vartheta. \tag{95}$$

Эти значения дают

$$\xi\eta'-\eta\xi'=r^2\theta',\qquad \alpha\beta'-\beta\alpha'=r_0^2\theta_0',\qquad \alpha\eta-\beta\xi=rr_0\sin\vartheta, \tag{96}$$

и, следовательно, при помощи равенств (88) и (91) получаем

$$r^2\theta'=r_0^2\theta_0'=h. \tag{97}$$

Отсюда величина $\frac{1}{2}h$ представляет собой постоянную секториальную скорость в относительном движении системы, причем, как легко заметить, этот результат не зависит от направлений трех осей прямоугольных координат. Величины (93), (94)

дают также

$$\xi\cos\theta+\eta\sin\theta=r,\quad \xi'\cos\theta+\eta'\sin\theta=r',\quad \alpha\cos\theta+\beta\sin\theta=r_0\cos\vartheta,$$
$$\alpha\cos\theta_0+\beta\sin\theta_0=r_0,\quad \alpha'\cos\theta_0+\beta'\sin\theta_0=r_0',\quad \xi\cos\theta_0+\eta\sin\theta_0=r\cos\vartheta, \tag{98}$$

и, следовательно, посредством промежуточных и конечных интегралов (89), (90) получим

$$r'=\rho,\quad r_0'=\rho_0. \tag{99}$$

Эти результаты, очевидно, согласуются с условием (14.9) и посредством равенств (79) и (81) дают для всех направлений координат:

$$r'^2+\frac{h^2}{r^2}-2(m_1+m_2)f(r)=r_0'^2+\frac{h^2}{r_0^2}-2(m_1+m_2)f(r_0)=2H_{,}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right) \tag{100}$$

Поэтому другая вспомогательная величина $H_{,}$ также является постоянной, не зависящей от времени, и входит как таковая в постоянную часть выражения $\left(r'^2+\frac{h^2}{r^2}\right)$ квадрата относительной скорости. Уравнение условий (13.9), связывающее эти две постоянные h, $H_{,}$ с пределами длин радиуса-вектора r и с углом ϑ, описываемым этим радиусом при вращении его от начального до конечного направления, представляет собой уравнение плоскости относительной орбиты, а другое уравнение условия (14.9), связывающее эти две постоянные с теми же крайними расстояниями и временем, дает закон скорости взаимного сближения или удаления.

Следует отметить, что часть $V_{,}$ полной характеристической функции V, которая представляет относительное действие и определяет относительное движение в системе, а именно

$$V_{,}=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(h\vartheta+\int_{r_0}^{r}\rho\,dr\right), \tag{14.11}$$

при помощи равенства (13.9) может быть написана в виде

$$V_{,}=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\int_{r_0}^{r}\left(\rho-h\frac{\delta\rho}{\delta h}\right)dr, \tag{14.12}$$

или окончательно при помощи равенства (79) в виде

$$V_{,}=2\int_{r_0}^{r}\frac{m_1m_2f(r)+H}{\rho}dr; \tag{14.13}$$

само условие (13.9) также при помощи равенства (79) может быть преобразовано следующим образом:

$$\vartheta=h\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2\rho}. \tag{14.14}$$

Все эти результаты легко поддаются проверке. Уравнения в частных производных, связанные с законом относительной живой силы, которым должна удовлетворять характеристическая функция $V,$ относительного движения, могут быть написаны следующим образом:

$$\left(\frac{\delta V_{,}}{\delta r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\delta V_{,}}{\delta \vartheta}\right)^2=\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}(U+H_{,}),$$

$$\left(\frac{\delta V_{,}}{\delta r_0}\right)^2+\frac{1}{r_{0,}^2}\left(\frac{\delta V_{,}}{\delta \vartheta}\right)^2=\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}(U_0+H_{,}), \qquad (14.15)$$

и если вариация первых уравнений из этой пары берется по отношению к r и ϑ, причем следует обратить внимание на динамические значения производных характеристической функции, то это приведет (как и в предыдущих случаях) к известным дифференциальным уравнениям второго порядка.

О невозмущенном движении планеты или кометы вокруг Солнца; зависимость характеристической функции такого движения от хорды и суммы радиусов

15. Пусть для определенности

$$f(r)=r^{-1}, \qquad (101)$$

т.е. мы будем рассматривать такую бинарную систему, как планета или комета и Солнце, подчиненную ньютонову закону притяжения; для краткости положим

$$m_1+m_2=\mu, \quad \frac{h^2}{\mu}=p, \quad -\frac{m_1m_2}{2H}=\text{a}. \qquad (102)$$

Теперь характеристическая функция $V,$ относительного движения может быть выражена следующим образом:

$$V_{,}=\frac{m_1m_2}{\sqrt{\mu}}\left\{\vartheta\sqrt{p}\pm\int_{r_0}^{r}\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{\text{a}}-\frac{p}{r^2}\right)^{1/2}dr\right\}, \qquad (15.1)$$

где p рассматривается как функция крайних радиусов-векторов r_0 и r и ограниченного ими угла ϑ, включающего также величину a или связанную с ней величину $H,$ и определяемого условием

$$\vartheta=\pm\int_{r_0}^{r}\left(\frac{2}{rp}-\frac{1}{\text{a}p}-\frac{1}{r^2}\right)^{-1/2}\frac{dr}{r^2}, \qquad (15.2)$$

т.е. производной от выражения (15.1), взятой по p. При этом верхний знак в каждом выражении берется, когда расстояние увеличивается, а нижний знак – когда

это расстояние уменьшается; величина p рассматривается при вычислении обоих определенных интегралов как постоянная.

Из сказанного выше вытекает, что эта величина p является постоянной также в том смысле, что она не зависит от времени и не меняется в процессе движения и что условие (15.2), связывающее эту постоянную с r, r_0, ϑ, представляет собой уравнение плоской относительной орбиты, которая, следовательно (как это давно известно), является эллипсом, гиперболой или параболой в зависимости от того, является ли постоянная положительной, отрицательной или нулем, причем начало r всегда представляет собой фокус кривой, а p представляет собой полупараметр. Отсюда также вытекает, что время движения может быть выражено следующим образом:

$$t = \frac{\delta V_{,}}{\delta H_{,}} = \frac{2a^2}{m_1 m_2}\frac{\delta V_{,}}{\delta \mathrm{a}} \tag{15.3}$$

и, следовательно,

$$t = \pm\int_{r_0}^{r}\left(\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{\mathrm{a}} - \frac{\mu\rho}{r^2}\right)^{-1/2} dr. \tag{15.4}$$

Последнее выражение известно. Здесь мы ограничиваемся случаем, когда $a > 0$, и вводим известные дополнительные величины, называемые эксцентриситетом и эксцентрической аномалией, а именно

$$e = \sqrt{1 - p/\mathrm{a}} \tag{103}$$

и

$$\upsilon = \cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{a} - r}{\mathrm{a}e}\right), \tag{104}$$

что дает

$$\pm\sqrt{2\,\mathrm{a}r - r^2 - p\mathrm{a}} = \mathrm{a}e\sin\upsilon, \qquad 105)$$

где υ считается постоянно возрастающей во времени; следовательно, как хорошо известно,

$$r = \mathrm{a}(1 - e\cos\upsilon), \qquad r_0 = \mathrm{a}(1 - e\cos\upsilon_0),$$

$$\vartheta = 2\,\mathrm{tg}^{-1}\left\{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2}\mathrm{tg}\frac{\upsilon}{2}\right\} - \mathrm{tg}^{-1}\left\{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2}\mathrm{tg}\frac{\upsilon_0}{2}\right\} \tag{106}$$

и

$$t = \sqrt{a^3/\mu}\,(\upsilon - \upsilon_0 - e\sin\upsilon + e\sin\upsilon_0). \tag{107}$$

Мы находим, что выражение характеристической функции относительного движения

$$V_{,} = \frac{m_1 m_2}{\sqrt{\mu}} \left\{ \pm \int_{r_0}^{r} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\mathrm{a}} \right) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\mathrm{a}} - \frac{p}{r^2} \right)^{-1/2} dr \right\}, \tag{15.5}$$

выведенное из (15.1) и (15.2), может быть преобразовано следующим образом:

$$V_{,} = m_1 m_2 \sqrt{\mathrm{a}/\mu} (\upsilon - \upsilon_0 + e \sin \upsilon - e \sin \upsilon_0), \tag{15.6}$$

где эксцентриситет e и конечные и начальные эксцентрические аномалии υ, υ_0 должны рассматриваться как функции конечного и начального радиусов r, r_0 и угла ϑ, определяемых посредством уравнений (106). Выражение (15.6) может быть написано так:

$$V_{,} = 2 m_1 m_2 \sqrt{\mathrm{a}/\mu} (\upsilon_{,} + e_{,} \sin \upsilon_{,}), \tag{15.7}$$

если мы для краткости положим

$$\upsilon_{,} = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{2}, \quad e_{,} = e \cos \frac{\upsilon + \upsilon_0}{2}. \tag{108}$$

Для полного определения характеристической функции данного относительного движения остается, следовательно, определить две переменные υ и e в качестве функций r, r_0, ϑ или функций какой-либо другой группы величин, которые характеризуют форму и величину плоского треугольника, ограниченного конечным и начальным радиусами-векторами и эллиптической хордой.

Для этой цели удобно ввести саму эллиптическую хорду, которую мы обозначим $\pm\tau$, так что

$$\tau^2 = r^2 + r_0^2 - 2 r_0 \cos \vartheta, \tag{109}$$

так как эта хорда может быть выражена как функция двух переменных $\upsilon_{,}$, $e_{,}$ (включая также среднее расстояние a) следующим образом. Значение (106) угла ϑ с помощью равенства (95) для $\theta - \theta_0$ дает

$$\theta - 2\,\mathrm{tg}^{-1} \left\{ \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^{1/2} \mathrm{tg} \frac{\upsilon}{2} \right\} = \theta_0 - 2\,\mathrm{tg}^{-1} \left\{ \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^{1/2} \mathrm{tg} \frac{\upsilon_0}{2} \right\} = \tilde{\omega}, \tag{110}$$

где $\tilde{\omega}$ представляет собой новую постоянную, независимую от времени, а именно одно из значений полярного угла θ, соответствующее минимуму радиуса-вектора, и, следовательно, с помощью (106)

$$r \cos(\theta - \tilde{\omega}) = \mathrm{a}(\cos \upsilon - e), \quad r \sin(\theta - \tilde{\omega}) = \mathrm{a} \sqrt{1 - e^2} \sin \upsilon,$$

$$r_0 \cos(\theta_0 - \tilde{\omega}) = \mathrm{a}(\cos \upsilon_0 - e), \quad r_0 \sin(\theta_0 - \tilde{\omega}) = \mathrm{a} \sqrt{1 - e^2} \sin \upsilon_0, \tag{111}$$

Эти выражения дают следующее значение для квадрата эллиптической хорды:

$$\tau^2 = \{r\cos(\theta - \tilde{\omega}) - r_0\cos(\theta_0 - \tilde{\omega})\}^2 + \{r\sin(\theta - \tilde{\omega}) - r_0\sin(\theta_0 - \tilde{\omega})\} =$$

$$= \mathrm{a}^2\{(\cos\upsilon - \cos\upsilon_0)^2 + (1 - e^2)(\sin\upsilon - \sin\upsilon_0)^2\} =$$

$$= 4\mathrm{a}^2\sin^2\upsilon\left\{\left(\sin\frac{\upsilon + \upsilon_0}{2}\right)^2 + (1 - e^2)\left(\cos\frac{\upsilon + \upsilon_0}{2}\right)^2\right\} = 4\mathrm{a}^2(1 - e^2)\sin^2\upsilon. \qquad (112)$$

Мы можем также считать, что τ имеет тот же знак, что и $\sin\upsilon$, если мы в последовательные эллиптические периоды, или обращения, начинающиеся от начального положения, будем попеременно рассматривать его то как положительный, то как отрицательный.

Кроме того, если мы обозначим через σ сумму двух эллиптических, конечного и начального, радиусов-векторов, так что

$$\sigma = r + r_0, \qquad (113)$$

то при наших сокращениях имеем

$$\sigma = 2\mathrm{a}(1 - e_{,}\cos\upsilon_{,}); \qquad (114)$$

переменные $\upsilon_{,}$, $e_{,}$ являются поэтому функциями σ, τ, a, и, следовательно, характеристическая функция V сама является функцией этих трех величин. Поэтому мы можем написать

$$V_{,} = \frac{m_1 m_2 w}{m_1 + m_2}, \qquad (15.8)$$

причем w является функцией σ, τ, a, форму которой следует определить путем исключения $\upsilon_{,}$ и $e_{,}$ из трех уравнений

$$w = 2\sqrt{\mu\mathrm{a}}\,(\upsilon_{,} + e_{,}\sin\upsilon_{,}), \qquad \sigma = 2\mathrm{a}(1 - e_{,}\cos\upsilon_{,}), \qquad \tau = 2\mathrm{a}(1 - e_{,}^2)^{1/2}\sin\upsilon_{,}, \qquad (15.9)$$

и можно считать, что эта новая функция w сама является характеристической функцией эллиптического движения. Закон ее варьирования выражен следующим образом в обозначениях, принятых в данной работе:

$$\delta w = \xi'\delta\xi - \alpha'\delta\alpha + \eta'\delta\eta - \beta'\delta\beta + \zeta'\delta\zeta - \gamma'\delta\gamma + t\mu\delta\mathrm{a}/2\mathrm{a}^2. \qquad (15.10)$$

В этом выражении ξ, η, ζ представляют собой относительные координаты точки m_1 во время t, отнесенные к другой притягивающейся точке m_2 как к началу и к любым трем прямоугольным осям; ξ', η', ζ' представляют собой их приращения или три прямоугольные компоненты конечной относительной скорости; α, β, γ, α', β', γ' представляют собой начальные значения или значения в момент времени, равный нулю, этих относительных координат и компонент относительной скорости; a представляет собой величину, не зависимую от времени, а именно среднее расстояние между двумя точками m_1, m_2, а μ – сумма их масс. Теперь все свойства

невозмущенного эллиптического движения планеты или кометы вокруг Солнца могут быть выведены новым способом из упрощенной характеристической функции w путем сравнения ее вариации (15.10) со следующей формой:

$$\delta w = \frac{\delta w}{\delta\sigma}\delta\sigma + \frac{\delta w}{\delta\tau}\delta\tau + \frac{\delta w}{\delta a}\delta a, \tag{15.11}$$

в которой

$$\sigma = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} + \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}, \quad \tau = \pm\sqrt{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2+(\zeta-\gamma)^2}. \tag{15.12}$$

Это сравнение возвращает нас назад к общим интегральным уравнениям относительного движения бинарной системы (89) и (90), но теперь мы имеем следующие конкретные значения коэффициентов A, B и C:

$$A = \frac{1}{r}\frac{\delta w}{\delta\sigma} + \frac{1}{\tau}\frac{\delta w}{\delta\tau}, \quad B = \frac{1}{\tau}\frac{\delta w}{\delta\tau}, \quad C = \frac{1}{r_0}\frac{\delta w}{\delta\sigma} + \frac{1}{\tau}\frac{\delta w}{\delta\tau} \tag{15.13}$$

и для трех частных производных $\delta w/\delta\sigma$, $\delta w/\delta\tau$, $\delta w/\delta a$ имеем следующее соотношение:

$$a\frac{\delta w}{\delta a} + \sigma\frac{\delta w}{\delta\sigma} + \tau\frac{\delta w}{\delta\tau} = \frac{w}{2}, \tag{15.14}$$

где w является однородной функцией степени $1/2$ относительно трех величин a, σ, τ. Мы имеем также, приняв во внимание равенство (15.9),

$$\frac{\delta w}{\delta\sigma} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{\sin\upsilon_{,}}{e_{,}-\cos\upsilon_{,}}, \quad \frac{\delta w}{\delta\tau} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{\sqrt{1-e_{,}^2}}{\cos\upsilon_{,}-e_{,}}. \tag{15.15}$$

Отсюда

$$\frac{\delta w}{\delta\sigma}\frac{\delta w}{\delta\tau} = \frac{-2\mu\tau}{\sigma^2-\tau^2}, \quad \left(\frac{\delta w}{\delta\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\delta w}{\delta\tau}\right)^2 + \frac{\mu}{a} = \frac{4\mu\sigma}{\sigma^2-\tau^2}. \tag{15.16}$$

И наконец, отсюда можно вывести следующие замечательные выражения:

$$\left(\frac{\delta w}{\delta\sigma} + \frac{\delta w}{\delta\tau}\right)^2 = \frac{4\mu}{\sigma+\tau} - \frac{\mu}{a}, \quad \left(\frac{\delta w}{\delta\sigma} - \frac{\delta w}{\delta\tau}\right)^2 = \frac{4\mu}{\sigma-\tau} - \frac{\mu}{a}. \tag{15.17}$$

Эти выражения, как мы убедимся, окажутся очень важными для приложения настоящего метода к теории эллиптического движения.

16. В данном случае мы не станем вдаваться в какие-нибудь подробности такого приложения, но можем отметить, что то обстоятельство, что характеристическая функция включает только эллиптическую хорду и сумму крайних радиусов (кроме среднего расстояния и суммы масс), представляет при помощи нашего общего метода новое доказательство хорошо известной теоремы, заключающейся в том, что эллиптическое время также зависит от той же хорды и суммы радиусов и дает

новое выражение для закона этой зависимости, а именно [18]:

$$t = \frac{2a^2}{\mu}\frac{\delta w}{\delta a}. \tag{16.1}$$

Можно отметить также, что та же форма характеристической функции эллиптического движения при помощи нашего общего метода приводит к следующим любопытным, но не новым свойствам эллипса, заключающимся в том, что если провести к такой кривой две касательные из какой-либо общей внешней точки, то эти касательные стягивают равные углы в одном фокусе, а также стягивают равные углы и в другом. И обратно, если какая-нибудь плоская кривая обладает этим свойством, будучи отнесена к неподвижной точке в своей собственной плоскости, которая может быть принята за начало полярных координат r, θ, то эта плоская кривая должна удовлетворять следующему уравнению:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)\Delta\frac{1}{r} = (\Delta + 2)\frac{d}{d\theta}\frac{1}{r}, \tag{115}$$

которое может быть приведено к следующему виду:

$$\left(\frac{d}{d\theta} + \frac{d^3}{d\theta^3}\right)\frac{1}{r} = 0, \tag{116}$$

и отсюда интегрированием получим

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \overline{\omega})}; \tag{117}$$

следовательно, кривая представляет собой коническое сечение, а неподвижная точка – один из ее фокусов.

Свойства параболического движения являются предельными случаями свойств эллиптического движения и могут быть выведены из них, если мы возьмем

$$H_r = 0 \quad \text{или} \quad a = \infty. \tag{118}$$

Следовательно, характеристическая функция w и время t в параболическом движении, так же как и в эллиптическом, представляют собой функции хорды и суммы радиусов. Таким образом, полагая в предыдущих выражениях а бесконечным, мы находим для параболического движения следующие уравнения в частных производных:

$$\left(\frac{\delta w}{\delta\sigma} + \frac{\delta w}{\delta\tau}\right)^2 = \frac{4\mu}{\sigma + \tau}, \quad \left(\frac{\delta w}{\delta\sigma} - \frac{\delta w}{\delta\tau}\right)^2 = \frac{4\mu}{\sigma - \tau}. \tag{16.2}$$

Действительно, легко можно показать, что параболическая форма упрощенной характеристической функции w будет

$$w = 2\sqrt{\mu}\left(\sqrt{\sigma + \tau} \pm \sqrt{\sigma - \tau}\right), \tag{16.3}$$

где τ, как и раньше, представляет собой хорду, а σ – сумму радиусов, в то время как аналогичный предел выражения (16.1) для времени будет

$$t = \frac{1}{6\sqrt{\mu}}\{(\sigma+\tau)^{3/2} \pm (\sigma-\tau)^{3/2}\}. \tag{16.4}$$

Последнее выражение известно [19].

Формулы (15.10) и (15.11), к сравнению которых мы свели изучение эллиптического движения, распространяются также на гиперболическое движение и в любой бинарной системе, подчиняющейся ньютоновым законам притяжения. Упрощенная характеристическая функция может быть выражена определенным интегралом

$$w = \int_{-\tau}^{\tau}\left(\frac{\mu}{\sigma+\tau} - \frac{\mu}{4a}\right)^{1/2} d\tau, \tag{16.5}$$

где функция w по-прежнему связана с относительным действием V, посредством уравнения (15.8), тогда как время t, которое при помощи закона переменного действия может быть выведено из этой функции, представлено следующим, связанным с ним интегралом:

$$t = \frac{1}{4}\int_{-\tau}^{\tau}\left(\frac{\mu}{\sigma+\tau} - \frac{\mu}{4a}\right)^{-1/2} d\tau, \tag{16.6}$$

при условии, что в пределах интегрирования радикал не исчезает и не становится бесконечным. В том случае, когда это условие не соблюдено, мы все же можем выразить упрощенную характеристическую функцию w и время t при помощи следующих аналогичных интегралов:

$$w = \pm\int_{\tau_,}^{\sigma_,}\left(\frac{2\mu}{\sigma_,} - \frac{\mu}{a}\right)^{1/2} d\tau_, \tag{16.7}$$

и

$$t = \pm\int_{\tau_,}^{\sigma_,}\left(\frac{2\mu}{\sigma_,} - \frac{\mu}{a}\right)^{-1/2} d\sigma_,, \tag{16.8}$$

в которых мы можем для краткости положить

$$\sigma_, = (\sigma+\tau)/2, \quad \tau_, = (\sigma-\tau)/2 \tag{119}$$

и в которых легко определить знаки радикалов. Однако если мы в настоящий момент попытаемся полностью осуществить эти преобразования, это заведет нас слишком далеко; сейчас пора заняться рассмотрением свойств систем, состоящих более чем из двух точек.

О системах из трех точек вообще и об их характеристических функциях

17. Для любой системы из трех точек известные дифференциальные уравнения движения второго порядка охватываются следующей формулой:

$$\delta U = m_1(x_1''\delta x_1 + y_1''\delta y_1 + z_1''\delta z_1) + m_2(x_2''\delta x_2 + y_2''\delta y_2 + z_2''\delta z_2) +$$
$$+ m_3(x_3''\delta x_3 + y_3''\delta y_3 + z_3''\delta z_3), \qquad (120)$$

причем известная силовая функция U принимает форму

$$U = m_1 m_2 f^{(1,2)} + m_1 m_3 f^{(1,3)} + m_2 m_3 f^{(2,3)}, \qquad (121)$$

где $f^{(1,2)}, f^{(1,3)}, f^{(2,3)}$ соответственно представляют собой функции трех следующих взаимных расстояний точек системы:

$$r^{(1,2)} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2},$$
$$r^{(1,3)} = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2},$$
$$r^{(2,3)} = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2}. \qquad (122)$$

Следовательно, известные дифференциальные уравнения движения отдельно для точки m_1 имеют вид

$$x_1'' = m_2 \frac{\delta f^{(1,2)}}{\delta x_1} + m_3 \frac{\delta f^{(1,3)}}{\delta x_1},$$
$$y_1'' = m_2 \frac{\delta f^{(1,2)}}{\delta y_1} + m_3 \frac{\delta f^{(1,3)}}{\delta y_1},$$
$$z_1'' = m_2 \frac{\delta f^{(1,2)}}{\delta z_1} + m_3 \frac{\delta f^{(1,3)}}{\delta z_1}; \qquad (123)$$

для точек m_2 и m_3 имеем шесть аналогичных уравнений. Здесь x_1'' и т.д. обозначают компоненты ускорения точек m_1, m_2, m_3, или вторые производные их координат, взятые по времени. Проинтегрировать эти уравнения – значит найти с их помощью девять соотношений между временем t, тремя массами m_1, m_2, m_3, девятью переменными координатами x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3 и их девятью начальными значениями и девятью начальными мерами их приращений, которые можно обозначить как a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, $a_1', b_1', c_1', a_2', b_2', c_2', a_3', b_3', c_3'$. Известный промежуточный интеграл, включающий закон живой силы, а именно

$$\frac{1}{2} m_1(x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2) + \frac{1}{2} m_2(x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2) + \frac{1}{2} m_3(x_3'^2 + y_3'^2 + z_3'^2) =$$
$$= m_1 m_2 f^{(1,2)} + m_1 m_3 f^{(1,3)} + m_2 m_3 f^{(2,3)} + H, \qquad (124)$$

дает следующее начальное соотношение:

$$\frac{1}{2}m_1(a_1'^2+b_1'^2+c_1'^2)+\frac{1}{2}m_2(a_2'^2+b_2'^2+c_2'^2)+\frac{1}{2}m_3(a_3'^2+b_3'^2+c_3'^2)=$$
$$=m_1m_2f_0^{(1,2)}+m_1m_3f_0^{(1,3)}+m_2m_3f_0^{(2,3)}+H, \tag{125}$$

в котором $f_0^{(1,2)}, f_0^{(1,3)}, f_0^{(2,3)}$ конструируются из начальных координат точно так же, как $f^{(1,2)}, f^{(1,3)}, f^{(2,3)}$ из конечных координат. Теперь если бы мы знали девять конечных интегралов уравнений движения этой тройной системы и сочетали их с начальной формой (125) закона живых сил, то мы имели бы десять соотношений для определения величин t, $a_1', b_1', c_1', a_2', b_2', c_2', a_3', b_3', c_3'$, т.е. времени и девяти начальных компонент скоростей трех точек как функций девяти конечных и девяти начальных координат, а также величины H, включая также и массы. Мы могли бы таким образом определить все, что зависит от способа и времени движения системы из ее начального в конечное положение, в качестве функции тех же граничных координат и H. В частности, мы могли бы определить действие V, или накопленную живую силу системы, а именно

$$V=m_1\int_0^t(x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2)dt+m_2\int_0^t(x_2'^2+y_2'^2+z_2'^2)dt+m_3\int_0^t(x_3'^2+y_3'^2+z_3'^2)dt \tag{17.1}$$

как функцию этих девятнадцати величин x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, H и могли бы вычислить вариацию этой функции

$$\delta V=\frac{\delta V}{\delta x_1}\delta x_1+\frac{\delta V}{\delta y_1}\delta y_1+\frac{\delta V}{\delta z_1}\delta z_1+\frac{\delta V}{\delta a_1}\delta a_1+\frac{\delta V}{\delta b_1}\delta b_1+\frac{\delta V}{\delta c_1}\delta c_1+$$
$$+\frac{\delta V}{\delta x_2}\delta x_2+\frac{\delta V}{\delta y_2}\delta y_2+\frac{\delta V}{\delta z_2}\delta z_2+\frac{\delta V}{\delta a_2}\delta a_2+\frac{\delta V}{\delta b_2}\delta b_2+\frac{\delta V}{\delta c_2}\delta c_2+$$
$$+\frac{\delta V}{\delta x_3}\delta x_3+\frac{\delta V}{\delta y_3}\delta y_3+\frac{\delta V}{\delta z_3}\delta z_3+\frac{\delta V}{\delta a_3}\delta a_3+\frac{\delta V}{\delta b_3}\delta b_3+\frac{\delta V}{\delta c_3}\delta c_3+\frac{\delta V}{\delta H}\delta H. \tag{17.2}$$

Однако закон переменного действия предварительно дает для этой вариации выражение

$$\delta V=m_1(x_1'\delta x_1-a_1'\delta a_1+y_1'\delta y_1-b_1'\delta b_1+z_1'\delta z_1-c_1'\delta c_1)+$$
$$+m_2(x_2'\delta x_2-a_2'\delta a_2+y_2'\delta y_2-b_2'\delta b_2+z_2'\delta z_2-c_2'\delta c_2)+$$
$$+m_3(x_3'\delta x_3-a_3'\delta a_3+y_3'\delta y_3-b_3'\delta b_3+z_3'\delta z_3-c_3'\delta c_3)+t\delta H \tag{17.3}$$

и, следовательно, показывает, что отыскание всех промежуточных и конечных интегральных уравнений движения системы может быть сведено к отысканию и дифференцированию этой одной характеристической функции V, потому что если бы мы знали эту одну функцию, то имели бы девять промежуточных интегралов извест-

ных дифференциальных уравнений в виде

$$\frac{\delta V}{\delta x_1}=m_1x_1', \quad \frac{\delta V}{\delta y_1}=m_1y_1', \quad \frac{\delta V}{\delta z_1}=m_1z_1';$$
$$\frac{\delta V}{\delta x_2}=m_2x_2', \quad \frac{\delta V}{\delta y_2}=m_2y_2', \quad \frac{\delta V}{\delta z_2}=m_2z_2';$$
$$\frac{\delta V}{\delta x_3}=m_3x_3', \quad \frac{\delta V}{\delta y_3}=m_3y_3', \quad \frac{\delta V}{\delta z_3}=m_3z_3' \qquad (17.4)$$

и девять конечных интегралов в виде

$$\frac{\delta V}{\delta a_1}=-m_1a_1', \quad \frac{\delta V}{\delta b_1}=-m_1b_1', \quad \frac{\delta V}{\delta c_1}=-m_1c_1';$$
$$\frac{\delta V}{\delta a_2}=-m_2a_2', \quad \frac{\delta V}{\delta b_2}=-m_2b_2', \quad \frac{\delta V}{\delta c_2}=-m_2c_2';$$
$$\frac{\delta V}{\delta a_3}=-m_3a_3', \quad \frac{\delta V}{\delta b_3}=-m_3b_3', \quad \frac{\delta V}{\delta c_3}=-m_3c_3' \qquad (17.5)$$

причем вспомогательная постоянная H исключается и время t вводится посредством другого уравнения (2.5), часто встречающегося в данной работе:

$$t=\delta V/\delta H.$$

Тот же закон переменного действия подсказывает еще один метод исследования формы этой характеристической функции, не требующий предварительного интегрирования известных уравнений движения, а именно интегрирование двух уравнений в частных производных, связанных с законом живой силы:

$$\frac{1}{2m_1}\left\{\left(\frac{\delta V}{\delta x_1}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta y_1}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta z_1}\right)^2\right\}+\frac{1}{2m_2}\left\{\left(\frac{\delta V}{\delta x_2}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta y_2}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta z_2}\right)^2\right\}+$$
$$+\frac{1}{2m_3}\left\{\left(\frac{\delta V}{\delta x_3}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta y_3}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta z_3}\right)^2\right\}=m_1m_2f^{(1,2)}+m_1m_3f^{(1,3)}+m_2m_3f^{(2,3)}+H \qquad (17.6)$$

и

$$\frac{1}{2m_1}\left\{\left(\frac{\delta V}{\delta a_1}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta b_1}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta c_1}\right)^2\right\}+\frac{1}{2m_2}\left\{\left(\frac{\delta V}{\delta a_2}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta b_2}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta c_2}\right)^2\right\}+$$
$$+\frac{1}{2m_3}\left\{\left(\frac{\delta V}{\delta a_3}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta b_3}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta c_3}\right)^2\right\}=m_1m_2f_0^{(1,2)}+m_1m_3f_0^{(1,3)}+m_2m_3f_0^{(2,3)}+H. \qquad (17.7)$$

Для того чтобы облегчить определение этим способом функции V, которая зависит от восемнадцати координат, мы можем, исходя из принципов, изложенных ранее, разделить ее на часть $V_{,,}$, зависящую только от движения центра тяжести системы и определяемую формулой (10.4), и на часть $V_{,}$, зависящую только от относительных движений вокруг этого внутреннего центра и равную накопленной живой силе, связанной только с этим относительным движением. Таким образом, трудность сводится к определению относительного действия $V_{,}$, и если мы введем относительные координаты

$$\xi_1 = x_1 - x_3, \quad \eta_1 = y_1 - y_3, \quad \zeta_1 = z_1 - z_3,$$
$$\xi_2 = x_2 - x_3, \quad \eta_2 = y_2 - y_3, \quad \zeta_2 = z_2 - z_3 \tag{126}$$

и

$$\alpha_1 = a_1 - a_3, \quad \beta_1 = b_1 - b_3, \quad \gamma_1 = c_1 - c_3,$$
$$\alpha_2 = a_2 - a_3, \quad \beta_2 = b_2 - b_3, \quad \gamma_2 = c_2 - c_3, \tag{127}$$

то, исходя из принципов, изложенных в десятом и последующих пунктах, легко убедиться в том, что функция $V_{,}$ может рассматриваться как зависящая только от этих относительных координат и от величины $H_{,}$, аналогичной H (помимо масс системы), и что она должна удовлетворять двум уравнениям в частных производных, аналогичным (17.6) и (17.7), а именно:

$$\frac{1}{2m_1}\left\{\left(\frac{\delta V_{,}}{\delta\xi_1}\right)^2+\left(\frac{\delta V_{,}}{\delta\eta_1}\right)^2+\left(\frac{\delta V_{,}}{\delta\zeta_1}\right)^2\right\}+\frac{1}{2m_2}\left\{\left(\frac{\delta V_{,}}{\delta\xi_2}\right)^2+\left(\frac{\delta V_{,}}{\delta\eta_2}\right)^2+\left(\frac{\delta V_{,}}{\delta\zeta_2}\right)^2\right\}+$$
$$+\frac{1}{2m_3}\left\{\left(\frac{\delta V_{,}}{\delta\xi_1}+\frac{\delta V_{,}}{\delta\xi_2}\right)^2+\left(\frac{\delta V_{,}}{\delta\eta_1}+\frac{\delta V_{,}}{\delta\eta_2}\right)^2+\left(\frac{\delta V_{,}}{\delta\zeta_1}+\frac{\delta V_{,}}{\delta\zeta_2}\right)^2\right\}=$$
$$=m_1m_2f^{(1,2)}+m_1m_3f^{(1,3)}+m_2m_3f^{(2,3)}+H \tag{17.8}$$

и

$$\frac{1}{2m_1}\left\{\left(\frac{\delta V_{,}}{\delta\alpha_1}\right)^2+\left(\frac{\delta V_{,}}{\delta\beta_1}\right)^2+\left(\frac{\delta V_{,}}{\delta\gamma_1}\right)^2\right\}+\frac{1}{2m_2}\left\{\left(\frac{\delta V_{,}}{\delta\alpha_2}\right)^2+\left(\frac{\delta V_{,}}{\delta\beta_2}\right)^2+\left(\frac{\delta V_{,}}{\delta\gamma_2}\right)^2\right\}+$$
$$+\frac{1}{2m_3}\left\{\left(\frac{\delta V_{,}}{\delta\alpha_1}+\frac{\delta V_{,}}{\delta\alpha_2}\right)^2+\left(\frac{\delta V_{,}}{\delta\beta_1}+\frac{\delta V_{,}}{\delta\beta_2}\right)^2+\left(\frac{\delta V_{,}}{\delta\gamma_1}+\frac{\delta V_{,}}{\delta\gamma_2}\right)^2\right\}=$$
$$=m_1m_2f_0^{(1,2)}+m_1m_3f_0^{(1,3)}+m_2m_3f_0^{(2,3)}+H. \tag{17.9}$$

При этом закон вариации этой функции по z' имеет вид

$$\delta V_, = t\delta H_, + m_1(\xi_1'\delta\xi_1 - \alpha_1'\delta\alpha_1 + \eta_1'\delta\eta_1 - \beta_1'\delta\beta_1 + \zeta_1'\delta\zeta_1 - \gamma_1'\delta\gamma_1) +$$
$$+ m_2(\xi_2'\delta\xi_2 - \alpha_2'\delta\alpha_2 + \eta_2'\delta\eta_2 - \beta_2'\delta\beta_2 + \zeta_2'\delta\zeta_2 - \gamma_2'\delta\gamma_2) -$$
$$- \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3}\{(m_1\xi_1' + m_2\xi_2')(m_1\delta\xi_1 + m_2\delta\xi_2) - (m_1\alpha_1' + m_2\alpha_2')(m_1\delta\alpha_1 + m_2\delta\alpha_2) +$$
$$+ (m_1\eta_1' + m_2\eta_2')(m_1\delta\eta_1 + m_2\delta\eta_2) - (m_1\beta_1' + m_2\beta_2')(m_1\delta\beta_1 + m_2\delta\beta_2) +$$
$$+ (m_1\zeta_1' + m_2\zeta_2')(m_1\delta\zeta_1 + m_2\delta\zeta_2) - (m_1\gamma_1' + m_2\gamma_2')(m_1\delta\gamma_1 + m_2\delta\gamma_2)\}. \quad (17.10)$$

Это выражение таким же образом, как и выше, распадается на шесть промежуточных и шесть конечных интегралов относительного движения, а именно на следующие уравнения:

$$\frac{1}{m_1}\frac{\delta V_,}{\delta\xi_1} = \xi_1' - \frac{m_1\xi_1' + m_2\xi_2'}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad \frac{1}{m_2}\frac{\delta V_,}{\delta\xi_2} = \xi_2' - \frac{m_1\xi_1' + m_2\xi_2'}{m_1 + m_2 + m_3},$$
$$\frac{1}{m_1}\frac{\delta V_,}{\delta\eta_1} = \eta_1' - \frac{m_1\eta_1' + m_2\eta_2'}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad \frac{1}{m_2}\frac{\delta V_,}{\delta\eta_2} = \eta_2' - \frac{m_1\eta_1' + m_2\eta_2'}{m_1 + m_2 + m_3},$$
$$\frac{1}{m_1}\frac{\delta V_,}{\delta\zeta_1} = \zeta_1' - \frac{m_1\zeta_1' + m_2\zeta_2'}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad \frac{1}{m_2}\frac{\delta V_,}{\delta\zeta_2} = \zeta_2' - \frac{m_1\zeta_1' + m_2\zeta_2'}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (17.11)$$

и

$$-\frac{1}{m_1}\frac{\delta V_,}{\delta\alpha_1} = \alpha_1' - \frac{m_1\alpha_1' + m_2\alpha_2'}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad -\frac{1}{m_2}\frac{\delta V_,}{\delta\alpha_2} = \alpha_2' - \frac{m_1\alpha_1' + m_2\alpha_2'}{m_1 + m_2 + m_3},$$
$$-\frac{1}{m_1}\frac{\delta V_,}{\delta\beta_1} = \beta_1' - \frac{m_1\beta_1' + m_2\beta_2'}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad -\frac{1}{m_2}\frac{\delta V_,}{\delta\beta_2} = \beta_2' - \frac{m_1\beta_1' + m_2\beta_2'}{m_1 + m_2 + m_3},$$
$$-\frac{1}{m_1}\frac{\delta V_,}{\delta\gamma_1} = \gamma_1' - \frac{m_1\gamma_1' + m_2\gamma_2'}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad -\frac{1}{m_2}\frac{\delta V_,}{\delta\gamma_2} = \gamma_2' - \frac{m_1\gamma_1' + m_2\gamma_2'}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad (17.12)$$

которые следует комбинировать с нашей старой формулой (10.10)

$$\delta V_, / \delta H_, = t.$$

18. Величина $H_,$ в $V_,$ и аналогичная величина $H_{,,}$ в $V_{,,}$ действительно независимы от времени и не меняются в ходе движения, но дух нашего метода требует того, чтобы при выведении абсолютного действия или первоначальной характеристической функции V из двух частей $V_,$ и $V_{,,}$ мы рассматривали эти две части $H_,$ и $H_{,,}$ первоначальной величины H как функции, каждая из которых включает девять

начальных и девять конечных интегралов точек тройной системы; при этом формы этих двух функций восемнадцати координат и H определяются двумя условиями:

$$\frac{\delta V_,}{\delta H_,} = \frac{\delta V_{,,}}{\delta H_{,,}}, \qquad H_, + H_{,,} = H. \tag{18.1}$$

Однако из этих условий вытекает, что когда мы берем вариацию полной первоначальной функции V первого порядка относительно восемнадцати координат, то можем рассматривать две вспомогательные величины $H_,$ и $H_{,,}$ как постоянные;

следовательно, мы имеем следующие выражения для частных производных первого порядка функции V, взятых по координатам, параллельным x:

$$\frac{\delta V}{\delta x_1} = \frac{\delta V_,}{\delta \xi_1} + \frac{m_1}{m_1+m_2+m_3}\frac{\delta V_{,,}}{\delta x_{,,}}, \quad \frac{\delta V}{\delta a_1} = \frac{\delta V_,}{\delta \alpha_1} + \frac{m_1}{m_1+m_2+m_3}\frac{\delta V_{,,}}{\delta a_{,,}},$$

$$\frac{\delta V}{\delta x_2} = \frac{\delta V_,}{\delta \xi_2} + \frac{m_2}{m_1+m_2+m_3}\frac{\delta V_{,,}}{\delta x_{,,}}, \quad \frac{\delta V}{\delta a_2} = \frac{\delta V_,}{\delta \alpha_2} + \frac{m_2}{m_1+m_2+m_3}\frac{\delta V_{,,}}{\delta a_{,,}}, \tag{18.2}$$

$$\frac{\delta V}{\delta x_3} = -\frac{\delta V_,}{\delta \xi_1} - \frac{\delta V_,}{\delta \xi_2} + \frac{m_3}{m_1+m_2+m_3}\frac{\delta V_{,,}}{\delta x_{,,}}, \quad \frac{\delta V}{\delta a_3} = -\frac{\delta V_,}{\delta \alpha_1} - \frac{\delta V_,}{\delta \alpha_2} + \frac{m_3}{m_1+m_2+m_3}\frac{\delta V_{,,}}{\delta a_{,,}},$$

совместно с аналогичными выражениями для частных производных того же порядка, взятых по другим координатам. Подставляя эти выражения в формы (6.1):

$$\frac{\delta V}{\delta x_1} + \frac{\delta V}{\delta x_2} + \frac{\delta V}{\delta x_3} + \frac{\delta V}{\delta a_1} + \frac{\delta V}{\delta a_2} + \frac{\delta V}{\delta a_3} = 0,$$

$$\frac{\delta V}{\delta y_1} + \frac{\delta V}{\delta y_2} + \frac{\delta V}{\delta y_3} + \frac{\delta V}{\delta b_1} + \frac{\delta V}{\delta b_2} + \frac{\delta V}{\delta b_3} = 0,$$

$$\frac{\delta V}{\delta z_1} + \frac{\delta V}{\delta z_2} + \frac{\delta V}{\delta z_3} + \frac{\delta V}{\delta c_1} + \frac{\delta V}{\delta c_2} + \frac{\delta V}{\delta c_3} = 0, \tag{18.3}$$

мы убеждаемся, что эти уравнения становятся тождествами, так как

$$\frac{\delta V_{,,}}{\delta x_{,,}} + \frac{\delta V_{,,}}{\delta a_{,,}} = 0, \quad \frac{\delta V_{,,}}{\delta y_{,,}} + \frac{\delta V_{,,}}{\delta b_{,,}} = 0, \quad \frac{\delta V_{,,}}{\delta z_{,,}} + \frac{\delta V_{,,}}{\delta c_{,,}} = 0. \tag{18.4}$$

Однако, подставляя аналогичным образом выражения (18.2) в уравнения вида (6.2), первое из которых для тройной системы имеет вид

$$x_1\frac{\delta V}{\delta y_1} - y_1\frac{\delta V}{\delta x_1} + x_2\frac{\delta V}{\delta y_2} - y_2\frac{\delta V}{\delta x_2} + x_3\frac{\delta V}{\delta y_3} - y_3\frac{\delta V}{\delta x_3} +$$

$$+ a_1\frac{\delta V}{\delta b_1} - b_1\frac{\delta V}{\delta a_1} + a_2\frac{\delta V}{\delta b_2} - b_2\frac{\delta V}{\delta a_2} + a_3\frac{\delta V}{\delta b_3} - b_3\frac{\delta V}{\delta a_3} = 0, \tag{18.5}$$

и принимая во внимание условие

$$x_{,,}\frac{\delta V_{,,}}{\delta y_{,,}}-y_{,,}\frac{\delta V_{,,}}{\delta x_{,,}}+a_{,,}\frac{\delta V_{,,}}{\delta b_{,,}}-b_{,,}\frac{\delta V_{,,}}{\delta a_{,,}}=0 \qquad (18.6)$$

наряду с двумя другими аналогичными условиями, мы найдем, что часть $V_{,}$, или характеристическая функция относительного движения тройной системы, должна удовлетворять трем следующим условиям, включающим ее частные производные первого порядка и первой степени:

$$\xi_1\frac{\delta V_{,}}{\delta\eta_1}-\eta_1\frac{\delta V_{,}}{\delta\xi_1}+\xi_2\frac{\delta V_{,}}{\delta\eta_2}-\eta_2\frac{\delta V_{,}}{\delta\xi_2}+\alpha_1\frac{\delta V_{,}}{\delta\beta_1}-\beta_1\frac{\delta V_{,}}{\delta\alpha_1}+\alpha_2\frac{\delta V_{,}}{\delta\beta_2}-\beta_2\frac{\delta V_{,}}{\delta\alpha_2}=0,$$

$$\eta_1\frac{\delta V_{,}}{\delta\zeta_1}-\zeta_1\frac{\delta V_{,}}{\delta\eta_1}+\eta_2\frac{\delta V_{,}}{\delta\zeta_2}-\zeta_2\frac{\delta V_{,}}{\delta\eta_2}+\beta_1\frac{\delta V_{,}}{\delta\gamma_1}-\gamma_1\frac{\delta V_{,}}{\delta\beta_1}+\beta_2\frac{\delta V_{,}}{\delta\gamma_2}-\gamma_2\frac{\delta V_{,}}{\delta\beta_2}=0,$$

$$\zeta_1\frac{\delta V_{,}}{\delta\xi_1}-\xi_1\frac{\delta V_{,}}{\delta\zeta_1}+\zeta_2\frac{\delta V_{,}}{\delta\xi_2}-\xi_2\frac{\delta V_{,}}{\delta\zeta_2}+\gamma_1\frac{\delta V_{,}}{\delta\alpha_1}-\alpha_1\frac{\delta V_{,}}{\delta\gamma_1}+\gamma_2\frac{\delta V_{,}}{\delta\alpha_2}-\alpha_2\frac{\delta V_{,}}{\delta\gamma_2}=0. \qquad (18.7)$$

Отсюда видно, что эта функция может зависеть только от формы и размеров пятиугольника, вообще не плоского, образуемого точкой m_3 (рассматриваемой как неподвижная) и начальными и конечными положениями двух других точек m_1 и m_2; например, пятиугольник, углы которого расположены в следующем порядке: m_3, (m_1), (m_2), m_2, m_1, причем (m_1) и (m_2) обозначают начальные положения точек m_1, m_2 относительно m_3 как неподвижного начала. Форма и величина этого пятиугольника могут определяться десятью взаимными расстояниями пяти вершин, т.е. пятью сторонами и пятью диагоналями, которые могут быть обозначены таким образом:

$$m_3(m_1)=\sqrt{s_1},\quad (m_1)(m_2)=\sqrt{s_2},\quad (m_2)m_2=\sqrt{s_3},$$

$$m_2m_1=\sqrt{s_4},\quad m_1m_3=\sqrt{s_5},\quad m_3(m_2)=\sqrt{d_1},$$

$$(m_1)m_2=\sqrt{d_2},\quad (m_2)m_1=\sqrt{d_3},\quad m_2m_3=\sqrt{d_4},\quad m_1(m_1)=\sqrt{d_5}, \qquad (128)$$

где $s_1, \dots, d_5$ в качестве функций двенадцати относительных координат таковы:

$$s_1=\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2,\quad s_2=(\alpha_2-\alpha_1)^2+(\beta_2-\beta_1)^2+(\gamma_2-\gamma_1)^2,$$

$$s_3=(\xi_2-\alpha_2)^2+(\eta_2-\beta_2)^2+(\zeta_2-\gamma_2)^2,$$

$$s_4=(\xi_1-\xi_2)^2+(\eta_1-\eta_2)^2+(\zeta_1-\zeta_2)^2,\quad s_5=\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2,$$

$$d_1=\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2,\quad d_2=(\xi_2-\alpha_1)^2+(\eta_2-\beta_1)^2+(\zeta_2-\gamma_1)^2,$$

$$d_3=(\xi_1-\alpha_2)^2+(\eta_1-\beta_2)^2+(\zeta_1-\gamma_2)^2,$$

$$d_4=\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2,\quad d_5=(\xi_1-\alpha_1)^2+(\eta_1-\beta_2)^2+(\zeta_1-\gamma_1)^2. \qquad (129)$$

Эти десять расстояний $\sqrt{s_1}$ и т.д. не являются, однако, полностью независимыми, а связаны одним уравнением, а именно [20]:

$$s_1^2 s_3^2 + s_2^2 s_4^2 + s_3^2 s_5^2 + s_4^2 s_1^2 + s_5^2 s_2^2 + s_1^2 d_3^2 + s_2^2 d_4^2 + s_3^2 d_5^2 + s_4^2 d_1^2 + s_5^2 d_2^2 +$$

$$+d_1^2 d_2^2 + d_2^2 d_3^2 + d_3^2 d_4^2 + d_4^2 d_5^2 + d_5^2 d_1^2 - 2s_1^2 s_3 s_4 - 2s_2^2 s_4 s_5 - 2s_3^2 s_5 s_1 - 2s_4^2 s_1 s_2 - 2s_5^2 s_2 s_3 -$$

$$-2s_1^2 s_3 d_3 - 2s_2^2 s_4 d_4 - 2s_3^2 s_5 d_5 - 2s_4^2 s_1 d_1 - 2s_5^2 s_2 d_2 -$$

$$-2s_1^2 s_4 d_3 - 2s_2^2 s_5 d_4 - 2s_3^2 s_1 d_5 - 2s_4^2 s_2 d_1 - 2s_5^2 s_3 d_2 -$$

$$-2s_1 d_2 d_3^2 - 2s_2 d_3 d_4^2 - 2s_3 d_4 d_5^2 - 2s_4 d_5 d_1^2 - 2s_5 d_1 d_2^2 -$$

$$-2s_1 d_3^2 d_4 - 2s_2 d_4^2 d_5 - 2s_3 d_5^2 d_1 - 2s_4 d_1^2 d_2 - 2s_5 d_5^2 d_3 -$$

$$-2d_1 d_2^2 d_3 - 2d_2 d_3^2 d_4 - 2d_3 d_4^2 d_5 - 2d_4 d_5^2 d_1 - 2d_5 d_1^2 d_2 -$$

$$-4s_1 s_3 s_4 d_3 - 4s_2 s_4 s_5 d_4 - 4s_3 s_5 s_1 d_5 - 4s_4 s_1 s_2 d_1 - 4s_5 s_2 s_3 d_2 -$$

$$-4s_1 d_2 d_3 d_4 - 4s_2 d_3 d_4 d_5 - 4s_3 d_4 d_5 d_1 - 4s_4 d_5 d_1 d_2 - 4s_5 d_1 d_2 d_3 -$$

$$-2s_1 s_2 s_3 d_4 - 2s_2 s_3 s_4 d_5 - 2s_3 s_4 s_5 d_1 - 2s_4 s_5 s_1 d_2 - 2s_5 s_1 s_2 d_3 -$$

$$-2s_1 s_3 d_1 d_2 - 2s_2 s_3 d_2 d_3 - 2s_3 s_5 d_3 d_4 - 2s_4 s_1 d_4 d_5 - 2s_5 s_2 d_5 d_1 -$$

$$-2s_1 d_1 d_3 d_5 - 2s_2 d_2 d_4 d_1 - 2s_3 d_3 d_5 d_2 - 2s_4 d_4 d_1 d_3 - 2s_5 d_5 d_2 d_4 +$$

$$+2s_1 s_2 s_3 s_4 + 2s_2 s_3 s_4 s_5 + 2s_3 s_4 s_5 s_1 + 2s_4 s_5 s_1 s_2 + 2s_5 s_1 s_2 s_3 +$$

$$+2s_1 s_2 s_4 d_3 + 2s_2 s_3 s_5 d_4 + 2s_3 s_4 s_1 d_5 + 2s_4 s_5 s_2 d_1 + 2s_5 s_1 s_3 d_2 +$$

$$+2s_1 s_3 s_4 d_1 + 2s_2 s_4 s_5 d_2 + 2s_3 s_5 s_1 d_3 + 2s_4 s_1 s_2 d_4 + 2s_5 s_2 s_3 d_5 +$$

$$+2s_1 s_2 d_3 d_4 + 2s_2 s_3 d_4 d_5 + 2s_3 s_4 d_5 d_1 + 2s_4 s_5 d_1 d_2 + 2s_5 s_1 d_2 d_3 +$$

$$+2s_1 s_3 d_2 d_3 + 2s_2 s_4 d_3 d_4 + 2s_3 s_5 d_4 d_5 + 2s_4 s_1 d_5 d_1 + 2s_5 s_2 d_1 d_2 +$$

$$+2s_1 s_4 d_1 d_2 + 2s_2 s_5 d_2 d_3 + 2s_3 s_1 d_3 d_4 + 2s_4 s_2 d_4 d_5 + 2s_5 s_3 d_5 d_1 +$$

$$+2s_1 s_4 d_1 d_3 + 2s_2 s_5 d_2 d_4 + 2s_3 s_1 d_3 d_5 + 2s_4 s_2 d_4 d_1 + 2s_5 s_3 d_5 d_2 +$$

$$+2s_1 s_4 d_2 d_3 + 2s_2 s_5 d_3 d_4 + 2s_3 s_1 d_4 d_5 + 2s_4 s_2 d_5 d_1 + 2s_5 s_3 d_1 d_2 +$$

$$+2s_1 s_4 d_3 d_4 + 2s_2 s_5 d_4 d_5 + 2s_3 s_1 d_5 d_1 + 2s_4 s_2 d_1 d_2 + 2s_5 s_3 d_2 d_3 +$$

$$+2s_1 d_1 d_2 d_3 + 2s_2 d_2 d_3 d_4 + 2s_3 d_3 d_4 d_5 + 2s_4 d_4 d_5 d_1 + 2s_5 d_5 d_1 d_2 +$$

$$+2s_1 d_3 d_4 d_5 + 2s_2 d_4 d_5 d_1 + 2s_3 d_5 d_1 d_2 + 2s_4 d_1 d_2 d_3 + 2s_5 d_2 d_3 d_4 +$$

$$+2d_1 d_2 d_3 d_4 + 2d_2 d_3 d_4 d_5 + 2d_3 d_4 d_5 d_1 + 2d_4 d_5 d_1 d_2 + 2d_5 d_1 d_2 d_3 = 0. \qquad (130)$$

Поэтому они могут быть выражены как функции девяти независимых величин, например четырех линий и пяти углов $r^{(1)}, r_0^{(1)}, r^{(2)}, r_0^{(2)}, \theta^{(1)}, \theta_0^{(1)}, \theta^{(2)}, \theta_0^{(2)}, i$, от которых они зависят следующим образом:

$$s_1 = r_0^{(1)2},$$

$$s_2 = r_0^{(1)2} + r_0^{(2)2} - 2r_0^{(1)}r_0^{(2)}(\cos\theta_0^{(1)}\cos\theta_0^{(2)} + \sin\theta_0^{(1)}\sin\theta_0^{(2)}\cos i),$$

$$s_3 = r^{(2)2} + r_0^{(2)2} - 2r^{(2)}r_0^{(2)}\cos(\theta^{(2)} - \theta_0^{(2)}),$$

$$s_4 = r^{(2)2} + r^{(1)2} - 2r^{(2)}r^{(1)}\cos(\theta^{(1)}\cos\theta^{(2)} + \sin\theta^{(1)}\sin\theta^{(2)}\cos i),$$

$$s_5 = r^{(1)2},$$

$$d_1 = r_0^{(2)2},$$

$$d_2 = r^{(2)2} + r_0^{(1)2} - 2r^{(2)}r_0^{(1)}(\cos\theta^{(2)}\cos\theta_0^{(1)} + \sin\theta^{(2)}\sin\theta_0^{(1)}\cos i),$$

$$d_3 = r_0^{(2)2} + r^{(1)2} - 2r_0^{(2)}r^{(1)}(\cos\theta_0^{(2)}\cos\theta^{(1)} + \sin\theta^{(2)}\sin\theta^{(1)}\cos i),$$

$$d_4 = r^{(2)2},$$

$$d_5 = r^{(1)2} + r_0^{1(2)} - 2r^{(1)}r_0^{(1)}\cos(\theta^{(1)} - \theta_0^{(1)}). \qquad (131)$$

При этом два символа линий $r^{(1)}$, $r^{(2)}$ означают для краткости те же два конечных радиуса-вектора, которые ранее были обозначены как $r^{(1,3)}$, $r^{(2,3)}$, а $r_0^{(1)}$ и $r_0^{(2)}$ представляют собой начальные значения этих радиусов; $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \theta_0^{(1)}, \theta_0^{(2)}$ — углы, образуемые этими радиусами с линией пересечения двух плоскостей $r_0^{(1)}$, $r^{(1)}$, $r_0^{(2)}$, $r^{(2)}$, а i – наклон этих двух плоскостей друг к другу. Поэтому мы можем считать, что характеристическая функция V, относительного движения для любой тройной системы зависит только от этих последних линий и углов и величины H_r.

Рассуждение, которое мы сочли полезным здесь развить для любой системы точек, притягивающих или отталкивающих друг друга в зависимости от любых функций их расстояний, уже приводилось в более общей форме в п. 12 этой работы и показывает, например, что характеристическая функция относительного движения в системе четырех таких точек зависит от формы и величины семиугольника и, следовательно, только от взаимных расстояний его вершин, число которых $(7 \cdot 6)/2 = 21$, но которые связаны шестью уравнениями условий, так что независимыми остаются только пятнадцать величин. Эти замечания легко можно распространить на любую множественную систему.

Общий метод усовершенствования приближенного выражения характеристической функции движения системы в любой задаче динамики

19. Уравнение в частных производных (4.1), которому должна удовлетворять характеристическая функция V во всякой задаче динамики, не без пользы может быть подвергнуто некоторым общим преобразованиям путем разделения этой функции V на две любые части

$$V_1 + V_2 = V. \tag{19.1}$$

Если мы для сокращения введем T_1 и T_2, определяемые двумя следующими уравнениями:

$$T_1 = \sum \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\delta V_1}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta V_1}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta V_1}{\delta z}\right)^2\right\},$$

$$T_2 = \sum \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\delta V_2}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta V_2}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta V_2}{\delta z}\right)^2\right\}, \tag{19.2}$$

аналогичными соотношению

$$T = \sum \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\delta V}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta z}\right)^2\right\}, \tag{19.3}$$

которое было использовано для преобразования закона живой силы в уравнении в частных производных (4.1), то получим посредством (19.1)

$$T = T_1 + T_2 + \sum \frac{1}{m}\left(\frac{\delta V_1}{\delta x}\frac{\delta V_2}{\delta x} + \frac{\delta V_1}{\delta y}\frac{\delta V_2}{\delta y} + \frac{\delta V_1}{\delta z}\frac{\delta V_2}{\delta z}\right). \tag{19.4}$$

Это выражение при помощи формулы (2.3) или при помощи закона переменного действия может быть преобразовано далее, так как этот закон дает следующее символическое уравнение:

$$\sum \frac{1}{m}\left(\frac{\delta V}{\delta x}\frac{\delta}{\delta x} + \frac{\delta V}{\delta y}\frac{\delta}{\delta y} + \frac{\delta V}{\delta z}\frac{\delta}{\delta z}\right) = \frac{d}{dt}, \tag{19.5}$$

где символы в обоих членах предпосылаются любой функции переменных координат системы, не обязательно включающей время. Отсюда посредством (19.1) и (19.2) мы получаем

$$\sum \frac{1}{m}\left(\frac{\delta V_1}{\delta x}\frac{\delta V_2}{\delta x} + \frac{\delta V_1}{\delta y}\frac{\delta V_2}{\delta y} + \frac{\delta V_1}{\delta z}\frac{\delta V_2}{\delta z}\right) = \frac{dV_2}{dt} - 2T_2. \tag{19.6}$$

Таким образом, мы находим следующее общее и строгое преобразование уравнения (4.1):

$$\frac{dV_2}{dt} = T - T_1 + T_2. \tag{19.7}$$

Здесь T сохранено ради симметрии и понятности вместо равнозначного выражения $U + H$. Если предположить, как мы вправе сделать, что часть V_1 подобной полной функции V взята такой, что она исчезает со временем, тогда и другая часть V_2 будет обладать этим свойством и может быть выражена определенным интегралом

$$V_2 = \int_0^t (T - T_1 + T_2)dt. \tag{19.8}$$

В более общем виде, если мы применим принципы, изложенные в п. 7, и введем $3n$ отметок $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{3n}$ переменных положений n точек любой системы (будь то прямоугольные координаты или какие бы то ни было их функции), то получим

$$T = F\left(\frac{\delta V}{\delta\eta_1}, \frac{\delta V}{\delta\eta_2}, \ldots, \frac{\delta V}{\delta\eta_{3n}}\right) \tag{19.9}$$

и по аналогии можем принять два следующих определяющих уравнения:

$$T_1 = F\left(\frac{\delta V_1}{\delta\eta_1}, \frac{\delta V_1}{\delta\eta_2}, \ldots, \frac{\delta V_1}{\delta\eta_{3n}}\right),$$

$$T_2 = F\left(\frac{\delta V_2}{\delta\eta_1}, \frac{\delta V_2}{\delta\eta_2}, \ldots, \frac{\delta V_2}{\delta\eta_{3n}}\right). \tag{19.10}$$

При этом функция F всегда является рациональной, целой и однородной второй степени, и поэтому она такова, что (кроме других свойств)

$$T = T_1 + T_2 + \frac{\delta T_1}{\delta(\delta V_1/\delta\eta_1)}\frac{\delta V_2}{\delta\eta_1} + \frac{\delta T_1}{\delta(\delta V_1/\delta\eta_2)}\frac{\delta V_2}{\delta\eta_2} + \ldots + \frac{\delta T_1}{\delta(\delta V_1/\delta\eta_{3n})}\frac{\delta V_2}{\delta\eta_{3n}}, \tag{19.11}$$

$$\frac{\delta T}{\delta(\delta V/\delta\eta_1)} = \frac{\delta T_1}{\delta(\delta V_1/\delta\eta_1)} + \frac{\delta T_2}{\delta(\delta V_2/\delta\eta_1)}, \ldots, \frac{\delta T}{\delta(\delta V/\delta\eta_{3n})} =$$

$$= \frac{\delta T_1}{\delta(\delta V_1/\delta\eta_{3n})} + \frac{\delta T_2}{\delta(\delta V_2/\delta\eta_{3n})} \tag{19.12}$$

и

$$\frac{\delta T_2}{\delta(\delta V_2/\delta\eta_1)}\frac{\delta V_2}{\delta\eta_1} + \frac{\delta V_2}{\delta(\delta V_2/\delta\eta_1)}\frac{\delta V_2}{\delta\eta_2} + \ldots + \frac{\delta T_2}{\delta(\delta V_2/\delta\eta_{3n})}\frac{\delta V_2}{\delta\eta_{3n}} = 2T_2. \tag{19.13}$$

Исходя из принципов, изложенных в п. 8, мы имеем также

$$\frac{\delta T}{\delta(\delta V/\delta\eta_1)} = \eta_1', \quad \frac{\delta T}{\delta(\delta V/\delta\eta_2)} = \eta_2', \ldots, \frac{\delta T}{\delta(\delta V/\delta\eta_{3n})} = \eta_{3n}', \tag{19.14}$$

и поскольку значения $\eta_1', \ldots, \eta_{3n}'$, очевидно, дают символическое уравнение

$$\eta_1'\frac{\delta}{\delta\eta_1} + \eta_2'\frac{\delta}{\delta\eta_2} + \ldots + \eta_{3n}'\frac{\delta}{\delta\eta_{3n}} = \frac{d}{dt}, \tag{19.15}$$

то уравнение (19.7) все еще сохраняет силу относительно введенных более общих отметок положения движущейся системы и все еще приводит к выражению (19.8), если только мы предполагаем, как и раньше, что обе части полной характеристической функции взяты такими, что они исчезают со временем.

На первый взгляд может показаться, что это строгое преобразование (19.8) уравнения в частных производных (4.1) или аналогичного уравнения (7.4) с непрямолинейными координатами вряд ли поможет в раскрытии формы части V_2 характеристической функции V (предполагается, что другая часть V_1 найдена ранее), так как она под знаком интеграла в члене T_2 включает частные производные искомой части V_2. Но, если мы заметим, что эти неизвестные производные входят только своими квадратами и произведениями, то увидим, что это дает общий метод усовершенствования приближения в любой задаче динамики, так как если первая часть V_1 является приближенным значением полной искомой функции V, то вторая часть V_2 будет мала, а член T_2 также будет не только мал, но в общем виде более высокого порядка малости. Поэтому мы в общем улучшим приближенное значение V_1 характеристической функции V путем прибавления к ней определенного интеграла

$$V_2 = \int_0^t (T - T_1)dt, \tag{19.16}$$

хотя в отличие от (19.8) это не есть совершенно строгое выражение остающейся части функции. При вычислении этого интеграла (19.16) для получения улучшенного приближения V_1 мы можем воспользоваться следующими аналогичными приближениями к точным формулам (2.4) и (2.5):

$$\frac{\delta V_1}{\delta a_1} = -m_1 a_1', \quad \frac{\delta V_1}{\delta a_2} = -m_2 a_2', \quad \ldots, \quad \frac{\delta V_1}{\delta a_n} = -m_n a_n',$$

$$\frac{\delta V_1}{\delta b_1} = -m_1 b_1', \quad \frac{\delta V_1}{\delta b_2} = -m_2 b_2', \quad \ldots, \quad \frac{\delta V_1}{\delta b_n} = -m_n b_n',$$

$$\frac{\delta V_1}{\delta c_1} = -m_1 c_1', \quad \frac{\delta V_1}{\delta c_2} = -m_2 c_2', \quad \ldots, \quad \frac{\delta V_1}{\delta c_n} = -m_n c_n', \tag{19.17}$$

и

$$\delta V_1 / \delta H = t, \tag{19.18}$$

или при любых других отметках начального или конечного положения (вместо прямоугольных координат) следующими приближенными формами строгих уравнений (7.3):

$$\frac{\delta V_1}{\delta e_1} = -\frac{\delta T_0}{\delta e_1'}, \quad \frac{\delta V_1}{\delta e_2} = -\frac{\delta T_0}{\delta e_2'}, \quad \ldots, \quad \frac{\delta V_1}{\delta e_{3n}} = -\frac{\delta T_0}{\delta e_{3n}'} \tag{19.19}$$

совместно с формулой (19.18). При помощи этих новых формул способ движения системы выражается приближенно и нестрого.

Эти замечания легко можно распространить на задачи относительного движения и показать, что в таких задачах мы имеем строгое преобразование

$$V_{,2} = \int_0^t (T_, - T_{,1} + T_{,2})dt \tag{19.20}$$

и приближенное выражение

$$V_{,2} = \int_0^t (T_, - T_{,1})dt, \tag{19.21}$$

причем $V_{,1}$ представляет собой приближенное значение функции $V_,$ относительного движения, $V_{,2}$ – поправка этого значения, а $T_{,1}$, $T_{,2}$ являются однородными функциями второй степени, состоящими из частных производных этих двух частей $V_{,1}$, $V_{,2}$ точно так же, как $T_,$ состоит из производных полной функции V. Эти общие замечания могут быть с пользой иллюстрированы конкретным и широким применением.

Применение вышеизложенного метода к случаю тройной или множественной системы с любыми законами притяжения или отталкивания и с одной преобладающей массой

20. Значение (68) живой силы $2T$ системы сводится последовательно к следующим частям: $2T_,^{(1)}, 2T_,^{(2)}, \dots, 2T_,^{(n-1)}$ при предположении, что все $n-1$ первые массы последовательно исчезают, за исключением одной, а именно сводится к части

$$2T_,^{(1)} = \frac{m_1 m_n}{m_1 + m_n}(\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2), \tag{132}$$

когда только m_1 и m_n не исчезают, к части

$$2T_,^{(2)} = \frac{m_2 m_n}{m_2 + m_n}(\xi_2'^2 + \eta_2'^2 + \zeta_2'^2), \tag{133}$$

когда только m_2 и m_n не исчезают, и т.д. и к части

$$2T_,^{(n-1)} = \frac{m_{n-1} m_n}{m_{n-1} + m_n}(\xi_{n-1}'^2 + \eta_{n-1}'^2 + \zeta_{n-1}'^2), \tag{134}$$

которая остается, если сохраняются только две последние массы. Сумма этих $n-1$ частей вообще не равна полной относительной живой силе $2T$ системы при сохранени всех n масс, но мало отличается от нее в том случае, когда первые $n-1$ масс малы по сравнению с последней массой m_n, так как точное значение этой

разницы с помощью (68) и (132), (133) и (134) будет выражаться так [21]:

$$2T_{,}-2T_{,}^{(1)}-2T_{,}^{(2)}-\ \dots\ -2T_{,}^{(n-1)}=$$

$$=\frac{2m_1}{m_n}(T_{,}^{(1)}-T_{,})+\frac{2m_2}{m_n}(T_{,}^{(2)}-T_{,})+\ \dots\ +\frac{2m_{n-1}}{m_n}(T_{,}^{(n-1)}-T_{,})+$$

$$+\frac{1}{m_n}\sum\nolimits_{,} m_i m_k\{(\xi_i'-\xi_k')^2+(\eta_i'-\eta_k')^2+(\zeta_i'-\zeta_k')^2\}. \tag{135}$$

Это выражение второго порядка малости в том случае, когда рассматриваемые $n-1$ массы суть величины первого порядка малости. Обозначим $V_{,}^{(1)},\dots,V_{,}^{(n-1)}$ относительные действия или накопленные относительные живые силы, какими они были бы в $n-1$ бинарных системах $(m_1 m_n)$, $(m_2 m_n)$, ..., $(m_{n-1} m_n)$ без возмущений других малых масс всей множественной системы n точек. При вычислении этих n определенных интегралов

$$V_{,}^{(1)}=\int_0^t 2T_{,}^{(1)}dt,\qquad V_{,}^{(2)}=\int_0^t 2T_{,}^{(2)}dt,\dots,\ V_{,}^{(n-1)}=\int_0^t 2T_{,}^{(n-1)}dt \tag{20.1}$$

пренебрежем этими возмущениями, тогда получим в качестве приближенного значения полного относительного действия $V_{,}$ системы сумму $V_{,1}$ ее значений для этих отдельных бинарных систем:

$$V_{,1}=V_{,}^{(1)}\,V_{,}^{(2)}+\ \dots\ +V_{,}^{(n-1)}. \tag{20.2}$$

Эта сумма согласно нашей теории бинарных систем может быть иначе выражена следующим образом:

$$V_{,1}=\frac{m_1 m_n w^{(1)}}{m_1+m_n}+\frac{m_2 m_n w^{(2)}}{m_2+m_n}+\ \dots\ +\frac{m_{n-1} m_n w^{(n-1)}}{m_{n-1}+m_n}, \tag{20.3}$$

если для краткости напишем

$$w^{(1)}=h^{(1)}\vartheta^{(1)}+\int_{r_0^{(1)}}^{r^{(1)}} r'^{(1)}dr^{(1)},$$

$$w^{(2)}=h^{(2)}\vartheta^{(2)}+\int_{r_0^{(2)}}^{r^{(2)}} r'^{(2)}dr^{(2)},$$

. . . .

$$w^{(n-1)}=h^{(n-1)}\vartheta^{(n-1)}+\int_{r_0^{(n-1)}}^{r^{(n-1)}} r'^{(n-1)}dr^{(n-1)}. \tag{20.4}$$

В этом выражении

$$r'^{(1)} = \pm \left\{ 2(m_1 + m_n) f^{(1)} + 2g^{(1)} - \frac{h^{(1)2}}{r^{(1)2}} \right\}^{1/2},$$

$$r'^{(n-1)} = \pm \left\{ 2(m_{n-1} + m_n) f^{(n-1)} + 2g^{(n-1)} - \frac{h^{(n-1)2}}{r^{(n-1)2}} \right\}^{1/2}, \tag{20.5}$$

$r^{(1)}$, ..., $r^{(n-1)}$ – сокращенные выражения для расстояний $r^{(1,n)}$, ..., $r^{(n-1,n)}$ и $f^{(1)}$, ..., $f^{(n-1)}$ – сокращенные написания для функций $f^{(1,n)}$, ..., $f^{(n-1,n)}$ этих расстояний, производные которых в зависимости от того, являются ли они отрицательными или положительными, выражают законы притяжения или отталкивания; мы ввели также $2n - 2$ вспомогательные величины $h^{(1)}$, $g^{(1)}$, ..., $h^{(n-1)}$, $g^{(n-1)}$, которые должны быть исключены или определены при помощи следующих уравнений условий [22]:

$$\vartheta^{(1)} + \int_{r_0^{(1)}}^{r^{(1)}} \frac{\delta r'^{(1)}}{\delta h^{(1)}} dr^{(1)} = 0,$$

$$\vartheta^{(2)} + \int_{r_0^{(2)}}^{r^{(2)}} \frac{\delta r'^{(2)}}{\delta h^{(2)}} dr^{(2)} = 0,$$

. . . .

$$\vartheta^{(n-1)} + \int_{r_0^{(n-1)}}^{r^{(n-1)}} \frac{\delta r'^{(n-1)}}{\delta h^{(n-1)}} dr^{(n-1)} = 0 \tag{20.6}$$

и

$$\int_{r_0^{(1)}}^{r^{(1)}} \frac{dr^{(1)}}{r'^{(1)}} = \int_{r_0^{(2)}}^{r^{(2)}} \frac{dr^{(2)}}{r'^{(2)}} = \dots = \int_{r_0^{(n-1)}}^{r^{(n-1)}} \frac{dr^{(n-1)}}{r'^{(n-1)}}, \tag{20.7}$$

или

$$\frac{\delta w^{(1)}}{\delta g^{(1)}} = \frac{\delta w^{(2)}}{\delta g^{(2)}} = \dots = \frac{\delta w^{(n-1)}}{\delta g^{(n-1)}}, \tag{20.8}$$

вместе с последним условием

$$\frac{m_1 g^{(1)}}{m_1 + m_n} + \frac{m_2 g^{(2)}}{m_2 + m_n} + \frac{m_3 g^{(3)}}{m_3 + m_n} + \dots + \frac{m_{n-1} g^{(n-1)}}{m_{n-1} + m_n} = \frac{H}{m_n}. \tag{20.9}$$

Мы обозначили через $\vartheta^{(1)}$, ..., $\vartheta^{(n-1)}$ углы, которые конечные расстояния $r^{(1)}$, ..., $r^{(n-1)}$ первых $n - 1$ точек от последней или n-й точки системы образуют с начальными расстояниями, а именно соответственно с $r_0^{(1)}$, ..., $r_0^{(n-1)}$. Вариация суммы

$V_{,1}$ будет вследствие равенства (20.3)

$$\delta V_{,1} = \frac{m_1 m_n \delta w^{(1)}}{m_1 + m_n} + \frac{m_2 m_n \delta w^{(2)}}{m_2 + m_n} + \ldots + \frac{m_{n-1} m_n \delta w^{(n-1)}}{m_{n-1} + m_n}, \tag{20.10}$$

где при помощи уравнений условий мы можем рассматривать все вспомогательные величины $h^{(1)}, g^{(1)}, \ldots, h^{(n-1)}, g^{(n-1)}$ как постоянные, если $H_,$ считается заданным.

Таким образом, та часть вариации которая зависит от вариаций конечных относительных координат, может быть написана в следующем виде:

$$\delta_{\xi,\eta,\zeta} V_{,1} = \frac{m_1 m_n}{m_1 + m_n}\left(\frac{\delta w^{(1)}}{\delta \xi_1}\delta\xi_1 + \frac{\delta w^{(1)}}{\delta \eta_1}\delta\eta_1 + \frac{\delta w^{(1)}}{\delta \zeta_1}\delta\zeta_1\right) +$$

$$+ \frac{m_2 m_n}{m_2 + m_n}\left(\frac{\delta w^{(2)}}{\delta \xi_2}\delta\xi_2 + \frac{\delta w^{(2)}}{\delta \eta_2}\delta\eta_2 + \frac{\delta w^{(2)}}{\delta \zeta_2}\delta\zeta_2\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{m_{n-1} m_n}{m_{n-1} + m_n}\left(\frac{\delta w^{(n-1)}}{\delta \xi_{n-1}}\delta\xi_{n-1} + \frac{\delta w^{(n-1)}}{\delta \eta_{n-1}}\delta\eta_{n-1} + \frac{\delta w^{(n-1)}}{\delta \zeta_{n-1}}\delta\zeta_{n-1}\right). \tag{20.11}$$

Из уравнений (20.4), (20.5) или посредством теории бинарных систем мы получаем точно:

$$\left(\frac{\delta w^{(1)}}{\delta \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta w^{(1)}}{\delta \eta_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta w^{(1)}}{\delta \zeta_1}\right)^2 = 2(m_1 + m_n) f^{(1)} + 2g^{(1)},$$

$$\left(\frac{\delta w^{(2)}}{\delta \xi_2}\right)^2 + \left(\frac{\delta w^{(2)}}{\delta \eta_2}\right)^2 + \left(\frac{\delta w^{(2)}}{\delta \zeta_2}\right)^2 = 2(m_2 + m_n) f^{(2)} + 2g^{(2)},$$

. . . .

$$\left(\frac{\delta w^{(n-1)}}{\delta \xi_{n-1}}\right)^2 + \left(\frac{\delta w^{(n-1)}}{\delta \eta_{n-1}}\right)^2 + \left(\frac{\delta w^{(n-1)}}{\delta \zeta_{n-1}}\right)^2 = 2(m_{n-1} + m_n) f^{(n-1)} + 2g^{(n-1)}, \tag{20.12}$$

и точный закон относительной живой силы для всей множественной системы будет иметь вид (50)

$$T_, = U + H_,,$$

где

$$U = m_n(m_1 f^{(1)} + m_2 f^{(2)} + \ldots + m_{n-1} f^{(n-1)}) + \sum\nolimits_, m_i m_k f^{(i,k)}, \tag{20.13}$$

и [23]

$$T_, = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_n}\right)\left\{\left(\frac{\delta V_,}{\delta\xi_1}\right)^2+\left(\frac{\delta V_,}{\delta\eta_1}\right)^2+\left(\frac{\delta V_,}{\delta\zeta_1}\right)^2\right\}+$$

$$+\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_n}\right)\left\{\left(\frac{\delta V_,}{\delta\xi_2}\right)^2+\left(\frac{\delta V_,}{\delta\eta_2}\right)^2+\left(\frac{\delta V_,}{\delta\zeta_2}\right)^2\right\}+\ \ldots$$

$$\ldots+\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_{n-1}}+\frac{1}{m_n}\right)\left\{\left(\frac{\delta V_,}{\delta\xi_{n-1}}\right)^2+\left(\frac{\delta V_,}{\delta\eta_{n-1}}\right)^2+\left(\frac{\delta V_,}{\delta\zeta_{n-1}}\right)^2\right\}+$$

$$+\ \frac{1}{m_n}\sum\nolimits_,\left(\frac{\delta V_,}{\delta\xi_i}\frac{\delta V_,}{\delta\xi_k}+\frac{\delta V_,}{\delta\eta_i}\frac{\delta V_,}{\delta\eta_k}+\frac{\delta V_,}{\delta\zeta_i}\frac{\delta V_,}{\delta\zeta_k}\right). \qquad (20.14)$$

Заменяя в последнем выражении производные характеристической функции $V_,$ производными ее первой части $V_{,1}$ и принимая во внимание предыдущие уравнения, мы получим

$$T_{,1} = m_n\sum\nolimits_, m_i f^{(i)} + H_, +$$

$$+m_n\sum\nolimits_, \frac{m_i}{m_n+m_i}\frac{m_k}{m_n+m_k}\left(\frac{\delta w^{(i)}}{\delta\xi_i}\frac{\delta w^{(k)}}{\delta\xi_k}+\frac{\delta w^{(i)}}{\delta\eta_i}\frac{\delta w^{(k)}}{\delta\eta_k}+\frac{\delta w^{(i)}}{\delta\zeta_i}\frac{\delta w^{(k)}}{\delta\zeta_k}\right), \qquad (20.15)$$

и, следовательно,

$$T_, - T_{,1} = \sum\nolimits_, m_i m_k\left\{f^{(i,k)} - \frac{m_n}{(m_n+m_i)(m_n+m_k)}\ \times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\delta w^{(i)}}{\delta\xi_i}\frac{\delta w^{(k)}}{\delta\xi_k}+\frac{\delta w^{(i)}}{\delta\eta_i}\frac{\delta w^{(k)}}{\delta\eta_k}+\frac{\delta w^{(i)}}{\delta\zeta_i}\frac{\delta w^{(k)}}{\delta\zeta_k}\right)\right\}. \qquad (20.16)$$

Отсюда общее преобразование предыдущего пункта строго дает для остающейся части $V_{,2}$ характеристической функции $V_,$ относительного движения системы уравнение

$$V_{,2} = \int_0^t T_{,2}dt + \sum\nolimits_, m_i m_k\int_0^t\left\{f^{(i,k)} - \left(\frac{\delta w^{(i)}}{\delta\xi_i}\frac{\delta w^{(k)}}{\delta\xi_k}+\frac{\delta w^{(i)}}{\delta\eta_i}\frac{\delta w^{(k)}}{\delta\eta_k}+\frac{\delta w^{(i)}}{\delta\zeta_i}\frac{\delta w^{(k)}}{\delta\zeta_k}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{m_n}(m_n+m_i)(m_n+m_k)\right)^{-1}\right\}dt \qquad (20.17)$$

и приближенно – выражение

$$V_{,2} = \sum_{,} m_i m_k \int_0^t \left\{ f^{(i,k)} - \frac{1}{m_n} (\xi_i' \xi_k' + \eta_i' \eta_k' + \zeta_i' \zeta_k') \right\} dt. \tag{20.18}$$

Это последнее выражение мы можем скомбинировать с приближенными формулами, строго применимыми только к бинарным системам:

$$\xi_i' = \frac{\delta w^{(i)}}{\delta \xi_i}, \quad \eta_i' = \frac{\delta w^{(i)}}{\delta \eta_i}, \quad \zeta_i' = \frac{\delta w^{(i)}}{\delta \zeta_i}, \tag{20.19}$$

$$\alpha_i' = -\frac{\delta w^{(i)}}{\delta \alpha_i}, \quad \beta_i' = -\frac{\delta w^{(i)}}{\delta \beta_i}, \quad \gamma_i' = -\frac{\delta w^{(i)}}{\delta \gamma_i}, \tag{20.20}$$

$$t = \frac{\delta w^{(i)}}{\delta g^{(i)}}. \tag{20.21}$$

Мы также имеем для бинарных систем следующие точные дифференциальные уравнения движения второго порядка:

$$\xi_i'' = (m_n + m_i) \frac{\delta f^{(i)}}{\delta \xi_i}, \quad \eta_i'' = (m_n + m_i) \frac{\delta f^{(i)}}{\delta \eta_i}, \quad \zeta_i'' = (m_n + m_i) \frac{\delta f^{(i)}}{\delta \zeta_i}, \tag{20.22}$$

которые позволяют нам различными способами преобразовать приближенное выражение (20.18). Таким образом, в случае тройной системы с любыми законами притяжения или отталкивания, но с одной преобладающей массой m_3 *возмущающая часть* $V_{,2}$ характеристической функции V относительного движения может быть написана в виде

$$V_{,2} = m_1 m_2 W, \tag{20.23}$$

где коэффициент W может быть приближенно выражен следующим образом:

$$W = \int_0^t \left\{ f^{(1,2)} - \frac{1}{m_3} (\xi_1' \xi_2' + \eta_1' \eta_2' + \zeta_1' \zeta_2') \right\} dt, \tag{20.24}$$

или так [24]:

$$W = \int_0^t \left(f^{(1,2)} + \xi_2 \frac{\delta f^{(1)}}{\delta \xi_1} + \eta_2 \frac{\delta f^{(1)}}{\delta \eta_1} + \zeta_2 \frac{\delta f^{(1)}}{\delta \zeta_1} \right) dt -$$

$$- \frac{1}{m_3} \left(\xi_2 \frac{\delta w^{(1)}}{\delta \xi_1} + \eta_2 \frac{\delta w^{(1)}}{\delta \eta_1} + \zeta_2 \frac{\delta w^{(1)}}{\delta \zeta_1} + \alpha_2 \frac{\delta w^{(1)}}{\delta \alpha_1} + \beta_2 \frac{\delta w^{(1)}}{\delta \beta_1} + \gamma_2 \frac{\delta w^{(1)}}{\delta \gamma_1} \right), \tag{20.25}$$

или, наконец,

$$W=\int_0^t\left(f^{(1,2)}+\xi_1\frac{\delta f^{(2)}}{\delta\xi^2}+\eta_1\frac{\delta f^{(2)}}{\delta\eta^2}+\zeta_1\frac{\delta f^{(2)}}{\delta\zeta^2}\right)dt-$$

$$-\frac{1}{m_3}\left(\xi_1\frac{\delta w^{(2)}}{\delta\xi_2}+\eta_1\frac{\delta w^{(2)}}{\delta\eta_2}+\zeta_1\frac{\delta w^{(2)}}{\delta\zeta_2}+\alpha_1\frac{\delta w^{(2)}}{\delta\alpha_2}+\beta_1\frac{\delta w^{(2)}}{\delta\beta_2}+\gamma_1\frac{\delta w^{(2)}}{\delta\gamma_2}\right). \tag{20.26}$$

В общем для множественной системы можно написать

$$V_{,2}=\sum{}_{,}m_i m_k W^{(i,k)} \tag{20.27}$$

и приближенно

$$W^{(i,k)}=\int_0^t\left(f^{(i,k)}+\xi_k\frac{\delta f^{(i)}}{\delta\xi_i}+\eta_k\frac{\delta f^{(i)}}{\delta\eta_i}+\zeta_k\frac{\delta f^{(i)}}{\delta\zeta_i}\right)dt-$$

$$-\frac{1}{m_n}\left(\xi_k\frac{\delta w^{(i)}}{\delta\xi_i}+\eta_k\frac{\delta w^{(i)}}{\delta\eta_i}+\zeta_k\frac{\delta w^{(i)}}{\delta\zeta_i}+\alpha_k\frac{\delta w^{(i)}}{\delta\alpha_i}+\beta_k\frac{\delta w^{(i)}}{\delta\beta_i}+\gamma_k\frac{\delta w^{(i)}}{\delta\gamma_i}\right), \tag{20.28}$$

или

$$W^{(i,k)}=\int_0^t\left(f^{(i,k)}+\xi_i\frac{\delta f^{(k)}}{\delta\xi_k}+\eta_i\frac{\delta f^{(k)}}{\delta\eta_k}+\zeta_i\frac{\delta f^{(k)}}{\delta\zeta_k}\right)dt-$$

$$-\frac{1}{m_n}\left(\xi_i\frac{\delta w^{(k)}}{\delta\xi_k}+\eta_i\frac{\delta w^{(k)}}{\delta\eta_k}+\zeta_i\frac{\delta w^{(k)}}{\delta\zeta_k}+\alpha_i\frac{\delta w^{(k)}}{\delta\alpha_k}+\beta_i\frac{\delta w^{(k)}}{\delta\beta_k}+\gamma_i\frac{\delta w^{(k)}}{\delta\gamma_k}\right). \tag{20.29}$$

Строгий переход от теории бинарных к теории множественных систем посредством возмущающей части полной характеристической функции и приближенные выражения для возмущений

21. Три уравнения (20.20) в том случае, когда вспомогательная постоянная $g^{(i)}$ исключается посредством формулы (20.21), строго представляют (согласно нашей теории) три конечных интеграла трех известных уравнений второго порядка (20.22) для относительного движения бинарной системы $(m_i m_n)$ и дают для такой системы три переменные относительные координаты ξ_i, η_i, ζ_i как функции их начальных значений и начальных скоростей α_i, β_i, γ_i, α'_i, β'_i, γ'_i и времени t. Подобным же образом три уравнения (20.19), по исключении $g^{(i)}$ и посредством (20.21), представляют собой три промежуточных интеграла этих же известных дифференциальных уравнений движения той же бинарной системы. Эти интегралы перестают быть строгими, когда мы вводим возмущения относительного движения этой частной или бинарной системы $(m_i m_n)$, возникающие вследствие притяжений или отталкиваний

других точек m_i всей предполагаемой множественной системы. Однако они могут быть исправлены и представлены точными путем использования остающейся части $V_{,2}$ полной характеристической функции относительного движения V вместе с главной частью приближенного значения $V_{,1}$.

Уравнения (12.3), (12.4) дают строго

$$\xi_i' = \frac{1}{m_i}\frac{\delta V_,}{\delta \xi_i} + \frac{1}{m_n}\sum\nolimits_{,}\frac{\delta V_,}{\delta \xi_i}, \quad \eta_i' = \frac{1}{m_i}\frac{\delta V_,}{\delta \eta_i} + \frac{1}{m_n}\sum\nolimits_{,}\frac{\delta V_,}{\delta \eta_i},$$
$$\zeta_i' = \frac{1}{m_i}\frac{\delta V_,}{\delta \zeta_i} + \frac{1}{m_n}\sum\nolimits_{,}\frac{\delta V_,}{\delta \zeta_i} \tag{21.1}$$

и

$$-\alpha_i' = \frac{1}{m_i}\frac{\delta V_,}{\delta \alpha_i} + \frac{1}{m_n}\sum\nolimits_{,}\frac{\delta V_,}{\delta \alpha_i}, \quad -\beta_i' = \frac{1}{m_i}\frac{\delta V_,}{\delta \beta_i} + \frac{1}{m_n}\sum\nolimits_{,}\frac{\delta V_,}{\delta \beta_i},$$
$$-\gamma_i' = \frac{1}{m_i}\frac{\delta V_,}{\delta \gamma_i} + \frac{1}{m_n}\sum\nolimits_{,}\frac{\delta V_,}{\delta \gamma_i}, \tag{21.2}$$

и, следовательно, используя (20.11), получим

$$\frac{\delta w^{(i)}}{\delta \xi_i} = \xi_i' - \sum\nolimits_{,,}\frac{m_k}{m_k+m_n}\frac{\delta w^{(k)}}{\delta \xi_k} - \frac{1}{m_i}\frac{\delta V_{,2}}{\delta \xi_i} - \frac{1}{m_n}\sum\nolimits_{,}\frac{\delta V_{,2}}{\delta \xi_i},$$
$$\frac{\delta w^{(i)}}{\delta \eta_i} = \eta_i' - \sum\nolimits_{,,}\frac{m_k}{m_k+m_n}\frac{\delta w^{(k)}}{\delta \eta_k} - \frac{1}{m_i}\frac{\delta V_{,2}}{\delta \eta_i} - \frac{1}{m_n}\sum\nolimits_{,}\frac{\delta V_{,2}}{\delta \eta_i},$$
$$\frac{\delta w^{(i)}}{\delta \zeta_i} = \zeta_i' - \sum\nolimits_{,,}\frac{m_k}{m_k+m_n}\frac{\delta w^{(k)}}{\delta \zeta_k} - \frac{1}{m_i}\frac{\delta V_{,2}}{\delta \zeta_i} - \frac{1}{m_n}\sum\nolimits_{,}\frac{\delta V_{,2}}{\delta \zeta_i} \tag{21.3}$$

и аналогично

$$-\frac{\delta w^{(i)}}{\delta \alpha_i} = \alpha_i' + \sum\nolimits_{,,}\frac{m_k}{m_k+m_n}\frac{\delta w^{(k)}}{\delta \alpha_k} + \frac{1}{m_i}\frac{\delta V_{,2}}{\delta \alpha_i} + \frac{1}{m_n}\sum\nolimits_{,}\frac{\delta V_{,2}}{\delta \alpha_i},$$
$$-\frac{\delta w^{(i)}}{\delta \beta_i} = \beta_i' + \sum\nolimits_{,,}\frac{m_k}{m_k+m_n}\frac{\delta w^{(k)}}{\delta \beta_k} + \frac{1}{m_i}\frac{\delta V_{,2}}{\delta \beta_i} + \frac{1}{m_n}\sum\nolimits_{,}\frac{\delta V_{,2}}{\delta \beta_i},$$
$$-\frac{\delta w^{(i)}}{\delta \gamma_i} = \gamma_i' + \sum\nolimits_{,,}\frac{m_k}{m_k+m_n}\frac{\delta w^{(k)}}{\delta \gamma_k} + \frac{1}{m_i}\frac{\delta V_{,2}}{\delta \gamma_i} + \frac{1}{m_n}\sum\nolimits_{,}\frac{\delta V_{,2}}{\delta \gamma_i}. \tag{21.4}$$

При этом знак сумм $\sum_{,,}$ относится только к возмущающим массам m_k, за исключением m_i и m_n, а уравнения (21.3), (21.4) представляют собой точные формулы,

соответствующие приближенным соотношениям (20.19), (20.20). Подобным же образом формула (20.21) для времени движения в бинарной системе, представляющая только приближение, когда система рассматривается как множественная, может быть исправлена на случай возмущения путем прибавления к ней аналогичного члена, выведенного из возмущающей части $V_{,2}$ полной характеристической функции, т.е. путем замены ее выражением

$$t = \frac{\delta w^{(i)}}{\delta g^{(i)}} + \frac{\delta V_{,2}}{\delta H_{,}}, \tag{21.5}$$

что дает для $w^{(i)}$ исправленное и точное выражение

$$\frac{\delta w^{(i)}}{\delta g^{(i)}} = t - \frac{\delta V_{,2}}{\delta H_{,}}. \tag{21.6}$$

При этом предполагается, что здесь $V_{,2}$ выбрано так, чтобы служить точно поправкой $V_{,1}$. Если, следовательно, при помощи бинарных систем или путем исключения $g^{(i)}$ между четырьмя уравнениями (20.20), (20.21) мы выведем выражения для трех переменных относительных координат ξ_i, η_i, ζ_i как функции времени t и шести начальных величин α_i, β_i, γ_i, $\alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i$, а именно:

$$\xi_i = \varphi_1(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i, t),$$

$$\eta_i = \varphi_2(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i, t),$$

$$\zeta_i = \varphi_3(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i, t), \tag{21.7}$$

то будем знать, что следующие соотношения являются строго и тождественно истинными [25]:

$$\xi_i = \varphi_1\left(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, -\frac{\delta w^{(i)}}{\delta \alpha_i}, -\frac{\delta w^{(i)}}{\delta \beta_i}, -\frac{\delta w^{(i)}}{\delta \gamma_i}, \frac{\delta w^{(i)}}{\delta g^{(i)}}\right),$$

$$\eta_i = \varphi_2\left(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, -\frac{\delta w^{(i)}}{\delta \alpha_i}, -\frac{\delta w^{(i)}}{\delta \beta_i}, -\frac{\delta w^{(i)}}{\delta \gamma_i}, \frac{\delta w^{(i)}}{\delta g^{(i)}}\right),$$

$$\zeta_i = \varphi_3\left(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, -\frac{\delta w^{(i)}}{\delta \alpha_i}, -\frac{\delta w^{(i)}}{\delta \beta_i}, -\frac{\delta w^{(i)}}{\delta \gamma_i}, \frac{\delta w^{(i)}}{\delta g^{(i)}}\right). \tag{21.8}$$

Следовательно, эти соотношения будут справедливы и тогда, когда мы подставим вместо четырех производных $w^{(i)}$ их точные значения (21.4) и (21.6) для случая множественной системы. Таким образом, мы можем сохранить для любой множественной системы конечные интегралы (21.7) движения бинарной системы, если только прибавим к начальным компонентам $\alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i$ относительной скорости,

а ко времени t следующие возмущенные члены:

$$\Delta\alpha_i' = \sum\nolimits_{''} \frac{m_k}{m_k + m_n} \frac{\delta w^{(k)}}{\delta\alpha_k} + \frac{1}{m_i} \frac{\delta V_{,2}}{\delta\alpha_i} + \frac{1}{m_n} \sum\nolimits_{'} \frac{\delta V_{,2}}{\delta\alpha_i},$$

$$\Delta\beta_i' = \sum\nolimits_{''} \frac{m_k}{m_k + m_n} \frac{\delta w^{(k)}}{\delta\beta_k} + \frac{1}{m_i} \frac{\delta V_{,2}}{\delta\beta_i} + \frac{1}{m_n} \sum\nolimits_{'} \frac{\delta V_{,2}}{\delta\beta_i},$$

$$\Delta\gamma_i' = \sum\nolimits_{''} \frac{m_k}{m_k + m_n} \frac{\delta w^{(k)}}{\delta\gamma_k} + \frac{1}{m_i} \frac{\delta V_{,2}}{\delta\gamma_i} + \frac{1}{m_n} \sum\nolimits_{'} \frac{\delta V_{,2}}{\delta\gamma_i} \qquad (21.9)$$

и

$$\Delta t = \delta V_{,2} / \delta H_{,}. \qquad (21.10)$$

Таким же образом, так как теория бинарных систем (или исключение $g^{(i)}$ из четырех уравнений (20.19), (20.21)) дала три промежуточных интеграла вида

$$\xi_i' = \psi_1(\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, t),$$

$$\eta_i' = \psi_2(\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, t),$$

$$\zeta_i' = \psi_3(\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, t), \qquad (21.11)$$

можно сделать вывод, что уравнения

$$\frac{\delta w^{(i)}}{\delta\xi_i} = \psi_1\left(\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \frac{\delta w^{(i)}}{\delta g^{(i)}}\right), \quad \frac{\delta w^{(i)}}{\delta\eta_i} = \psi_2\left(\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \frac{\delta w^{(i)}}{\delta g^{(i)}}\right),$$

$$\frac{\delta w^{(i)}}{\delta\zeta_i} = \psi_3\left(\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \frac{\delta w^{(i)}}{\delta g^{(i)}}\right) \qquad (21.12)$$

являются тождественными и, следовательно, должны оставаться истинными, когда при переходе ко множественной системе мы подставляем вместо производных $w^{(i)}$ их точные значения (21.3), (21.6). Поэтому три промежуточных интеграла (21.11) движения бинарной системы могут быть строго приспособлены к случаю множественной системы, если сначала прибавить к времени t возмущающий член (21.10), а затем прибавить к получившимся значениям конечных компонент относительной скорости следующие величины:

$$\Delta\xi_i' = \sum\nolimits_{''} \frac{m_k}{m_k + m_n} \frac{\delta w^{(k)}}{\delta\xi_k} + \frac{1}{m_i} \frac{\delta V_{,2}}{\delta\xi_i} + \frac{1}{m_n} \sum\nolimits_{'} \frac{\delta V_{,2}}{\delta\xi_i},$$

$$\Delta\eta_i' = \sum\nolimits_{''} \frac{m_k}{m_k + m_n} \frac{\delta w^{(k)}}{\delta\eta_k} + \frac{1}{m_i} \frac{\delta V_{,2}}{\delta\eta_i} + \frac{1}{m_n} \sum\nolimits_{'} \frac{\delta V_{,2}}{\delta\eta_i},$$

$$\Delta\zeta_i' = \sum\nolimits_{''} \frac{m_k}{m_k + m_n} \frac{\delta w^{(k)}}{\delta\zeta_k} + \frac{1}{m_i} \frac{\delta V_{,2}}{\delta\zeta_i} + \frac{1}{m_n} \sum\nolimits_{'} \frac{\delta V_{,2}}{\delta\zeta_i}. \qquad (21.13)$$

22. Для того чтобы вывести из этих строгих результатов некоторые полезные приближенные выражения, мы пренебрежем в возмущениях членами второго порядка малости относительно малых масс системы и относительно постоянной $2H$, относительной живой силы, которая, как легко заметить, будет малой того же порядка, что и массы. Тогда возмущения координат, выведенные методом, изложенным выше, будут иметь вид

$$\Delta\xi_i = \frac{\delta\xi_i}{\delta\alpha_i'}\Delta\alpha_i' + \frac{\delta\xi_i}{\delta\beta_i'}\Delta\beta_i' + \frac{\delta\xi_i}{\delta\gamma_i'}\Delta\gamma_i' + \frac{\delta\xi_i}{\delta t}\Delta t,$$

$$\Delta\eta_i = \frac{\delta\eta_i}{\delta\alpha_i'}\Delta\alpha_i' + \frac{\delta\eta_i}{\delta\beta_i'}\Delta\beta_i' + \frac{\delta\eta_i}{\delta\gamma_i'}\Delta\gamma_i' + \frac{\delta\eta_i}{\delta t}\Delta t,$$

$$\Delta\zeta_i = \frac{\delta\zeta_i}{\delta\alpha_i'}\Delta\alpha_i' + \frac{\delta\zeta_i}{\delta\beta_i'}\Delta\beta_i' + \frac{\delta\zeta_i}{\delta\gamma_i'}\Delta\gamma_i' + \frac{\delta\zeta_i}{\delta t}\Delta t. \tag{22.1}$$

В этих выражениях мы можем взамен строгих значений (21.9) для $\Delta\alpha_i'$, $\Delta\beta_i'$, $\Delta\gamma_i'$ применить следующие приближенные значения:

$$\Delta\alpha_i' = \sum\nolimits_{''} \frac{m_k}{m_n}\frac{\delta w^{(k)}}{\delta\alpha_k} + \frac{1}{m_i}\frac{\delta V_{,2}}{\delta\alpha_i},$$

$$\Delta\beta_i' = \sum\nolimits_{''} \frac{m_k}{m_n}\frac{\delta w^{(k)}}{\delta\beta_k} + \frac{1}{m_i}\frac{\delta V_{,2}}{\delta\beta_i},$$

$$\Delta\gamma_i' = \sum\nolimits_{''} \frac{m_k}{m_n}\frac{\delta w^{(k)}}{\delta\gamma_k} + \frac{1}{m_i}\frac{\delta V_{,2}}{\delta\gamma_i}. \tag{22.2}$$

Для вычисления четырех производных

$$\frac{\delta V_{,2}}{\delta\alpha_i},\quad \frac{\delta V_{,2}}{\delta\beta_i},\quad \frac{\delta V_{,2}}{\delta\gamma_i},\quad \frac{\delta V_{,2}}{\delta H},$$

которые входят в значения (22.2), (21.10), мы можем рассматривать $V_{,2}$ при помощи (20.27), (20.29) и на основе теории бинарных систем как функцию начальных и конечных относительных координат и начальных компонент относительных скоростей, включая также явно время t и $n-2$ вспомогательные величины $g^{(k)}$. Затем мы должны рассматривать эти начальные компоненты, вспомогательные величины и время как зависящие, в свою очередь, от начальных и конечных координат и от H.

Однако, исходя из изложенных выше принципов, нетрудно доказать, что при таком подходе к t и $g^{(k)}$ их вариации при данной степени приближения

будут [26]

$$\delta t = \frac{\sum_{,} m(\delta^2 w / \delta g^2)^{-1} \delta_{,} (\delta w / \delta g) + \delta H_{,}}{\sum_{,} m(\delta^2 w / \delta g^2)^{-1}} \tag{22.3}$$

и

$$\delta g^{(k)} = \left(\frac{\delta^2 w^{(k)}}{\delta g^{(k)2}} \right)^{-1} \left(\delta t - \delta_{,} \frac{\delta w^{(k)}}{\delta g^{(k)}} \right), \tag{22.4}$$

причем знак варьирования $\delta_{,}$ относится только к начальным и конечным координатам, а

$$\frac{\delta^2 w^{(i)}}{\delta g^{(i)2}} \frac{\delta \xi_i}{\delta t} = \frac{\delta^2 w^{(i)}}{\delta \alpha_i \delta g^{(i)}} \frac{\delta \xi_i}{\delta \alpha_i'} + \frac{\delta^2 w^{(i)}}{\delta \beta_i \delta g^{(i)}} \frac{\delta \xi_i}{\delta \beta_i'} + \frac{\delta^2 w^{(i)}}{\delta \gamma_i \delta g^{(i)}} \frac{\delta \xi_i}{\delta \gamma_i'}, \tag{22.5}$$

и аналогично для соотношений между производными двух других координат η_i, ζ_i. Из этого следует, что t и $g^{(k)}$ и, следовательно, $\alpha_k', \beta_k', \gamma_k'$ могут рассматриваться как постоянные, когда мы берем вариацию возмущающей части $V_{,2}$ для вычисления возмущений (22.1), и что члены, включающие Δt, уничтожаются другими членами. Поэтому мы можем просто написать [27]:

$$\Delta \xi_i = \frac{\delta \xi_i}{\delta \alpha_i'} \Delta \alpha_i' + \frac{\delta \xi_i}{\delta \beta_i'} \Delta \beta_i' + \frac{\delta \xi_i}{\delta \gamma_i'} \Delta \gamma_i',$$

$$\Delta \eta_i = \frac{\delta \eta_i}{\delta \alpha_i'} \Delta \alpha_i' + \frac{\delta \eta_i}{\delta \beta_i'} \Delta \beta_i' + \frac{\delta \eta_i}{\delta \gamma_i'} \Delta \gamma_i',$$

$$\Delta \zeta_i = \frac{\delta \zeta_i}{\delta \alpha_i'} \Delta \alpha_i' + \frac{\delta \zeta_i}{\delta \beta_i'} \Delta \beta_i' + \frac{\delta \zeta_i}{\delta \gamma_i'} \Delta \gamma_i', \tag{22.6}$$

применяя для $\Delta \alpha_i'$ следующее новое выражение:

$$\Delta \alpha_i' = \sum_{,,} m_k \left\{ \int_0^t \frac{\delta R^{(i,k)}}{\delta \alpha_i} dt + \frac{\delta \alpha_i'}{\delta \alpha_i} \int_0^t \frac{\delta R^{(i,k)}}{\delta \alpha_i'} dt + \frac{\delta \beta_i'}{\delta \alpha_i} \int_0^t \frac{\delta R^{(i,k)}}{\delta \beta_i'} dt + \right.$$
$$\left. + \frac{\delta \gamma_i'}{\delta \alpha_i} \int_0^t \frac{\delta R^{(i,k)}}{\delta \gamma_i'} dt \right\} \tag{22.7}$$

совместно с аналогичными выражениями для $\Delta \beta_i'$, $\Delta \gamma_i'$, в которых знак суммы $\sum_{,,}$ относится к возмущающим массам, а величина

$$R^{(i,k)} = f^{(i,k)} + \xi_i \frac{\delta f^{(k)}}{\delta \xi_k} + \eta_i \frac{\delta f^{(k)}}{\delta \eta_k} + \zeta_i \frac{\delta f^{(k)}}{\delta \zeta_k}, \tag{22.8}$$

согласно теории бинарных систем, рассматривается как зависящая от α_i, β_i, γ_i, α'_i, β'_i, γ'_i α_k, β_k, γ_k, $\alpha'_k, \beta'_k, \gamma'_k$, t, в то время как $\alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i$, на основе тех же правил считаются зависящими от α_i, β_i, γ_i, ξ_i, η_i, ζ_i и t. Можно также легко показать, что имеет место уравнение [28]

$$\frac{\delta\xi_i}{\delta\alpha'_i}\frac{\delta\alpha'_i}{\delta\alpha_i}+\frac{\delta\xi_i}{\delta\beta'_i}\frac{\delta\alpha'_i}{\delta\beta_i}+\frac{\delta\xi_i}{\delta\gamma'_i}\frac{\delta\alpha'_i}{\delta\gamma_i}=-\frac{\delta\xi_i}{\delta\alpha_i} \tag{22.9}$$

и другие аналогичные уравнения; поэтому возмущения координат можно выразить следующим образом:

$$\Delta\xi_i=\sum\nolimits_{''} m_k\left\{\frac{\delta\xi_i}{\delta\alpha'_i}\int_0^t\frac{\delta R^{(i,k)}}{\delta\alpha_i}dt-\frac{\delta\xi_i}{\delta\alpha_i}\int_0^t\frac{\delta R^{(i,k)}}{\delta\alpha'_i}dt+\frac{\delta\xi_i}{\delta\beta'_i}\int_0^t\frac{\delta R^{(i,k)}}{\delta\beta_i}dt-\right.$$
$$\left.-\frac{\delta\xi_i}{\delta\beta_i}\int_0^t\frac{\delta R^{(i,k)}}{\delta\beta'_i}dt+\frac{\delta\xi_i}{\delta\gamma'_i}\int_0^t\frac{\delta R^{(i,k)}}{\delta\gamma_i}dt-\frac{\delta\xi_i}{\delta\gamma_i}\int_0^t\frac{\delta R^{(i,k)}}{\delta\gamma'_i}dt\right\}, \tag{22.10}$$

а возмущения двух других координат могут быть выражены аналогично.

На основе тех же принципов получается, что, когда мы берем первые производные этих возмущений (22.10), интегралы могут рассматриваться как постоянные; поэтому мы можем либо представить перемену места возмущенной точки m_i на ее относительной орбите вокруг m_n путем незначительного изменения начальных компонент скорости без изменения начального положения с последующим использованием правил для бинарных систем, либо мы можем немедленно вычислить возмущения положения и скорости путем применения тех же правил, немедленно изменив также начальное положение и начальную скорость. Если мы применим первый из этих двух методов, мы должны воспользоваться выражениями (22.7), которые могут быть записаны следующим образом:

$$\Delta\alpha'_i=\sum\nolimits_{''} m_k\frac{\delta}{\delta\alpha_i}\int_0^t R^{(i,k)}dt,\qquad \Delta\beta'_i=\sum\nolimits_{''} m_k\frac{\delta}{\delta\beta_i}\int_0^t R^{(i,k)}dt,$$
$$\Delta\gamma'_i=\sum\nolimits_{''} m_k\frac{\delta}{\delta\gamma_i}\int_0^t R^{(i,k)}dt; \tag{22.11}$$

если же мы примем последний метод, мы должны взять

$$\Delta\alpha'_i=\sum\nolimits_{''} m_k\int_0^t\frac{\delta R^{(i,k)}}{\delta\alpha_i}dt,\qquad \Delta\alpha_i=-\sum\nolimits_{''} m_k\int_0^t\frac{\delta R^{(i,k)}}{\delta\alpha'_i}dt,$$
$$\Delta\beta'_i=\sum\nolimits_{''} m_k\int_0^t\frac{\delta R^{(i,k)}}{\delta\beta_i}dt,\qquad \Delta\beta_i=-\sum\nolimits_{''} m_k\int_0^t\frac{\delta R^{(i,k)}}{\delta\beta'_i}dt,$$
$$\Delta\gamma'_i=\sum\nolimits_{''} m_k\int_0^t\frac{\delta R^{(i,k)}}{\delta\gamma_i}dt,\qquad \Delta\gamma_i=-\sum\nolimits_{''} m_k\int_0^t\frac{\delta R^{(i,k)}}{\delta\gamma'_i}dt. \tag{22.12}$$

Лагранж пользовался последним методом, но первый подсказывается непосредственно принципами настоящей работы [29].

Введение времени в общем виде в выражение характеристической функции в любой задаче динамики

23. Прежде чем мы закончим этот очерк нашего общего метода в динамике, уместно будет вкратце остановиться на преобразовании характеристической функции, которое может быть использовано во всех ее приложениях. Это преобразование состоит в том, что мы пишем [30]

$$V = tH + S \tag{23.1}$$

и рассматриваем часть S, а именно определенный интеграл

$$S = \int_0^t (T+U)dt \tag{23.2}$$

как функцию начальных и конечных координат и времени, вариация которого, согласно нашему закону переменного действия, будет такова:

$$\delta S = -H\delta t + \sum m(x'\delta x - a'\delta a + y'\delta y - b'\delta b + z'\delta z - c'\delta c). \tag{23.3}$$

Отсюда частные производные первого порядка этой вспомогательной функции S [31] будут

$$\frac{\delta S}{\delta t} = -H, \tag{23.4}$$

$$\frac{\delta S}{\delta x_i} = m_i x_i', \qquad \frac{\delta S}{\delta y_i} = m_i y_i', \qquad \frac{\delta S}{\delta z_i} = m_i z_i' \tag{23.5}$$

и

$$\frac{\delta S}{\delta a_i} = -m_i a_i', \qquad \frac{\delta S}{\delta b_i} = -m_i b_i', \qquad \frac{\delta S}{\delta c_i} = -m_i c_i'. \tag{23.6}$$

Эти последние выражения (23.6) представляют собой формы конечных интегралов движения любой системы, соответствующие результату исключения H из уравнений (2.4) и (2.5), а выражения (23.5) представляют собой формы промежуточных интегралов, во многих отношениях более удобные, чем применявшиеся ранее.

24. Рамки данной работы не позволяют нам развить следствия, вытекающие из этих новых выражений. Мы можем отметить только, что вспомогательная функция S должна удовлетворять двум следующим уравнениям в частных производных пер-

вого порядка, аналогичным уравнениям (4.1) и (4.2) и выведенным из последних:

$$\frac{\delta S}{\delta t}+\sum\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\delta S}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta S}{\delta y}\right)^2+\left(\frac{\delta S}{\delta z}\right)^2\right\}=U \tag{24.1}$$

и

$$\frac{\delta S}{\delta t}+\sum\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\delta S}{\delta a}\right)^2+\left(\frac{\delta S}{\delta b}\right)^2+\left(\frac{\delta S}{\delta c}\right)^2\right\}=U_0, \tag{24.2}$$

и для того, чтобы корректировать приближенное значение S_1 значения S при интегрировании этих уравнений, или для того, чтобы найти остающуюся часть S_2, если

$$S=S_1+S_2, \tag{24.3}$$

мы можем воспользоваться символическим уравнением

$$\frac{d}{dt}=\frac{\delta}{\delta t}+\sum\frac{1}{m}\left(\frac{\delta S}{\delta x}\frac{\delta}{\delta x}+\frac{\delta S}{\delta y}\frac{\delta}{\delta y}+\frac{\delta S}{\delta z}\frac{\delta}{\delta z}\right), \tag{24.4}$$

которое строго дает

$$\frac{dS_2}{dt}=U-U_1+\sum\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\delta S_2}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta S_2}{\delta y}\right)^2+\left(\frac{\delta S_2}{\delta z}\right)^2\right\}, \tag{24.5}$$

если мы по аналогии принимаем определение

$$U_1=\frac{\delta S_1}{\delta t}+\sum\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\delta S_1}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta S_1}{\delta y}\right)^2+\left(\frac{\delta S_1}{\delta z}\right)^2\right\}, \tag{24.6}$$

и, следовательно, приближенно

$$S_2=\int_0^t (U-U_1)dt. \tag{24.7}$$

При этом части S_1, S_2 берутся такими, чтобы они исчезали со временем. Эти замечания легко могут быть распространены на полярные координаты и другие отметки положения. Они дают новый и лучший способ изучения орбит и возмущений системы посредством новой и лучшей формы функции и метода, изложенного в данной работе.

ВТОРОЙ ОЧЕРК ОБ ОБЩЕМ МЕТОДЕ В ДИНАМИКЕ*

Вводные замечания

В предыдущей работе содержался общий метод сведéния всех самых важных задач динамики к изучению одной характеристической функции, одного центрального, или главного, соотношения. В заключение этой работы указывалось, что многих исключений, требуемых этим методом в его первоначальной концепции, можно было бы избежать путем общего преобразования, вводящего время прямо в часть S полной характеристической функции V; теперь же мы предполагаем сосредоточить внимание главным образом на этой части S и обозначить ее как *главную функцию*. Свойства этой части или функции S, о которых вкратце упоминалось в предыдущей работе, здесь будут разобраны более полно, в особенности в отношении ее применений к вопросам возмущений, в которых она позволяет обойтись без многих утомительных и сложных процессов и дает нам возможность точно выразить возмущенную конфигурацию системы посредством правил невозмущенного движения, если только мы соответствующим образом изменим начальные компоненты скоростей.

В данной работе в несколько более общем виде рассматривается способ, впервые разработанный Лагранжем [32] и затем усовершенствованный Пуассоном, строгого распространения на возмущенное движение правил невозмущенного движения путем постепенного варьирования элементов, вдвое превосходящих по численности число координат или других отметок положения системы; кроме того, общий метод вычисления, ранее применявшийся автором данной работы к аналогичным вопросам оптики и динамики, теперь применяется к интегрированию уравнений, определяющих эти элементы. Этот общий метод основан главным образом на сочетании принципов вариаций с принципами частных производных и может создать (когда он будет завершен трудами других аналитиков) отдельную отрасль алгебры, которую можно назвать *исчислением главных функций* [33], так как во всех основных применениях алгебры к физике и в очень широкой области чисто математических вопросов оно сводит определение многих взаимосвязанных функций к отысканию и изучению одного главного или центрального соотношения. В применении к интегрированию уравнений переменных элементов он подсказывает, как показано здесь, рассмотрение некоторой *функции элементов*, которые могут быть выбраны разнообразными способами и могут быть либо строго определены, либо к ним можно по крайней мере приблизиться с неограниченной точностью при помощи следствий из общего метода.

Для иллюстрации всех этих новых общих процессов, и в особенности тех, которые связаны с проблемами возмущения, эти элементы использованы в данной работе при рассмотрении простого примера, подсказываемого движениями метательных снарядов, причем их параболический путь рассматривается как невозму-

---

* Second essay on a general method in dynamics // Philos. Trans. Roy. Soc. 1835. Pt. 1. P. 95–144 [H. 2. P. 162–212]. Перевод Н.В. Александровой и Л.С. Полака.

щенный. В качестве более сложного примера здесь снова рассматривается по новому способу проблема определения движений тройной или множественной системы при любых законах притяжения или отталкивания и с одной преобладающей массой, затрагивавшаяся в предыдущей работе. Для этого составляются и интегрируются дифференциальные уравнения новой группы переменных величин, полностью отличных теоретически (хотя мало отличающихся на практике) от элементов, применяемых Лагранжем. Новая группа переменных имеет то преимущество, что дифференциалы всех новых элементов и для возмущенных и для невозмущенных масс могут быть выражены производными *одной* возмущающей функции.

Преобразования дифференциальных уравнений движения притягивающейся или отталкивающейся системы

1. Математикам хорошо известно, что дифференциальные уравнения движения любой системы свободных точек, притягивающих или отталкивающих друг друга в зависимости от какой-либо функции их расстояний и не возмущенных какой-либо внешней силой, могут быть выражены следующей формулой:

$$\sum m(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z) = \delta U, \tag{1}$$

причем знак суммы Σ распространяется на все точки системы; m является для всякой такой точки постоянной, называемой ее массой; x, y, z являются ее прямоугольными координатами, x'', y'', z'' представляют собой ускорения, или вторые производные по времени; $\delta x, \delta y, \delta z$ – любые произвольные бесконечно малые вариации этих координат, а U – некоторая *силовая функция*, введенная в динамику Лагранжем, включающая массы и взаимные расстояния нескольких точек системы. Если число этих точек равно n, то формула (1) может быть разложена на $3n$ обычных дифференциальных уравнений второго порядка между координатами и временем:

$$m_i x_i'' = \frac{\delta U}{\delta x_i}, \qquad m_i y_i'' = \frac{\delta U}{\delta y_i}, \qquad m_i z_i'' = \frac{\delta U}{\delta z_i}. \tag{2}$$

Интегрирование этих дифференциальных уравнений движения притягивающейся или отталкивающейся системы или некоторое преобразование их представляет собой главную и, возможно, единственную проблему математической динамики.

2. Для того чтобы облегчить и обобщить решение этой проблемы, полезно предварительно выразить $3n$ прямоугольных координат x, y, z как функции $3n$ других более общих отметок положения $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_{3n}$; тогда дифференциальные уравнения движения принимают следующую, более общую форму, открытую Лагранжем:

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta \eta_i'} - \frac{\delta T}{\delta \eta_i} = \frac{\delta U}{\delta \eta_i}, \tag{3}$$

где

$$T = \tfrac{1}{2}\sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2). \tag{4}$$

В самом деле, из уравнений (2) или (1) следует уравнение

$$\frac{\delta U}{\delta\eta_i}=\sum m\left(x''\frac{\delta x}{\delta\eta_i}+y''\frac{\delta y}{\delta\eta_i}+z''\frac{\delta z}{\delta\eta_i}\right)=\frac{d}{dt}\left(\sum m\left(x'\frac{\delta x}{\delta\eta_i}+y'\frac{\delta y}{\delta\eta_i}+z'\frac{\delta z}{\delta\eta_i}\right)\right)-$$
$$-\sum m\left(x'\frac{d}{dt}\frac{\delta x}{\delta\eta_i}+y'\frac{d}{dt}\frac{\delta y}{\delta\eta_i}+z'\frac{d}{dt}\frac{\delta z}{\delta\eta_i}\right),\tag{5}$$

в котором

$$\sum m\left(x'\frac{\delta x}{\delta\eta_i}+y'\frac{\delta y}{\delta\eta_i}+z'\frac{\delta z}{\delta\eta_i}\right)=\sum m\left(x'\frac{\delta x'}{\delta\eta_i'}+y'\frac{\delta y'}{\delta\eta_i'}+z'\frac{\delta z'}{\delta\eta_i'}\right)=\frac{\delta T}{\delta\eta_i'}\tag{6}$$

и

$$\sum m\left(x'\frac{d}{dt}\frac{\delta x}{\delta\eta_i}+y'\frac{d}{dt}\frac{\delta y}{\delta\eta_i}+z'\frac{d}{dt}\frac{\delta z}{\delta\eta_i}\right)=\sum m\left(x'\frac{\delta x'}{\delta\eta_i}+y'\frac{\delta y'}{\delta\eta_i}+z'\frac{\delta z'}{\delta\eta_i}\right)=\frac{\delta T}{\delta\eta_i},\tag{7}$$

при этом T рассматривается здесь как функция $6n$ величин η' и η, полученных путем введения в ее определение (4) значений

$$x'=\eta_1'\frac{\delta x}{\delta\eta_1}+\eta_2'\frac{\delta x}{\delta\eta_2}+\ \dots\ +\eta_{3n}'\frac{\delta x}{\delta\eta_{3n}}\quad \text{и т. д.}\tag{8}$$

Иное доказательство этого важного преобразования дано Лагранжем в "Mécanique analytique".

3. Поскольку T является однородной функцией второй степени относительно η', она должна удовлетворять условию

$$2T=\sum\eta'\frac{\delta T}{\delta\eta'},\tag{9}$$

а поскольку вариация той же функции T, очевидно, может быть выражена следующим образом:

$$\delta T=\sum\left(\frac{\delta T}{\delta\eta'}\delta\eta'+\frac{\delta T}{\delta\eta}\delta\eta\right),\tag{10}$$

то эта вариация может быть также выражена и следующим образом:

$$\delta T=\sum\left(\eta'\delta\frac{\delta T}{\delta\eta'}-\frac{\delta T}{\delta\eta}\delta\eta\right).\tag{11}$$

Тогда если мы для краткости положим

$$\frac{\delta T}{\delta\eta_1'}=\varpi_1,\ \dots,\ \frac{\delta T}{\delta\eta_{3n}'}=\varpi_{3n}\tag{12}$$

и будем рассматривать T (как мы это вправе сделать) как функцию следующего вида:

$$T = F(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_{3n}, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{3n}), \tag{13}$$

то

$$\frac{\delta F}{\delta \overline{\omega}_1} = \eta_1', \ldots, \frac{\delta F}{\delta \overline{\omega}_{3n}} = \eta_{3n}' \tag{14}$$

и

$$\frac{\delta F}{\delta \eta_1} = -\frac{\delta T}{\delta \eta_1}, \ldots, \frac{\delta F}{\delta \eta_{3n}} = -\frac{\delta T}{\delta \eta_{3n}}, \tag{15}$$

и, следовательно, общее уравнение (3) может быть преобразовано так:

$$\frac{d\overline{\omega}_i}{dt} = \frac{\delta(U - F)}{\delta \eta_i}. \tag{16}$$

Теперь если мы для краткости введем следующее выражение для H:

$$H = F - U = F(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_{3n}, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{3n}) - U(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{3n}), \tag{17}$$

то подойдем к новому способу представления дифференциальных уравнений движения системы n точек, притягивающих или отталкивающих одна другую [34]:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\eta_1}{dt} = \frac{\delta H}{\delta \overline{\omega}_1}, \qquad \frac{d\overline{\omega}_1}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta \eta_1},\\
&\frac{d\eta_2}{dt} = \frac{\delta H}{\delta \overline{\omega}_2}, \qquad \frac{d\overline{\omega}_2}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta \eta_2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{d\eta_{3n}}{dt} = \frac{\delta H}{\delta \overline{\omega}_{3n}}, \qquad \frac{d\overline{\omega}_{3n}}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta \eta_{3n}}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

С этой точки зрения задача математической динамики для системы n точек заключается в том, чтобы проинтегрировать систему (3.1) $6n$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, содержащих $6n$ переменных η_i, $\overline{\omega}_i$ и время t, а решение этой задачи должно состоять в определении этих $6n$ переменных как функций времени и их собственных начальных значений, которые мы можем обозначить как e_i, p_i. Все эти $6n$ функций или $6n$ соотношений для определения этих функций могут быть выражены в совершенно общем и строгом виде методом, предложенным в предыдущей работе, или следующим упрощенным процессом.

Интегрирование уравнений движения посредством одной главной функции

4. Если мы возьмем вариацию определенного интеграла

$$S=\int_0^t\left(\sum\overline{\omega}\,\frac{\delta H}{\delta\overline{\omega}}-H\right)dt, \tag{18}$$

не варьируя t или dt, то при помощи вариационного исчисления найдем

$$\delta S=\int_0^t\delta S'\,dt, \tag{19}$$

где

$$S'=\sum\overline{\omega}\,\frac{\delta H}{\delta\overline{\omega}}-H \tag{20}$$

и, следовательно [35],

$$\delta S'=\sum\left(\overline{\omega}\delta\,\frac{\delta H}{\delta\overline{\omega}}-\frac{\delta H}{\delta\eta}\,\delta\eta\right), \tag{21}$$

т.е. с помощью уравнений движения (3.1) получим

$$\delta S'=\sum\left(\overline{\omega}\delta\,\frac{d\eta}{dt}+\frac{d\overline{\omega}}{dt}\,\delta\eta\right)=\frac{d}{dt}\sum\overline{\omega}\,\delta\eta. \tag{22}$$

Вариация интеграла S имеет вид

$$\delta S=\sum(\overline{\omega}\,\delta\eta-p\delta e), \tag{23}$$

p и e по-прежнему являются начальными значениями. Когда S рассматривается как функция $6n$ величин η_i, e_i (включающая также время), она разлагается на следующие $6n$ выражений:

$$\overline{\omega}_1=\frac{\delta S}{\delta\eta_1},\qquad p_1=-\frac{\delta S}{\delta e_1},$$

$$\overline{\omega}_2=\frac{\delta S}{\delta\eta_2},\qquad p_2=-\frac{\delta S}{\delta e_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overline{\omega}_{3n}=\frac{\delta S}{\delta\eta_{3n}},\qquad p_{3n}=-\frac{\delta S}{\delta e_{3n}}, \tag{4.1}$$

которые, очевидно, являются формами искомых интегралов $6n$ дифференциальных уравнений движения (3.1), содержащими только одну неизвестную функцию S. Таким образом, трудности решения задач математической динамики сводятся к отысканию и изучению этой одной функции S, которая поэтому может быть названа *главной функцией* движения системы.

Эта функция S была введена в первой работе в виде $S = \int_0^t (T+U)dt$, причем символы T и U имели в этой форме свои обычные значения. Следует отметить, что когда S выражается этим определенным интегралом, условия для обращения в нуль его вариации (если заданы начальные и конечные координаты и время) в точности представляют собой дифференциальные уравнения движения (3) в форме, данной Лагранжем. Поэтому вариация этого определенного интеграла S обладает тем двойным свойством, что она дает дифференциальные уравнения движения для любых преобразованных координат, когда крайние положения рассматриваются как закрепленные, а также дает интегралы этих дифференциальных уравнений, когда крайние положения рассматриваются как переменные [36].

5. Хотя функция S, по-видимому, заслуживает названия *главной функции*, данного ей здесь, так как она служит для того, чтобы как будто самым простым образом выразить интегралы уравнений движения и самые дифференциальные уравнения, тем не менее анализ приводит к другим функциям, которые также могут быть использованы для выражения этих уравнений. Так, если мы напишем

$$Q = \int_0^t \left(-\sum \eta \frac{\delta H}{\delta \eta} + H\right) dt \tag{24}$$

и возьмем вариацию этого интеграла Q, не варьируя t или dt, то при помощи процесса, аналогичного рассмотренному, найдем

$$\delta Q = \sum (\eta \delta \overline{\omega} - e \delta p), \tag{25}$$

так что если мы будем рассматривать Q как функцию $6n$ величин $\overline{\omega}_i$, p_i и времени, то получим $6n$ выражений

$$\eta_i = +\frac{\delta Q}{\delta \overline{\omega}_i}, \qquad e_i = -\frac{\delta Q}{\delta p_i}, \tag{26}$$

которые представляют собой другие формы интегралов уравнений движения (3.1), включающие Q вместо S. Мы можем воспользоваться также интегралом

$$V = \int_0^t \sum \overline{\omega} \frac{\delta H}{\delta \overline{\omega}} dt = \sum \int_e^\eta \overline{\omega} \, d\eta, \tag{27}$$

который в предыдущей работе был назван *характеристической функцией*. Вариация его, если рассматривать этот интеграл как функцию $6n + 1$ величин η_i, e_i, H, будет

$$\delta V = \sum (\overline{\omega} \delta \eta - p \delta e) + t \delta H. \tag{28}$$

Все эти функции S, Q, V связаны таким образом, что формы и свойства любой из них могут быть выведены из форм и свойств другой [37].

Исследование пары дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, которым должна удовлетворять главная функция

6. При образовании вариации (23) или частных производных (3.1) главной функции S вариация времени была опущена. Однако производную $\delta S/\delta t$, соответствующую этой вариации, легко можно вычислить, поскольку очевидное уравнение

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\delta S}{\delta t}+\sum\frac{\delta S}{\delta\eta}\frac{d\eta}{dt} \tag{29}$$

с помощью (20) и (3.1), (4.1) дает

$$\frac{\delta S}{\delta t}=S'-\sum\overline{\omega}\frac{\delta H}{\delta\overline{\omega}}=-H. \tag{30}$$

Также очевидно, что эта производная или величина $-H$ является постоянной, т.е. не меняющейся во время движения системы, так как дифференциальные уравнения движения (3.1) дают

$$\frac{dH}{dt}=\sum\left(\frac{\delta H}{\delta\eta}\frac{d\eta}{dt}+\frac{\delta H}{\delta\overline{\omega}}\frac{d\overline{\omega}}{dt}\right)=0. \tag{31}$$

Поэтому, если мы займемся уравнением (17) и отметим, что функция F по необходимости является рациональной, целой и однородной второй степени по отношению к величинам $\overline{\omega}_i$, то увидим, что главная функция S должна удовлетворять двум следующим уравнениям между ее частными производными первого порядка, которые представляют главное средство для раскрытия ее вида [38]:

$$\frac{\delta S}{\delta t}+F\left(\frac{\delta S}{\delta\eta_1},\ \frac{\delta S}{\delta\eta_2},\ldots,\ \frac{\delta S}{\delta\eta_{3n}},\ \eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{3n}\right)=U(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{3n}),$$

$$\frac{\delta S}{\delta t}+F\left(\frac{\delta S}{\delta e_1},\ \frac{\delta S}{\delta e_2},\ldots,\ \frac{\delta S}{\delta e_{3n}},\ e_1,e_2,\ldots,e_{3n}\right)=U(e_1,e_2,\ldots,e_{3n}). \tag{6.1}$$

И наоборот, если известна форма S, то из нее можно вывести формы этих уравнений (6.1) путем исключения величин e или η из выражений ее частных производных. Таким образом, мы можем вернуться от главной функции S к функциям F и U и, следовательно, к выражению H и к уравнениям движения (3.1).

Аналогичные замечания относятся к функциям Q и V, которые должны удовлетворять уравнениям в частных производных

$$-\frac{\delta Q}{\delta t}+F\left(\overline{\omega}_1,\overline{\omega}_2,\ldots,\overline{\omega}_{3n},\ \frac{\delta Q}{\delta\overline{\omega}_1},\ \frac{\delta Q}{\delta\overline{\omega}_2},\ldots,\ \frac{\delta Q}{\delta\overline{\omega}_{3n}}\right)=U\left(\frac{\delta Q}{\delta\overline{\omega}_1},\ \frac{\delta Q}{\delta\overline{\omega}_2},\ldots,\ \frac{\delta Q}{\delta\overline{\omega}_{3n}}\right),$$

$$-\frac{\delta Q}{\delta t}+F\left(p_1,p_2,\ldots,p_{3n},\ -\frac{\delta Q}{\delta p_1},\ -\frac{\delta Q}{\delta p_2},\ldots,\ -\frac{\delta Q}{\delta p_{3n}}\right)=$$

$$= U\left(-\frac{\delta Q}{\delta p_1}, -\frac{\delta Q}{\delta p_2}, \ldots, -\frac{\delta Q}{\delta p_{3n}}\right) \tag{32}$$

и

$$F\left(\frac{\delta V}{\delta \eta_1}, \frac{\delta V}{\delta \eta_2}, \ldots, \frac{\delta V}{\delta \eta_{3n}}, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{3n}\right) = H + U(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{3n}),$$

$$F\left(\frac{\delta V}{\delta e_1}, \frac{\delta V}{\delta e_2}, \ldots, \frac{\delta V}{\delta e_{3n}}, e_1, e_2, \ldots, e_{3n}\right) = H + U(e_1, e_2, \ldots, e_{3n}). \tag{33}$$

Общий метод усовершенствования приближенного выражения главной функции в любой задаче динамики

7. Если мы разделим главную функцию S на любые две части

$$S_1 + S_2 = S \tag{34}$$

и подставим их сумму вместо S в первое уравнение (6.1), то функция F в силу ее рациональной, целой и однородной формы и степени может быть выражена следующим, новым образом:

$$F\left(\frac{\delta S}{\delta \eta_1}, \ldots, \frac{\delta S}{\delta \eta_{3n}}, \eta_1, \ldots, \eta_{3n}\right) = F\left(\frac{\delta S_1}{\delta \eta_1}, \ldots, \frac{\delta S_1}{\delta \eta_{3n}}, \eta_1, \ldots, \eta_{3n}\right) +$$

$$+ F'\left(\frac{\delta S_1}{\delta \eta_1}\right)\frac{\delta S_2}{\delta \eta_1} + \ldots + F'\left(\frac{\delta S_1}{\delta \eta_{3n}}\right)\frac{\delta S_2}{\delta \eta_{3n}} + F\left(\frac{\delta S_2}{\delta \eta_1}, \ldots, \frac{\delta S_2}{\delta \eta_{3n}}, \eta_1, \ldots, \eta_{3n}\right) =$$

$$= F\left(\frac{\delta S_1}{\delta \eta_1}, \ldots, \frac{\delta S_1}{\delta \eta_{3n}}, \eta_1, \ldots, \eta_{3n}\right) - F\left(\frac{\delta S_2}{\delta \eta_1}, \ldots, \frac{\delta S_2}{\delta \eta_{3n}}, \eta_1, \ldots, \eta_{3n}\right) +$$

$$+ F'\left(\frac{\delta S_1}{\delta \eta_1}\right)\frac{\delta S_2}{\delta \eta_1} + \ldots + F'\left(\frac{\delta S}{\delta \eta_{3n}}\right)\frac{\delta S_2}{\delta \eta_{3n}}, \tag{35}$$

так как [39]

$$F'\left(\frac{\delta S_1}{\delta \eta_i}\right) = F'\left(\frac{\delta S}{\delta \eta_i}\right) - F'\left(\frac{\delta S_2}{\delta \eta_i}\right) \tag{36}$$

и

$$\sum F'\left(\frac{\delta S_2}{\delta \eta}\right)\frac{\delta S_2}{\delta \eta} = 2F\left(\frac{\delta S_2}{\delta \eta_1}, \ldots, \frac{\delta S_2}{\delta \eta_{3n}}, \eta_1, \ldots, \eta_{3n}\right). \tag{37}$$

Поскольку с помощью (3.1) и (4.1) мы получим

$$F'\left(\frac{\delta S}{\delta \eta_i}\right) = F'(\overline{\omega}_i) = \frac{\delta H}{\delta \overline{\omega}_i} = \frac{\delta \eta_i}{dt}, \tag{38}$$

то легко преобразуем первое уравнение (6.1) в следующее:

$$\frac{dS_2}{dt} = -\frac{\delta S_1}{\delta t} + U(\eta_1, \ldots, \eta_{3n}) - F\left(\frac{\delta S_1}{\delta \eta_1}, \ldots, \frac{\delta S_1}{\delta \eta_{3n}}, \eta_1, \ldots, \eta_{3n}\right) +$$

$$+ F\left(\frac{\delta S_2}{\delta \eta_1}, \ldots, \frac{\delta S_2}{\delta \eta_{3n}}, \eta_1, \ldots, \eta_{3n}\right), \tag{7.1}$$

что дает строго

$$S_2 = \int_0^t \left\{-\frac{\delta S_1}{\delta t} + U(\eta_1, \ldots, \eta_{3n}) - F\left(\frac{\delta S_1}{\delta \eta_1}, \ldots, \frac{\delta S_1}{\delta \eta_{3n}}, \eta_1, \ldots, \eta_{3n}\right)\right\} dt +$$

$$+ \int_0^t F\left(\frac{\delta S_2}{\delta \eta_1}, \ldots, \frac{\delta S_2}{\delta \eta_{3n}}, \eta_1, \ldots, \eta_{3n}\right) dt, \tag{7.2}$$

если только предположить, что обе части S_1, S_2, подобно полной главной функции S, подобраны так, чтобы они исчезали со временем.

Это общее и строгое преобразование представляет общий метод усовершенствования приближенного выражения главной функции S в любой задаче динамики, так как если часть S_1 является таким приближенным выражением, то остающаяся часть S_2 будет мала, а однородная функция F, включающая квадраты и произведения производных этой малой части во втором определенном интеграле (7.2), будет вообще также мала и более высокого порядка малости. Поэтому мы можем в общем пренебречь этим вторым определенным интегралом при переходе ко второму приближению и улучшить первое приближенное выражение S_1 путем прибавления к нему следующей поправки:

$$\Delta S_1 = \int_0^t \left\{-\frac{\delta S_1}{\delta t} + U(\eta_1, \ldots, \eta_{3n}) - F\left(\frac{\delta S_1}{\delta \eta_1}, \ldots, \frac{\delta S_1}{\delta \eta_{3n}}, \eta_1, \ldots, \eta_{3n}\right)\right\} dt; \tag{7.3}$$

при вычислении этого определенного интеграла мы можем воспользоваться следующими приближенными формами для интегралов уравнений движения:

$$p_1 = -\frac{\delta S_1}{\delta e_1}, \qquad p_2 = -\frac{\delta S_1}{\delta e_2}, \ldots, \; p_{3n} = -\frac{\delta S_1}{\delta e_{3n}}, \tag{39}$$

выражая при их помощи сперва переменные η_i как функции времени и $6n$ постоянных e_i, p_i и затем исключив после интегрирования $3n$ величин p_i при помощи тех же приближенных формул. Когда же мы получим таким образом улучшенное

выражение или второе приближенное значение $S_1 + \Delta S_1$ для главной функции S, оно может быть подобным же образом подставлено вместо первого приближенного значения S_1, с тем чтобы получить еще бо́льшее приближение; этот процесс можно повторять бесконечно.

Аналогичный процесс можно применить для бесконечного улучшения первого приближенного выражения функций Q или V.

Строгая теория возмущений, основанная на свойствах возмущающей части полной главной функции

8. Если мы разделим выражение H (17) на две любые части того же рода

$$H_1 + H_2 = H, \tag{40}$$

где

$$H_1 = F_1(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_{3n}, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{3n}) - U_1(\eta_1, \ldots, \eta_{3n}) \tag{41}$$

и

$$H_2 = F_2(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_{3n}, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{3n}) - U_2(\eta_1, \ldots, \eta_{3n}), \tag{42}$$

причем функции F_1, F_2, U_1, U_2 таковы, что

$$F_1 + F_2 = F, \quad U_1 + U_2 = U, \tag{43}$$

то дифференциальные уравнения движения (3.1) примут вид

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \frac{\delta H_1}{\delta \overline{\omega}_i} + \frac{\delta H_2}{\delta \overline{\omega}_i}, \qquad \frac{d\overline{\omega}_i}{dt} = -\frac{\delta H_1}{\delta \eta_i} - \frac{\delta H_2}{\delta \eta_i}, \tag{8.1}$$

и если часть H_2 и ее производные малы, то они не будут сильно отличаться от дифференциальных уравнений

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \frac{\delta H_1}{\delta \overline{\omega}_i}, \qquad \frac{d\overline{\omega}_i}{dt} = -\frac{\delta H_1}{\delta \eta_i}, \tag{8.2}$$

так что строгие интегралы последней системы будут приближенными интегралами первой. Тогда путем соответствующего подбора преобладающего члена H_1 мы во всех случаях образуем и строго проинтегрируем такую систему $6n$ уравнений (8.2), дающую выражения для $6n$ переменных $\eta_i, \overline{\omega}_i$ в качестве функций времени t и их собственных начальных значений e_i, p_i, которые могут быть написаны так:

$$\eta_i = \varphi_i(t, e_1, e_2, \ldots, e_{3n}, p_1, p_2, \ldots, p_{3n}), \tag{44}$$

$$\overline{\omega}_i = \psi_i(t, e_1, e_2, \ldots, e_{3n}, p_1, p_2, \ldots, p_{3n}). \tag{45}$$

Более простое движение, определенное таким образом посредством точных интегралов (8.2), может быть названо *невозмущенным движением* предложенной системы n точек, а более сложное движение, выраженное точными интегралами (8.1), может

по контрасту быть названо *возмущенным движением* этой системы. Переход же от одной системы к другой можно обозначить как задачу возмущения.

9. Для того чтобы осуществить этот переход, надо отметить, что поскольку дифференциальные уравнения невозмущенного движения (8.2) имеют тот же вид, что и первоначальные уравнения (3.1), их интегралы могут быть выражены аналогично, т.е. следующим образом:

$$\overline{\varpi}_i = \delta S_1 / \delta\eta_i, \qquad p_i = -\delta S_1 / \delta e_i, \tag{9.1}$$

причем S_1 здесь представляет собой *главную функцию невозмущенного дижения,* или определенный интеграл

$$S_1 = \int_0^t \left(\sum \overline{\varpi}\frac{\delta H_1}{\delta\overline{\varpi}} - H_1\right)dt, \tag{46}$$

рассматриваемый как функция времени и величин η_i, e_i. Подобным же образом если мы представим полную главную функцию возмущенного движения как $S_1 + S_2$, то строгие интегралы (8.1) могут быть выражены посредством (4.1) следующим образом:

$$\overline{\varpi}_i = \frac{\delta S_1}{\delta\eta_i} + \frac{\delta S_2}{\delta\eta_i}, \qquad p_i = -\frac{\delta S_1}{\delta e_i} - \frac{\delta S_2}{\delta e_i}. \tag{9.2}$$

Сравнивая формы (44) со второй группой уравнений (9.1) для интегралов невозмущенного движения, мы найдем, что следующие соотношения между функциями φ_i, S_1 должны быть строго и тождественно истинными:

$$\eta_i = \varphi_i\left(t, e_1, e_2, \ldots, e_{3n}, -\frac{\delta S_1}{\delta e_1}, -\frac{\delta S_1}{\delta e_2}, \ldots, -\frac{\delta S_1}{\delta e_{3n}}\right) \tag{47}$$

и что, следовательно, при помощи равенств (9.2) интегралы возмущенного движения могут быть представлены в следующем виде:

$$\eta_i = \varphi_i\left(t, e_1, e_2, \ldots, e_{3n}, p_1 + \frac{\delta S_2}{\delta e_1}, p_2 + \frac{\delta S_2}{\delta e_2}, \ldots, p_{3n} + \frac{\delta S_2}{\delta e_{3n}}\right). \tag{9.3}$$

Таким образом, мы можем точно вычислить возмущенные переменные η_i по правилам невозмущенного движения (44), если мы, не меняя времени t или начальных значений e_i этих переменных, которые определяют начальную конфигурацию, изменим (в общем) начальные скорости и направления путем прибавления к элементам p_i следующих возмущающих членов:

$$\Delta p_1 = \frac{\delta S_2}{\delta e_1}, \quad \Delta p_2 = \frac{\delta S_2}{\delta e_2}, \quad \ldots, \quad \Delta p_{3n} = \frac{\delta S_2}{\delta e_{3n}}. \tag{9.4}$$

Это представляет собой замечательный результат, охватывающий всю теорию возмущений. Мы можем вывести из него частные производные η_i' или связанные с

ними величины $\overline{\omega}_i$, которые определяют возмущенные направления и скорости движения в любой момент времени. Однако аналогичное рассуждение тотчас дает общее выражение

$$\overline{\omega}_i = \frac{\delta S_2}{\delta \eta_i} + \psi_1\left(t, e_1, e_2, \ldots, e_{3n}, p_1 + \frac{\delta S_2}{\delta e_1}, p_2 + \frac{\delta S_2}{\delta e_2}, \ldots, p_{3n} + \frac{\delta S_2}{\delta e_{3n}}\right), \tag{9.5}$$

откуда следует, что после того, как мы изменим начальные скорости и направления или элементы p_i, как и раньше, при помощи возмущающих членов (9.4), можно применить правила невозмущенного движения (45) для вычисления скоростей и направлений во время t или переменных величин $\overline{\omega}$, если, в конце концов, применить к вычисленным таким образом величинам следующие новые поправки на возмущение:

$$\Delta\overline{\omega}_1 = \frac{\delta S_2}{\delta \eta_1}, \quad \Delta\overline{\omega}_2 = \frac{\delta S_2}{\delta \eta_2}, \quad \ldots, \quad \Delta\overline{\omega}_{3n} = \frac{\delta S_2}{\delta \eta_{3n}}. \tag{9.6}$$

Приближенные выражения, выведенные из предыдущей строгой теории

10. Изложенная выше теория дает действительно точные выражения для возмущений при переходе от более простого движения (8.2) или (9.1) к более сложному движению (8.1) или (9.2). Однако может показаться, что эти выражения малополезны, поскольку они включают неизвестную *возмущающую функцию* S_2 (а именно возмущенную часть полной главной функции S), а также неизвестные возмущенные координаты или отметки положения η_i. Однако в последнее время было показано, что во всех случаях, когда найдена первая приближенная форма главной функции S, как, например, здесь главная функция S_1 невозмущенного движения, поправка S_2 может быть в общем внесена с бесконечно увеличивающейся точностью. Но так как возмущения (9.4) и (9.6) включают возмущенные координаты η_i, лишь поскольку они входят в производные этой малой возмущающей функции S_2, то очевидно, что можно подставить вместо этих координат сперва их невозмущенные значения, а затем корректировать результат путем подстановки их более точных выражений.

11. Функция S_1 невозмущенного движения должна строго удовлетворять двум уравнениям в частных производных формы (6.1), а именно:

$$\frac{\delta S_1}{\delta t} + F_1\left(\frac{\delta S_1}{\delta \eta_1}, \ldots, \frac{\delta S_1}{\delta \eta_{3n}}, \eta_1, \ldots, \eta_{3n}\right) = U_1(\eta_1, \ldots, \eta_{3n}),$$

$$\frac{\delta S_1}{\delta t} + F_1\left(\frac{\delta S_1}{\delta e_1}, \ldots, \frac{\delta S_1}{\delta e_{3n}}, e_1, \ldots, e_{3n}\right) = U_1(e_1, \ldots, e_{3n}), \tag{11.1}$$

и, следовательно, согласно равенству (7.1) возмущающая функция S_2 должна строго

удовлетворять условию

$$\frac{dS_2}{dt}=U_2(\eta_1,\ldots,\eta_{3n})-F_2\left(\frac{\delta S_1}{\delta\eta_1},\ldots,\frac{\delta S_1}{\delta\eta_{3n}},\eta_1,\ldots,\eta_{3n}\right)+$$

$$+F\left(\frac{\delta S_2}{\delta\eta_1},\ldots,\frac{\delta S_2}{\delta\eta_{3n}},\eta_1,\ldots,\eta_{3n}\right) \qquad (11.2)$$

и может (ввиду того что F является однородной функцией первой степени) быть приближенно выражена так:

$$S_2=\int_0^t\left\{U_2(\eta_1,\ldots,\eta_{3n})-F_2\left(\frac{\delta S_1}{\delta\eta_1},\ldots,\frac{\delta S_1}{\delta\eta_{3n}},\eta_1,\ldots,\eta_{3n}\right)\right\}dt, \qquad (11.3)$$

или с помощью равенства (9.1) так:

$$S_2=\int_0^t\left\{U_2(\eta_1,\ldots,\eta_{3n})-F_2(\overline{\omega}_1,\ldots,\overline{\omega}_{3n},\eta_1,\ldots,\eta_{3n})\right\}dt, \qquad (11.4)$$

т.е., принимая во внимание равенство (42),

$$S_2=-\int_0^t H_2dt. \qquad (11.5)$$

В этом выражении H_2 дается непосредственно как функция переменных величин $\eta_i,\overline{\omega}_i$, но может рассматриваться в том же порядке приближения, как известная функция их начальных значений e_i, p_i и времени t, полученных путем подстановки вместо $\eta_i,\overline{\omega}_i$ их невозмущенных значений (44), (45) в качестве функций этих величин. Поэтому вариация H_2 может быть выражена одним из следующих двух способов:

$$\delta H_2=\sum\left(\frac{\delta H_2}{\delta\eta}\delta\eta+\frac{\delta H_2}{\delta\overline{\omega}}\delta\overline{\omega}\right) \qquad (48)$$

и

$$\delta H_2=\sum\left(\frac{\delta H_2}{\delta e}\delta e+\frac{\delta H_2}{\delta p}\delta p\right)+\frac{\delta H_2}{\delta t}\delta t. \qquad (49)$$

Принимая последнюю точку зрения и проведя интегрирование (11.5) по времени, причем элементы e_i, p_i рассматриваются как постоянные, мы должны затем подставить вместо величин p_i их невозмущенные выражения (39) или (9.1) и тогда мы найдем для вариации возмущающей функции S_2 следующее выражение [40]:

$$\delta S_2=-H_2\delta t+\sum\left(-\delta e\int_0^t\frac{\delta H_2}{\delta e}dt+\delta\frac{\delta S_1}{\delta e}\int_0^t\frac{\delta H_2}{\delta p}dt\right). \qquad (50)$$

Это позволяет нам преобразовать выражения (9.4) и (9.6), характеризующие возмущение, в следующие приближенные выражения:

$$\Delta p_i = -\int_0^t \frac{\delta H_2}{\delta e_i} dt + \sum \frac{\delta^2 S_1}{\delta e \delta e_i} \int_0^t \frac{\delta H_2}{\delta p_i} dt \tag{11.6}$$

и

$$\Delta \overline{\omega}_i = \sum \frac{\delta^2 S_1}{\delta e \delta \eta_i} \int_0^t \frac{\delta H_2}{\delta p} dt, \tag{11.7}$$

включающие только функции и величины, которые, согласно теории невозмущенного движения, могут рассматриваться как заданные.

12. С той же степенью приближения, если мы напишем вариацию выражения (44) невозмущенной координаты η_i в виде

$$\delta\eta_i = \frac{\delta\eta_i}{\delta t}\delta t + \sum\left(\frac{\delta\eta_i}{\delta e}\delta e + \frac{\delta\eta_i}{\delta p}\delta p\right), \tag{51}$$

то возмущение этой координаты может быть выражено так:

$$\delta\eta_i = \sum \frac{\delta\eta_i}{\delta p}\Delta p, \tag{12.1}$$

т.е. согласно (11.6)

$$\begin{aligned}\Delta\eta_i = &-\frac{\delta\eta_i}{\delta p_1}\int_0^t \frac{\delta H_2}{\delta e_1}dt - \frac{\delta\eta_i}{\delta p_2}\int_0^t \frac{\delta H_2}{\delta e_2}dt - \ldots - \frac{\delta\eta_i}{\delta p_{3n}}\int_0^t \frac{\delta H_2}{\delta e_{3n}}dt + \\ &+\left(\frac{\delta\eta_i}{\delta p_1}\frac{\delta^2 S_1}{\delta e_1^2} + \frac{\delta\eta_i}{\delta p_2}\frac{\delta^2 S_1}{\delta e_1 \delta e_2} + \ldots + \frac{\delta\eta_i}{\delta p_{3n}}\frac{\delta^2 S_1}{\delta e_1 \delta e_{3n}}\right)\int_0^t \frac{\delta H_2}{\delta p_1}dt + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+\left(\frac{\delta\eta_i}{\delta p_1}\frac{\delta^2 S_1}{\delta e_{3n}\delta e_1} + \frac{\delta\eta_i}{\delta p_2}\frac{\delta^2 S_1}{\delta e_{3n} \delta e_2} + \ldots + \frac{\delta\eta_i}{\delta p_{3n}}\frac{\delta^2 S_1}{\delta e_{3n}^2}\right)\int_0^t \frac{\delta H_2}{\delta p_{3n}}dt.\end{aligned} \tag{52}$$

Кроме того, тождество (47) дает [41]

$$\frac{\delta\eta_i}{\delta e_k} = \frac{\delta\eta_i}{\delta p_1}\frac{\delta^2 S_1}{\delta e_k \delta e_1} + \frac{\delta\eta_i}{\delta p_2}\frac{\delta^2 S_1}{\delta e_k \delta e_2} + \ldots + \frac{\delta\eta_i}{\delta p_{3n}}\frac{\delta^2 S_1}{\delta e_k \delta e_{3n}}. \tag{53}$$

Поэтому выражение (52) может быть сокращено так:

$$\begin{aligned}\Delta\eta_i = &-\frac{\delta\eta_i}{\delta p_1}\int_0^t \frac{\delta H_2}{\delta e_1}dt - \ldots - \frac{\delta\eta_i}{\delta p_{3n}}\int_0^t \frac{\delta H_2}{\delta e_{3n}}dt + \\ &+\frac{\delta\eta_i}{\delta e_1}\int_0^t \frac{\delta H_2}{\delta p_1}dt + \ldots + \frac{\delta\eta_i}{\delta e_{3n}}\int_0^t \frac{\delta H}{\delta p_{3n}}dt.\end{aligned} \tag{12.2}$$

Это показывает, что вместо точных возмущенных членов (9.4) мы можем приближенно воспользоваться выражением

$$\Delta p_i = -\int_0^t \frac{\delta H_2}{\delta e_i} dt, \tag{12.3}$$

чтобы вычислить возмущенную конфигурацию в любое время t на основе правил невозмущенного движения, при условии, что, помимо такого изменения начальных скоростей и направлений, мы изменим также начальную конфигурацию согласно формуле

$$\Delta e_i = \int_0^t \frac{\delta H_2}{\delta p_i} dt. \tag{12.4}$$

Нетрудно будет подобным же образом вычислить приближенные выражения для возмущенных направлений и скоростей в любое время t; однако лучше другим способом рассмотреть строгую теорию возмущения.

Другая строгая теория возмущения, основанная на свойствах возмущающей части константы закона живой силы и дающая формулы для варьирования элементов, аналогичные уже известным

13. Предположим, что теория невозмущенного движения дала нам $6n$ постоянных e_i, p_i или любые комбинации их $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{6n}$ в качестве функций $6n$ переменных $\eta_i, \overline{\omega}_i$ и времени t, которые могут быть обозначены так:

$$\kappa_i = \chi_i(t, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{3n}, \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_{3n}). \tag{54}$$

Эти элементы κ_i дают выражения для переменных $\eta_i, \overline{\omega}_i$ в терминах этих элементов и времени, аналогичные (44) и (45), которые могут быть записаны аналогичным образом:

$$\eta_i = \varphi_i(t, \kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{6n}), \quad \overline{\omega}_i = \psi_i(t, \kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{6n}), \tag{55}$$

Тогда полная производная каждого такого *элемента* или функции κ_i, взятая по времени (в том виде, в каком она явно и неявно входит в выражение (54)), должна обращаться в нуль в невозмущенном движении. Таким образом, посредством дифференциальных уравнений такого движения (8.2) должно строго и тождественно иметь место следующее общее соотношение:

$$\frac{\delta \kappa_i}{\delta t} + \sum \left(\frac{\delta \kappa_i}{\delta \eta} \frac{\delta H_1}{\delta \overline{\omega}} - \frac{\delta \kappa_i}{\delta \overline{\omega}} \frac{\delta H_1}{\delta \eta} \right) = 0. \tag{56}$$

Если, переходя к возмущенному движению, мы сохраняем уравнение (54) в качестве *определения* величины κ_i, то эта величина больше не будет постоянной, но будет продолжать удовлетворять обратным соотношениям (55) и может быть по аналогии названа *переменным элементом* движения, а ее полная производная по

времени посредством тождества (56) и при помощи дифференциальных уравнений возмущенного движения (8.1) может быть строго выражена следующим образом:

$$\frac{d\kappa_i}{dt} = \sum \left(\frac{\delta\kappa_i}{\delta\eta} \frac{\delta H_2}{\delta\overline{\omega}} - \frac{\delta\kappa_i}{\delta\overline{\omega}} \frac{\delta H_2}{\delta\eta} \right). \tag{13.1}$$

14. Этот результат (13.1) заключает в себе всю теорию последовательного варьирования элементов возмущенного движения системы; однако он может быть подвергнут полезному преобразованию путем подстановки выражений (55) для переменных $\eta_i, \overline{\omega}_i$ как функций времени и элементов движения, поскольку это приведет к системе $6n$ точных и простых дифференциальных уравнений первого порядка между этими переменными элементами и временем. Таким образом, если мы выразим величину H_2 как функцию этих последних переменных, то ее вариация δH_2 принимает следующий, новый вид:

$$\delta H_2 = \sum \frac{\delta H_2}{\delta\kappa} \delta\kappa + \frac{\delta H_2}{\delta t} \delta t, \tag{57}$$

что дает при сопоставлении с формой (48) и при помощи (54)

$$\frac{\delta H_2}{\delta\eta_r} = \sum \frac{\delta H_2}{\delta\kappa} \frac{\delta\kappa}{\delta\eta_r}, \qquad \frac{\delta H_2}{\delta\overline{\omega}_r} = \sum \frac{\delta H_2}{\delta\kappa} \frac{\delta\kappa}{\delta\overline{\omega}_r}. \tag{58}$$

Таким образом, общее уравнение (13.1) преобразуется в следующее:

$$\frac{d\kappa_i}{dt} = a_{i,1} \frac{\delta H_2}{\delta\kappa_1} + a_{i,2} \frac{\delta H_2}{\delta\kappa_2} + \ldots + a_{i,6n} \frac{\delta H_2}{\delta\kappa_{6n}}, \tag{14.1}$$

где

$$a_{i,s} = \sum \left(\frac{\delta\kappa_i}{\delta\eta} \frac{\delta\kappa_s}{\delta\overline{\omega}} - \frac{\delta\kappa_i}{\delta\overline{\omega}} \frac{\delta\kappa_s}{\delta\eta} \right), \tag{14.2}$$

так что остается только исключить переменные $\eta, \overline{\omega}$ из выражений этих последних коэффициентов. Замечательно то, что исключение устраняет также символ t и оставляет коэффициенты $a_{i,s}$, выраженные как функции одних элементов κ и не включающие явно времени. Эта общая теорема динамики, которая, возможно, немного шире, чем аналогичные результаты, полученные Лагранжем и Пуассоном, поскольку в ней возмущающие члены в дифференциальных уравнениях движения не зависят обязательно от конфигурации, может быть исследована следующим образом.

15. Знак суммы Σ в (14.2), подобно тому же знаку без индекса в других аналогичных уравнениях, в которых он уже встречался в этой работе, относится не к явно введенным индексам, какими, например, здесь являются i, s в величине, подлежащей суммированию, а к индексу, который не введен явно и который здесь можно обозначить r. Таким образом, если мы для большей ясности введем этот

переменный индекс и его пределы, то выражение (14.2) превратится в следующее:

$$a_{i,s}=\sum_{r=1}^{3n}\left(\frac{\delta\kappa_i}{\delta\eta_r}\frac{\delta\kappa_s}{\delta\overline{\omega}_r}-\frac{\delta\kappa_i}{\delta\overline{\omega}_r}\frac{\delta\kappa_s}{\delta\eta_r}\right), \tag{59}$$

а его полная производная по времени может быть разделена на следующие две части:

$$\frac{d}{dt}a_{i,s}=\sum_{r=1}^{3n}\left(\frac{\delta\kappa_i}{\delta\eta_r}\frac{d}{dt}\frac{\delta\kappa_s}{\delta\overline{\omega}_r}-\frac{\delta\kappa_s}{\delta\eta_r}\frac{d}{dt}\frac{\delta\kappa_i}{\delta\overline{\omega}_r}\right)+$$
$$+\sum_{r=1}^{3n}\left(\frac{\delta\kappa_s}{\delta\overline{\omega}_r}\frac{d}{dt}\frac{\delta\kappa_i}{\delta\eta_r}-\frac{\delta\kappa_i}{\delta\overline{\omega}_r}\frac{d}{dt}\frac{\delta\kappa_s}{\delta\eta_r}\right), \tag{60}$$

которые мы далее будем вычислять отдельно и затем сложим вместе. Согласно определению (54) и дифференциальным уравнениям возмущенного движения (8.1) имеем равенства

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta\kappa_i}{\delta\overline{\omega}_r}=\frac{\delta^2\kappa_i}{\delta t\delta\overline{\omega}_r}+\sum_{u=1}^{3n}\left\{\frac{\delta^2\kappa_i}{\delta\eta_u\delta\overline{\omega}_r}\left(\frac{\delta H_1}{\delta\overline{\omega}_u}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\delta H_2}{\delta\overline{\omega}_u}\right)-\frac{\delta^2\kappa_i}{\delta\overline{\omega}_u\delta\overline{\omega}_r}\left(\frac{\delta H_1}{\delta\eta_u}+\frac{\delta H_2}{\delta\eta_u}\right)\right\}, \tag{61}$$

в которых вследствие тождества (56)

$$\frac{\delta^2\kappa_i}{\delta t\,\delta\overline{\omega}_r}=-\frac{\delta}{\delta\overline{\omega}_r}\sum_{u=1}^{3n}\left(\frac{\delta\kappa_i}{\delta\eta_u}\frac{\delta H_1}{\delta\overline{\omega}_u}-\frac{\delta\kappa_i}{\delta\overline{\omega}_u}\frac{\delta H_1}{\delta\eta_u}\right). \tag{62}$$

Поэтому мы имеем

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta\kappa_i}{\delta\overline{\omega}_r}=\sum_{u=1}^{3n}\left(\frac{\delta^2\kappa_i}{\delta\eta_u\delta\overline{\omega}_r}\frac{\delta H_2}{\delta\overline{\omega}_u}-\frac{\delta^2\kappa_i}{\delta\overline{\omega}_u\delta\overline{\omega}_r}\frac{\delta H_2}{\delta\eta_u}+\right.$$
$$\left.+\frac{\delta\kappa_i}{\delta\overline{\omega}_u}\frac{\delta^2 H_1}{\delta\eta_u\delta\overline{\omega}_r}-\frac{\delta\kappa_i}{\delta\eta_u}\frac{\delta^2 H_1}{\delta\overline{\omega}_u\delta\overline{\omega}_r}\right). \tag{63}$$

$\frac{d}{dt}\frac{\delta\kappa_s}{\delta\overline{\omega}_r}$ может быть найдена отсюда путем простой замены i на s, так что [42]

$$\sum_{r=1}^{3n}\left(\frac{\delta\kappa_i}{\delta\eta_r}\frac{d}{dt}\frac{\delta\kappa_s}{\delta\overline{\omega}_r}-\frac{\delta\kappa_s}{\delta\eta_r}\frac{d}{dt}\frac{\delta\kappa_i}{\delta\overline{\omega}_r}\right)=$$
$$=\sum_{r=1}^{3n}\sum_{u=1}^{3n}\left\{\left(\frac{\delta\kappa_s}{\delta\eta_r}\frac{\delta^2\kappa_i}{\delta\overline{\omega}_u\delta\overline{\omega}_r}-\frac{\delta\kappa_i}{\delta\eta_r}\frac{\delta^2\kappa_s}{\delta\overline{\omega}_u\delta\overline{\omega}_r}\right)\frac{\delta H_2}{\delta\eta_u}+\right.$$

$$+\left(\frac{\delta\kappa_i}{\delta\eta_r}\frac{\delta^2\kappa_s}{\delta\eta_u\delta\overline{\omega}_r}-\frac{\delta\kappa_s}{\delta\eta_r}\frac{\delta^2\kappa_i}{\delta\eta_u\delta\overline{\omega}_r}\right)\frac{\delta H_2}{\delta\overline{\omega}_u}+$$

$$+\left(\frac{\delta\kappa_i}{\delta\eta_r}\frac{\delta\kappa_s}{\delta\overline{\omega}_u}-\frac{\delta\kappa_s}{\delta\eta_r}\frac{\delta\kappa_i}{\delta\overline{\omega}_u}\right)\frac{\delta^2 H_2}{\delta\eta_u\delta\overline{\omega}_r}+\left(\frac{\delta\kappa_s}{\delta\eta_r}\frac{\delta\kappa_i}{\delta\eta_u}-\frac{\delta\kappa_i}{\delta\eta_r}\frac{\delta\kappa_s}{\delta\eta_u}\right)\frac{\delta^2 H_1}{\delta\overline{\omega}_u\delta\overline{\omega}_r}\Bigg\} \tag{64}$$

и аналогично

$$\sum_{r=1}^{3n}\left(\frac{\delta\kappa_s}{\delta\overline{\omega}_r}\frac{d}{dt}\frac{\delta\kappa_i}{\delta\eta_r}-\frac{\delta\kappa_i}{\delta\overline{\omega}_r}\frac{d}{dt}\frac{\delta\kappa_s}{\delta\eta_r}\right)=$$

$$=\sum_{r=1}^{3n}\sum_{u=1}^{3n}\Bigg\{\left(\frac{\delta\kappa_s}{\delta\overline{\omega}_r}\frac{\delta^2\kappa_i}{\delta\eta_u\delta\eta_r}-\frac{\delta\kappa_i}{\delta\overline{\omega}_r}\frac{\delta^2\kappa_s}{\delta\eta_u\delta\eta_r}\right)\frac{\delta H_2}{\delta\overline{\omega}_u}+$$

$$+\left(\frac{\delta\kappa_i}{\delta\overline{\omega}_r}\frac{\delta^2\kappa_s}{\delta\overline{\omega}_u\delta\eta_r}-\frac{\delta\kappa_s}{\delta\overline{\omega}_r}\frac{\delta^2\kappa_i}{\delta\overline{\omega}_u\delta\eta_r}\right)\frac{\delta H_2}{\delta\eta_u}+$$

$$+\left(\frac{\delta\kappa_i}{\delta\overline{\omega}_r}\frac{\delta\kappa_s}{\delta\eta_u}-\frac{\delta\kappa_s}{\delta\overline{\omega}_r}\frac{\delta\kappa_i}{\delta\eta_u}\right)\frac{\delta^2 H_1}{\delta\overline{\omega}_u\delta\eta_r}+\left(\frac{\delta\kappa_s}{\delta\overline{\omega}_r}\frac{\delta\kappa_i}{\delta\overline{\omega}_u}-\frac{\delta\kappa_i}{\delta\overline{\omega}_r}\frac{\delta\kappa_s}{\delta\overline{\omega}_u}\right)\frac{\delta^2 H_1}{\delta\eta_u\delta\eta_r}\Bigg\}. \tag{65}$$

Следовательно, сложив два последних выражения и произведя необходимые сокращения, мы находим при помощи соотношений (60) [43]

$$\frac{d}{dt}a_{i,s}=\sum_{u=1}^{3n}\left(A_{i,s}^{(u)}\frac{\delta H_2}{\delta\eta_u}+B_{i,s}^{(u)}\frac{\delta H_2}{\delta\overline{\omega}_u}\right), \tag{15.1}$$

где

$$A_{i,s}^{(u)}=\sum_{r=1}^{3n}\left(\frac{\delta\kappa_s}{\delta\eta_r}\frac{\delta^2\kappa_i}{\delta\overline{\omega}_u\delta\overline{\omega}_r}-\frac{\delta\kappa_i}{\delta\eta_r}\frac{\delta^2\kappa_s}{\delta\overline{\omega}_u\delta\overline{\omega}_r}+\frac{\delta\kappa_i}{\delta\overline{\omega}_r}\frac{\delta^2\kappa_s}{\delta\overline{\omega}_u\delta\eta_r}-\frac{\delta\kappa_s}{\delta\overline{\omega}_r}\frac{\delta^2\kappa_i}{\delta\overline{\omega}_u\delta\eta_r}\right),$$

$$B_{i,s}^{(u)}=\sum_{r=1}^{3n}\left(\frac{\delta\kappa_s}{\delta\overline{\omega}_r}\frac{\delta^2\kappa_i}{\delta\eta_u\delta\eta_r}-\frac{\delta\kappa_i}{\delta\overline{\omega}_r}\frac{\delta^2\kappa_s}{\delta\eta_u\delta\eta_r}+\frac{\delta\kappa_i}{\delta\eta_r}\frac{\delta^2\kappa_s}{\delta\eta_u\delta\overline{\omega}_r}-\frac{\delta\kappa_s}{\delta\eta_r}\frac{\delta^2\kappa_i}{\delta\eta_u\delta\overline{\omega}_r}\right). \tag{66}$$

Поскольку общая форма (15.1) для $da_{i,s}/dt$ не содержит никакого члена, независимого от возмущающих величин $\delta H_2/\delta\eta$, $\delta H_2/\delta\overline{\omega}$, то отсюда легко сделать важный вывод, уже упоминавшийся ранее, а именно, что производные $a_{i,s}$ в дифференциалах (14.1) элементов могут быть выражены как функции одних этих элементов, не включающих явно время [44].

Очевидно также, что коэффициенты $a_{i,s}$ обладают следующим свойством:

$$a_{s,i}=-a_{i,s}, \tag{67}$$

$$a_{i,i}=0; \tag{68}$$

поэтому член, пропорциональный $\delta H_2/\delta\kappa_i$, исчезает из выражения (14.1) для $d\kappa_i/dt$, а член $(\delta H_2/\delta\kappa_i)a_{i,s}(\delta H_2/\delta\kappa_s)$ в выражении $(\delta H_2/\delta\kappa_i)(d\kappa_i/dt)$ при сложении уничтожает член $(\delta H_2/\delta\kappa_s)a_{i,s}(\delta H_2/\delta\kappa_i)$ в выражении $(\delta H_2/\delta\kappa_s)(d\kappa_s/dt)$. Поэтому мы имеем

$$\sum \frac{\delta H_2}{\delta\kappa}\frac{d\kappa}{dt} = 0 \tag{15.2}$$

или

$$dH_2 / dt = \delta H_2 / \delta t. \tag{15.3}$$

Это означает, что если мы берем первую полную производную возмущающего выражения H_2 по времени, то элементы могут рассматриваться как постоянные.

Упрощение дифференциальных уравнений, определяющих последовательно меняющиеся элементы в любой задаче на возмущение, и интегрирование упрощенных уравнений посредством некоторых функций элементов

16. Самым естественным выбором таких элементов будет тот, при котором они будут соответствовать при невозмущенном движении начальным величинам e_i, p_i. Эти величины при помощи дифференциальных уравнений (8.2) могут быть выражены в невозмущенном движении следующим образом:

$$e_i = \eta_i - \int_0^t \frac{\delta H_1}{\delta\overline{\omega}_i}dt, \qquad p_i = \overline{\omega}_i + \int_0^t \frac{\delta H_1}{\delta\eta_i}dt, \tag{69}$$

и если мы предположим, что они найдены путем исключения в форме

$$\begin{aligned} e_i &= \eta_i + \Phi_i(t,\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{3n},\overline{\omega}_1,\overline{\omega}_2,\ldots,\overline{\omega}_{3n}), \\ p_i &= \overline{\omega}_i + \Psi_i(t,\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{3n},\overline{\omega}_1,\overline{\omega}_2,\ldots,\overline{\omega}_{3n}), \end{aligned} \tag{70}$$

то легко видеть, что следующие уравнения для всех значений $\eta_i, \overline{\omega}_i$ должны быть строго и тождественно истинными [45]:

$$\begin{aligned} &\Phi_i(0,\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{3n},\overline{\omega}_1,\overline{\omega}_2,\ldots,\overline{\omega}_{3n}) = 0, \\ &\Psi_i(0,\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{3n},\overline{\omega}_1,\overline{\omega}_2,\ldots,\overline{\omega}_{3n}) = 0. \end{aligned} \tag{71}$$

Поэтому, когда мы, переходя к возмущенному движению, устанавливаем уравнения определения

$$\begin{aligned} \kappa_i &= \eta_i + \Phi_i(t,\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{3n},\overline{\omega}_1,\overline{\omega}_2,\ldots,\overline{\omega}_{3n}), \\ \lambda_i &= \overline{\omega}_i + \Psi_i(t,\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{3n},\overline{\omega}_1,\overline{\omega}_2,\ldots,\overline{\omega}_{3n}), \end{aligned} \tag{72}$$

вводя $6n$ переменных элементов κ_i, λ_i, в которых группа λ_i была бы представлена в нашем недавнем обозначении как

$$\lambda_i = \kappa_{3n+i},$$

то мы видим, что все частные производные вида $\delta\kappa_i / \delta\eta_r$, $\delta\kappa_i / \delta\overline{\omega}_r$, $\delta\lambda_i / \delta\eta_r$,

$\delta\lambda_i \,/\, \delta\overline{\varpi}_r$ исчезают, когда $t = 0$, за исключением следующих:

$$\frac{\delta\kappa_i}{\delta\eta_i} = 1, \qquad \frac{\delta\lambda_i}{\delta\overline{\varpi}_i} = 1. \tag{74}$$

Поэтому, когда $t = 0$ в коэффициентах $a_{i,s}$ (59), все эти коэффициенты обращаются в нуль, за исключением следующих

$$a_{r,3n+r} = 1, \qquad a_{3n+r,r} = -1. \tag{75}$$

Однако доказано, что коэффициенты $a_{i,s}$, когда они выражены как функции элементов, не содержат явно времени, а предположение, что $t = 0$, не устанавливает никакого соотношения между этими $6n$ элементами κ_i, λ_i, которые по-прежнему остаются независимыми. Поэтому коэффициенты $a_{i,s}$ не могут приобрести значений 1, 0, –1 при предположении, что $t = 0$, если только они не имели этих значений постоянно и независимо от этого предположения. Отсюда дифференциальные уравнения вида (14.1) могут быть выражены для данной системы переменных элементов следующим более простым способом:

$$\frac{d\kappa_i}{dt} = \frac{\delta H_2}{\delta\lambda_i}, \qquad \frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{\delta H_2}{\delta\kappa_i}. \tag{16.1}$$

Эти выражения легко можно проверить при помощи формулы (15.2), которая теперь принимает такой вид:

$$\sum\left(\frac{\delta H_2}{\delta\kappa}\frac{d\kappa}{dt} + \frac{\delta H_2}{\delta\lambda}\frac{d\lambda}{dt}\right) = 0. \tag{16.2}$$

17. Величины e_i, p_i, очевидно, представляют собой начальные значения переменных элементов κ_i, λ_i согласно определениям (72) и тождественным уравнениям (71). Таким образом, задача строгого интегрирования уравнений возмущенного движения (8.1), связывающего переменные $\eta_i, \overline{\varpi}_i$ и время, или задача определения этих переменных как функций времени и их собственных начальных значений e_i, p_i преобразуется в задачу интегрирования уравнений (16.1) или определения $6n$ элементов κ_i, λ_i как функций времени и тех же самых начальных значений. Главное преимущество этого преобразования заключается в том, что при малых возмущениях новые переменные (т.е. элементы) меняются лишь незначительно, и еще в том, что, поскольку новые дифференциальные уравнения имеют тот же вид, что и старые, их можно интегрировать аналогичным способом. Следовательно, рассматривая определенный интеграл

$$E = \int_0^t \left(\sum \lambda \frac{\delta H_2}{\delta\lambda} - H_2\right) dt \tag{76}$$

как функцию времени и $6n$ величин $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{3n}$, $e_1, e_2, \ldots, e_{3n}$ и заметив, что при помощи процесса, аналогичного тому, который дан в п. 4 настоящей работы, можно

показать, что его вариация, взятая по последним величинам, будет

$$\delta E = \sum(\lambda\delta\kappa - p\delta e); \tag{17.1}$$

мы находим, что строгие интегралы дифференциальных уравнений (16.1) могут быть выражены уравнениями

$$\lambda_i = \frac{\delta E}{\delta\kappa_i}, \quad p_i = -\frac{\delta E}{\delta e_i}, \tag{17.2}$$

в которые входит только одна неизвестная *функция элементов* E, и проблема возмущения сводится при помощи этого нового метода к отысканию и изучению этой единственной функции.

Мы также могли положить

$$C = \int_0^t \left(-\Sigma\kappa\frac{\delta H_2}{\delta\kappa} + H_2\right)dt \tag{77}$$

и рассматривать этот определенный интеграл C как функцию времени и $6n$ величин λ_i, p_i и тогда нашли бы другие формы для интегралов дифференциальных уравнений переменных элементов, а именно

$$\kappa_i = +\frac{\delta C}{\delta\lambda_i}, \quad e_i = -\frac{\delta C}{\delta p_i}. \tag{17.3}$$

При этом каждая из этих *функций элементов* C и E должна удовлетворять некоему уравнению в частных производных, аналогичному первому уравнению из каждой пары, упомянутой в п. 6 этой работы и выведенной на основе аналогичных принципов [46].

18. Таким образом, из формы функции E и из уравнений (17.2), (16.1) и (76) видно, что частная производная этой функции, взятая по времени, представляет собой

$$\frac{\delta E}{\delta t} = \frac{dE}{dt} - \sum\frac{\delta E}{\delta\kappa}\frac{d\kappa}{dt} = -H_2; \tag{18.1}$$

следовательно, если мы разделим эту функцию E на любые две части

$$E_1 + E_2 = E \tag{18.2}$$

и если для общей ясности мы напишем выражение H_2 в виде

$$H_2 = H_2(t, \kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{3n}, \ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{3n}), \tag{18.3}$$

то получим уравнение в частных производных

$$\frac{\delta E_1}{\delta t} + \frac{\delta E_2}{\delta t} + H_2\left(t, \kappa_1, \ldots, \kappa_{3n}, \ \frac{\delta E_1}{\delta\kappa_1} + \frac{\delta E_2}{\delta\kappa_1}, \ldots, \frac{\delta E_1}{\delta\kappa_{3n}} + \frac{\delta E_2}{\delta\kappa_{3n}}\right) = 0. \tag{18.4}$$

Когда часть E_2 мала и мы пренебрегаем квадратами и произведениями ее частных производных, эти уравнения с помощью (16.1) и (17.2) приближенно приводятся к

следующему [47]:

$$\frac{dE_2}{dt}+\frac{\delta E_1}{\delta t}+H_2\left(t,\kappa_1,\ldots,\kappa_{3n},\ \frac{\delta E_1}{\delta\kappa_1},\ldots,\frac{\delta E_1}{\delta\kappa_{3n}}\right)=0. \tag{18.5}$$

Отсюда, с той же степенью приближения, видим, что если часть E_1, подобно полной функции E, взята такой, чтобы она обращалась в нуль со временем, то мы получим

$$E_2=-\int_0^t\left\{\frac{\delta E_1}{\delta t}+H_2\left(t,\kappa_1,\ldots,\kappa_{3n},\ \frac{\delta E_1}{\delta\kappa_1},\ldots,\frac{\delta E_1}{\delta\kappa_{3n}}\right)\right\}dt, \tag{18.6}$$

и, таким образом, первое приближение выражения E_1 можно последовательно и неопределенно долго корректировать.

Посредством (17.3) и (16.1) и при помощи определения (77) имеем

$$\frac{\delta C}{\delta t}=\frac{dC}{dt}-\sum\frac{\delta C}{\delta\lambda}\frac{d\lambda}{dt}=H_2, \tag{18.7}$$

и поэтому функция C должна строго удовлетворять уравнению в частных производных

$$\frac{\delta C}{\delta t}=H_2\left(t,\frac{\delta C}{\delta\lambda_1},\ldots,\frac{\delta C}{\delta\lambda_{3n}},\ \lambda_1,\ldots,\lambda_{3n}\right). \tag{18.8}$$

Если же мы положим, что

$$C=C_1+C_2, \tag{18.9}$$

и предположим, что часть C_2 мала, то строгое уравнение

$$\frac{\delta C_1}{\delta t}+\frac{\delta C_2}{\delta t}=H_2\left(t,\ \frac{\delta C_1}{\delta\lambda_1}+\frac{\delta C_2}{\delta\lambda_1},\ldots,\ \frac{\delta C_1}{\delta\lambda_{3n}}+\frac{\delta C_2}{\delta\lambda_{3n}},\ \lambda_1,\ldots,\lambda_{3n}\right), \tag{18.10}$$

если принять во внимание равенства (16.1) и (17.3), приведется приближенно к виду

$$\frac{dC_2}{dt}=-\frac{\delta C_1}{\delta t}+H_2\left(t,\ \frac{\delta C_1}{\delta\lambda_1},\ldots,\frac{\delta C_1}{\delta\lambda_{3n}},\ \lambda_1,\ldots,\lambda_{3n}\right) \tag{18.11}$$

и после интегрирования превратится в следующее:

$$C_2=\int_0^t\left\{-\frac{\delta C_1}{\delta t}+H_2\left(t,\ \frac{\delta C_1}{\delta\lambda_1},\ldots,\frac{\delta C_1}{\delta\lambda_{3n}},\ \lambda_1,\ldots,\lambda_{3n}\right)\right\}dt, \tag{18.12}$$

причем предполагается, что части C_1 и C_2 отдельно обращаются в нуль, когда $t=0$, подобно полной функции элементов C.

Для того же чтобы получить такое первое приближение E_1 или C_1 любой из этих двух функций элементов E и C, мы можем заменить в определениях (76) и (77) переменные элементы κ и λ их начальными значениями e и p и затем исключить

одну группу этих начальных значений при помощи соответствующей группы следующих приближенных уравнений, выведенных из формулы (16.1):

$$\kappa_i = e_i - \int_0^t \frac{\delta H_2}{\delta p_i} dt \tag{18.13}$$

и

$$\lambda_i = p_i - \int_0^t \frac{\delta H_2}{\delta e_i} dt. \tag{18.14}$$

Отсюда легко можно видеть, что эти две функции элементов C и E связаны друг с другом [48], а также с возмущающей функцией S_2, так что форма любой из них может быть выведена из формы любой другой в том случае, когда функция S_1 невозмущенного движения известна.

Аналогичные формулы для движения отдельной точки

19. Хотя наш общий метод в динамике предназначен главным образом для изучения систем притягивающихся или отталкивающихся точек, он не ограничивается ими, но может быть использован во всех вопросах, к которым применяется закон живых сил. Все анализы, приведенные в данной работе, и в особенности теория возмущений, могут быть не без пользы проиллюстрированы на следующих аналогичных рассуждениях и выводах, относящихся к движению одной точки.

Представим себе точку с тремя прямоугольными координатами x, y, z, движущуюся по орбите, определяемой тремя простыми дифференциальными уравнениями второго порядка, имеющими форму, аналогичную уравнениям (2), а именно:

$$x'' = \frac{\delta U}{\delta x}, \quad y'' = \frac{\delta U}{\delta y}, \quad z'' = \frac{\delta U}{\delta z}, \tag{78}$$

причем U представляет собой любую данную функцию координат, не включающую явно время, и установим следующее определение, аналогичное (4):

$$T = \tfrac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2). \tag{79}$$

При этом x', y', z' представляют собой первые, а x'', y'', z'' – вторые производные координат, рассматриваемых как функции времени t. Если же для большей общности или простоты выразить прямоугольные координаты x, y, z как функции трех других отметок положения η_1, η_2, η_3, то T превратится в однородную функцию второй степени их первых производных $\eta'_1, \eta'_2, \eta'_3$, взятых по времени, и если мы для сокращения положим

$$\varpi_1 = \frac{\delta T}{\delta \eta'_1}, \quad \varpi_2 = \frac{\delta T}{\delta \eta'_2}, \quad \varpi_3 = \frac{\delta T}{\delta \eta'_3}, \tag{80}$$

то T можно рассматривать так же, как функцию

$$T = F(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3,\ \eta_1, \eta_2, \eta_3), \tag{81}$$

являющуюся однородной функцией второй степени относительно $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3$. Можно также положить для сокращения

$$F(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3,\ \eta_1, \eta_2, \eta_3) - U(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = H, \tag{82}$$

и тогда вместо трех дифференциальных уравнений второго порядка (78) мы можем применить шесть следующих уравнений первого порядка, аналогичных уравнениям (3.1) и полученных путем аналогичных рассуждений:

$$\frac{d\eta_1}{dt} = +\frac{\delta H}{\delta\overline{\omega}_1}, \quad \frac{d\eta_2}{dt} = +\frac{\delta H}{\delta\overline{\omega}_2}, \quad \frac{d\eta_3}{dt} = +\frac{\delta H}{\delta\overline{\omega}_3},$$

$$\frac{d\overline{\omega}_1}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta\eta_1}, \quad \frac{d\overline{\omega}_2}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta\eta_2}, \quad \frac{d\overline{\omega}_3}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta\eta_3}. \tag{83}$$

20. Строгие интегралы этих шести дифференциальных уравнений могут быть выражены следующими формами, аналогичными (4.1):

$$\overline{\omega}_1 = \frac{\delta S}{\delta\eta_1}, \quad \overline{\omega}_2 = \frac{\delta S}{\delta\eta_2}, \quad \overline{\omega}_3 = \frac{\delta S}{\delta\eta_3},$$

$$p_1 = -\frac{\delta S}{\delta e_1}, \quad p_2 = -\frac{\delta S}{\delta e_2}, \quad p_3 = -\frac{\delta S}{\delta e_3}, \tag{84}$$

где $e_1, e_2, e_3, p_1, p_2, p_3$ представляют собой н ачальные з начения и ли з начения при $t = 0$ величин $\eta_1, \eta_2, \eta_3,\ \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3$, а S – определенный интеграл:

$$S = \int_0^t \left(\overline{\omega}_1 \frac{\delta H}{\delta\overline{\omega}_1} + \overline{\omega}_2 \frac{\delta H}{\delta\overline{\omega}_2} + \overline{\omega}_3 \frac{\delta H}{\delta\overline{\omega}_3} - H \right) dt, \tag{85}$$

рассматриваемый как функция η_1, η_2, η_3, e_1, e_2, e_3 и t. Величина H не меняется в процессе движения, и функция S должна удовлетворять следующим двум уравнениям в частных производных первого порядка, аналогичным двум уравнениям (6.1):

$$\frac{\delta S}{\delta t} + F\left(\frac{\delta S}{\delta\eta_1}, \frac{\delta S}{\delta\eta_2}, \frac{\delta S}{\delta\eta_3},\ \eta_1, \eta_2, \eta_3 \right) = U(\eta_1, \eta_2, \eta_3),$$

$$\frac{\delta S}{\delta t} + F\left(\frac{\delta S}{\delta e_1}, \frac{\delta S}{\delta e_2}, \frac{\delta S}{\delta e_3},\ e_1, e_2, e_3 \right) = U(e_1, e_2, e_3). \tag{86}$$

Отсюда эта важная функция S, которую можно назвать *главной функцией* движения, может быть строго выражена в следующем виде, полученном рассуж-

дениями, аналогичными тем, которые приведены в п. 7 этой работы:

$$S = S_1 + \int_0^t \left\{ -\frac{\delta S_1}{\delta t} + U(\eta_1, \eta_2, \eta_3) - F\left(\frac{\delta S_1}{\delta \eta_1}, \frac{\delta S_1}{\delta \eta_2}, \frac{\delta S_1}{\delta \eta_3}, \eta_1, \eta_2 \eta_3 \right) \right\} dt +$$

$$+ \int_0^t F\left(\frac{\delta S}{\delta \eta_1} - \frac{\delta S_1}{\delta \eta_1}, \frac{\delta S}{\delta \eta_2} - \frac{\delta S_1}{\delta \eta_2}, \frac{\delta S}{\delta \eta_3} - \frac{\delta S_1}{\delta \eta_3}, \eta_1, \eta_2 \eta_3 \right) dt; \qquad (87)$$

при этом S_1 представляет собой любую произвольную функцию тех же величин η_1, η_2, η_3, e_1, e_2, e_3, t, которые выбраны так, чтобы они обращались в нуль со временем. Если же эта произвольная функция S_1 выбрана так, что она представляет собой новое приближенное значение главной функции S, то мы можем во втором приближении пренебречь вторым определенным интегралом в выражении (87).

21. Первое приближение этого рода мы получим, разделив выражение H (82) на две части, из которых преобладающую обозначим через H_1, а меньшую – через H_2, и, пренебрегая частью H_2, заменим дифференциальные уравнения (83) другими, а именно:

$$\frac{d\eta_1}{dt} = \frac{\delta H_1}{\delta \overline{\omega}_1}, \quad \frac{d\eta_2}{dt} = \frac{\delta H_1}{\delta \overline{\omega}_2}, \quad \frac{d\eta_3}{dt} = \frac{\delta H_1}{\delta \overline{\omega}_3},$$

$$\frac{d\overline{\omega}_1}{dt} = -\frac{\delta H_1}{\delta \eta_1}, \quad \frac{d\overline{\omega}_2}{dt} = -\frac{\delta H_1}{\delta \eta_2}, \quad \frac{d\overline{\omega}_3}{dt} = -\frac{\delta H_1}{\delta \eta_3}. \qquad (88)$$

После этого проинтегрируем эти упрощенные уравнения, относящиеся к более простому движению, которое можно назвать *невозмущенным движением* точки. Тогда для главной функции такого невозмущенного движения определенный интеграл

$$S_1 = \int_0^t \left(\overline{\omega}_1 \frac{\delta H_1}{\delta \overline{\omega}_1} + \overline{\omega}_2 \frac{\delta H_1}{\delta \overline{\omega}_2} + \overline{\omega}_3 \frac{\delta H_1}{\delta \overline{\omega}_3} - H \right) dt, \qquad (89)$$

рассматриваемый как функция $\eta_1, \eta_2, \eta_3, e_1, e_2, e_3, t$, будет представлять собой приближенное значение первоначальной функции S возмущенного движения. Эта функция соответствует более сложным дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d\eta_1}{dt} = \frac{\delta H_1}{\delta \overline{\omega}_1} + \frac{\delta H_2}{\delta \overline{\omega}_1}, \quad \frac{d\eta_2}{dt} = \frac{\delta H_1}{\delta \overline{\omega}_2} + \frac{\delta H_2}{\delta \overline{\omega}_2}, \quad \frac{d\eta_3}{dt} = \frac{\delta H_1}{\delta \overline{\omega}_3} + \frac{\delta H_2}{\delta \overline{\omega}_3},$$

$$\frac{d\overline{\omega}_1}{dt} = -\frac{\delta H_1}{\delta \eta_1} - \frac{\delta H_2}{\delta \eta_2}, \quad \frac{d\overline{\omega}_2}{dt} = -\frac{\delta H_1}{\delta \eta_2} - \frac{\delta H_2}{\delta \eta_2}, \quad \frac{d\overline{\omega}_3}{dt} = -\frac{\delta H_1}{\delta \eta_3} - \frac{\delta H_2}{\delta \eta_3}. \qquad (90)$$

Функция S_1 невозмущенного движения должна удовлетворять двум уравнениям в частных производных первого порядка, аналогичным двум уравнениям (86), а ин-

тегралы невозмущенного движения могут быть представлены следующим образом:

$$\bar{\omega}_1 = \frac{\delta S_1}{\delta \eta_1}, \quad \bar{\omega}_2 = \frac{\delta S_1}{\delta \eta_2}, \quad \bar{\omega}_3 = \frac{\delta S_1}{\delta \eta_3},$$

$$p_1 = -\frac{\delta S_1}{\delta e_1}, \quad p_2 = -\frac{\delta S_1}{\delta e_2}, \quad p_3 = -\frac{\delta S_1}{\delta e_3}, \tag{91}$$

в то время как интегралы возмущенного движения могут быть с одинаковой строгостью выражены в следующих аналогичных формах:

$$\bar{\omega}_1 = \frac{\delta S_1}{\delta \eta_1} + \frac{\delta S_2}{\delta \eta_1}, \quad \bar{\omega}_2 = \frac{\delta S_1}{\delta \eta_2} + \frac{\delta S_2}{\delta \eta_2}, \quad \bar{\omega}_3 = \frac{\delta S_1}{\delta \eta_3} + \frac{\delta S_2}{\delta \eta_3},$$

$$p_1 = -\frac{\delta S_1}{\delta e_1} - \frac{\delta S_2}{\delta e_1}, \quad p_2 = -\frac{\delta S_1}{\delta e_2} - \frac{\delta S_2}{\delta e_2}, \quad p_3 = -\frac{\delta S_1}{\delta e_3} - \frac{\delta S_2}{\delta e_3}, \tag{92}$$

если S_2 обозначает точную поправку функции S_1 или возмущающую часть полной главной функции S. Исходя из изложенной выше общей теории приближения, эта возмущающая часть, или функция S_2, может быть приближенно выражена определенным интегралом (11.5):

$$S_2 = -\int_0^t H_2 dt, \tag{93}$$

при вычислении которого можно применить уравнения (91).

22. Если интегралы невозмущенного движения (91) дают

$$\eta_1 = \varphi_1(t, e_1, e_2, e_3, p_1, p_2, p_3), \quad \eta_2 = \varphi_2(t, e_1, e_2, e_3, p_1, p_2, p_3),$$

$$\eta_3 = \varphi_3(t, e_1, e_2, e_3, p_1, p_2, p_3), \tag{94}$$

$$\bar{\omega}_1 = \psi_1(t, e_1, e_2, e_3, p_1, p_2, p_3), \quad \bar{\omega}_2 = \psi_2(t, e_1, e_2, e_3, p_1, p_2, p_3),$$

$$\bar{\omega}_3 = \psi_3(t, e_1, e_2, e_3, p_1, p_2, p_3), \tag{95}$$

то интегралы возмущенного движения (92) могут быть строго преобразованы следующим образом:

$$\eta_1 = \varphi_1\left(t, e_1, e_2, e_3, p_1 + \frac{\delta S_2}{\delta e_1}, p_2 + \frac{\delta S_2}{\delta e_2}, p_3 + \frac{\delta S_2}{\delta e_3}\right),$$

$$\eta_2 = \varphi_2\left(t, e_1, e_2, e_3, p_1 + \frac{\delta S_2}{\delta e_1}, p_2 + \frac{\delta S_2}{\delta e_2}, p_3 + \frac{\delta S_2}{\delta e_3}\right),$$

$$\eta_3 = \varphi_3\left(t, e_1, e_2, e_3, p_1 + \frac{\delta S_2}{\delta e_1}, p_2 + \frac{\delta S_2}{\delta e_2}, p_3 + \frac{\delta S_2}{\delta e_3}\right) \tag{96}$$

и

$$\dot{\overline{\omega}}_1 = \frac{\delta S_2}{\delta \eta_1} + \psi_1\left(t, e_1, e_2, e_3, p_1 + \frac{\delta S_2}{\delta e_1}, p_2 + \frac{\delta S_2}{\delta e_2}, p_3 + \frac{\delta S_2}{\delta e_3}\right),$$

$$\overline{\omega}_2 = \frac{\delta S_2}{\delta \eta_2} + \psi_2\left(t, e_1, e_2, e_3, p_1 + \frac{\delta S_2}{\delta e_1}, p_2 + \frac{\delta S_2}{\delta e_2}, p_3 + \frac{\delta S_2}{\delta e_3}\right),$$

$$\overline{\omega}_3 = \frac{\delta S_2}{\delta \eta_3} + \psi_3\left(t, e_1, e_2, e_3, p_1 + \frac{\delta S_2}{\delta e_1}, p_2 + \frac{\delta S_2}{\delta e_2}, p_3 + \frac{\delta S_2}{\delta e_3}\right); \tag{97}$$

здесь S_2 представляет собой точную возмущающую функцию, а возмущения положения в любое время t могут быть приближенно выражены формулой

$$\Delta\eta_1 = \frac{\delta\eta_1}{\delta e_1}\int_0^t \frac{\delta H_2}{\delta p_1}dt + \frac{\delta\eta_1}{\delta e_2}\int_0^t \frac{\delta H_2}{\delta p_2}dt + \frac{\delta\eta_1}{\delta e_3}\int_0^t \frac{\delta H_2}{\delta p_3}dt -$$

$$-\frac{\delta\eta_1}{\delta p_1}\int_0^t \frac{\delta H_2}{\delta e_1}dt - \frac{\delta\eta_1}{\delta p_2}\int_0^t \frac{\delta H_2}{\delta e_2}dt - \frac{\delta\eta_1}{\delta p_3}\int_0^t \frac{\delta H_2}{\delta e_3}dt \tag{98}$$

и двумя аналогичными формулами для возмущений двух других координат или отметок положения η_2, η_3. В этих формулах предполагается, чт о координаты и H_2 выражены посредством теории невозмущенного движения как функции времени t и постоянных e_i, p_i.

23. Если интегралы невозмущенного движения путем исключения дают для этих постоянных выражения вида

$$e_1 = \eta_1 + \Phi_1(t, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3),$$

$$e_2 = \eta_2 + \Phi_2(t, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3),$$

$$e_3 = \eta_3 + \Phi_3(t, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3) \tag{99}$$

и

$$p_1 = \overline{\omega}_1 + \Psi_1(t, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3),$$

$$p_2 = \overline{\omega}_2 + \Psi_2(t, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3),$$

$$p_3 = \overline{\omega}_3 + \Psi_3(t, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3), \tag{100}$$

и если для возмущенного движения мы принимаем определения

$$\kappa_1 = \eta_1 + \Phi_1(t, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3),$$

$$\kappa_2 = \eta_2 + \Phi_2(t, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3),$$

$$\dot{\kappa}_3 = \eta_3 + \Phi_3(t, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3), \tag{101}$$

и

$$\lambda_1 = \overline{\omega}_1 + \Psi_1(t, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3),$$
$$\lambda_2 = \overline{\omega}_2 + \Psi_2(t, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3),$$
$$\lambda_3 = \overline{\omega}_3 + \Psi_3(t, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3), \quad (102)$$

то мы получим для такого возмущенного движения следующие точные уравнения, имеющие форму уравнений (94) и (95):

$$\eta_1 = \varphi_1(t, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$
$$\eta_2 = \varphi_2(t, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$
$$\eta_3 = \varphi_3(t, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad (103)$$

и

$$\overline{\omega}_1 = \psi_1(t, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$
$$\overline{\omega}_2 = \psi_2(t, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$
$$\overline{\omega}_3 = \psi_3(t, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (104)$$

и мы можем обозначить величины κ_1, κ_2, κ_3, λ_1, λ_2, λ_3 как шесть *переменных элементов* движения. Для того чтобы определить эти шесть переменных элементов, мы можем воспользоваться шестью следующими точными дифференциальными уравнениями первого порядка, где предполагается, что H_2 выражено посредством (103) и (104) как функция элементов и времени:

$$\frac{d\kappa_1}{dt} = \frac{\delta H_2}{\delta \lambda_1}, \quad \frac{d\kappa_2}{dt} = \frac{\delta H_2}{\delta \lambda_2}, \quad \frac{d\kappa_3}{dt} = \frac{\delta H_2}{\delta \lambda_3},$$
$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\delta H_2}{\delta \kappa_1}, \quad \frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\delta H_2}{\delta \kappa_2}, \quad \frac{d\lambda_3}{dt} = -\frac{\delta H_2}{\delta \kappa_3}, \quad (105)$$

а точные интегралы этих шести уравнений могут быть выражены следующим образом:

$$\lambda_1 = \frac{\delta E}{\delta \kappa_1}, \quad \lambda_2 = \frac{\delta E}{\delta \kappa_2}, \quad \lambda_3 = \frac{\delta E}{\delta \kappa_3}, \quad p_1 = -\frac{\delta E}{\delta e_1}, \quad p_2 = -\frac{\delta E}{\delta e_2}, \quad p_3 = -\frac{\delta E}{\delta e_3}, \quad (106)$$

причем постоянные $e_1, e_2, e_3, p_1, p_2, p_3$ сохраняют свое только что установленное значение и поэтому представляют собой начальные значения элементов κ_1, κ_2, κ_3, λ_1, λ_2, λ_3. В то же время функция E, которая может быть названа *функцией элементов*, так как ее форма определяет законы их вариаций, представляет собой определенный интеграл

$$E = \int_0^t \left(\lambda_1 \frac{\delta H_2}{\delta \lambda_1} + \lambda_2 \frac{\delta H_2}{\delta \lambda_2} + \lambda_3 \frac{\delta H_2}{\delta \lambda_3} - H_2 \right) dt, \quad (107)$$

рассматриваемый как функция κ_1, κ_2, κ_3, e_1, e_2, e_3 и t.

Интегралы уравнений (105) могут быть также выражены другим способом:

$$\kappa_1 = +\frac{\delta C}{\delta \lambda_1}, \quad \kappa_2 = +\frac{\delta C}{\delta \lambda_2}, \quad \kappa_3 = +\frac{\delta C}{\delta \lambda_3},$$
$$e_1 = -\frac{\delta C}{\delta p_1}, \quad e_2 = -\frac{\delta C}{\delta p_2}, \quad e_3 = -\frac{\delta C}{\delta p_3}, \qquad (108)$$

причем C представляет собой определенный интеграл

$$C = -\int_0^t \left(\kappa_1 \frac{\delta H_2}{\delta \kappa_1} + \kappa_2 \frac{\delta H_2}{\delta \kappa_2} + \kappa_3 \frac{\delta H_2}{\delta \kappa_3} - H \right) dt, \qquad (109)$$

рассматриваемый как функция $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, e_1, e_2, e_3$ и t. Легко можно доказать, что каждая из этих двух *функций элементов* C и E должна удовлетворять уравнению в частных производных первого порядка [49], которое должно быть дано заранее и может помочь открыть формы этих двух функций и в особенности улучшить приближенное выражение любой из них. Все эти выводы, относящиеся к движению единственной точки, аналогичны выводам, уже сделанным в данной работе в отношении системы притягивающихся или отталкивающихся точек.

Математический пример: рассмотрение движения метательных снарядов

24. Если три отметки положения η_1, η_2, η_3 движущейся точки представляют собой прямоугольные координаты и если функция U имеет форму

$$U = -g\eta_3 - \tfrac{1}{2}\left\{\mu^2(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \nu^2\eta_3^2\right\}, \qquad (110)$$

причем g, μ, ν являются постоянными, то выражение

$$H = \tfrac{1}{2}\left(\overline{\omega}_1^2 + \overline{\omega}_2^2 + \overline{\omega}_3^2\right) + g\eta_3 + \tfrac{1}{2}\left\{\mu^2(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \nu^2\eta_3^2\right\} \qquad (111)$$

должно быть подставлено в общие формы (83) для того, чтобы образовать шесть дифференциальных уравнений движения первого порядка, а именно:

$$\frac{d\eta_1}{dt} = \overline{\omega}_1, \quad \frac{d\eta_2}{dt} = \overline{\omega}_2, \quad \frac{d\eta_3}{dt} = \overline{\omega}_3,$$
$$\frac{d\overline{\omega}_1}{dt} = -\mu^2\eta_1, \quad \frac{d\overline{\omega}_2}{dt} = -\mu^2\eta_2, \quad \frac{d\overline{\omega}_3}{dt} = -g - \nu^2\eta_3. \qquad (112)$$

Эти дифференциальные уравнения имеют в качестве своих точных интегралов шесть следующих выражений:

$$\eta_1 = e_1 \cos \mu t + \frac{p_1}{\mu} \sin \mu t, \quad \eta_2 = e_2 \cos \mu t + \frac{p_2}{\mu} \sin \mu t,$$
$$\eta_3 = e_3 \cos \nu t + \frac{p_3}{\nu} \sin \nu t - \frac{g}{\nu} \operatorname{vers} \nu t \qquad (113)$$

[50]

и

$$\overline{\omega}_1 = p_1 \cos\mu t - \mu e_1 \sin\mu t, \qquad \overline{\omega}_2 = p_2 \cos\mu t - \mu e_2 \sin\mu t,$$

$$\overline{\omega}_3 = p_3 \cos\nu t - \left(\nu e_3 + g/\nu\right)\sin\nu t, \tag{114}$$

причем $e_1, e_2, e_3, p_1, p_2, p_3$ по-прежнему представляют собой начальные значения функций $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3$.

Применяя эти строгие уравнения для вычисления функции S, т.е. для вычисления с помощью формул (85) и (110), (111) определенного интеграла

$$S = \int_0^t \left(\frac{\overline{\omega}_1^2 + \overline{\omega}_2^2 + \overline{\omega}_3^2}{2} + U\right)dt, \tag{115}$$

мы находим

$$\frac{1}{2}(\overline{\omega}_1^2 + \overline{\omega}_2^2 + \overline{\omega}_3^2) = \frac{1}{4}\left\{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \mu^2(e_1^2 + e_2^2) + \left(\nu e_3 + \frac{g}{\nu}\right)^2\right\} +$$
$$+\frac{1}{4}\left\{p_1^2 + p_2^2 - \mu^2(e_1^2 + e_2^2)\right\}\cos 2\mu t - \frac{1}{2}\mu(e_1 p_1 + e_2 p_2)\sin 2\mu t +$$
$$+\frac{1}{4}\left\{p_3^2 - \left(\nu e_3 + \frac{g}{\nu}\right)^2\right\}\cos 2\nu t - \frac{1}{2}\left(\nu e_3 + \frac{g}{\nu}\right)p_3 \sin 2\nu t, \tag{116}$$

$$U = \frac{g^2}{2\nu^2} - \frac{1}{4}\left\{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \mu^2(e_1^2 + e_2^2) + \left(\nu e_3 + \frac{g}{\nu}\right)^2\right\} +$$
$$+\frac{1}{4}\left\{p_1^2 + p_2^2 + \mu^2(e_1^2 + e_2^2)\right\}\cos 2\mu t - \frac{1}{2}\mu(e_1 p_1 + e_2 p_2)\sin 2\mu t +$$
$$+\frac{1}{4}\left\{p_3^2 - \left(\nu e_3 + \frac{g}{\nu}\right)^2\right\}\cos 2\nu t - \frac{1}{2}\left(\nu e_3 + \frac{g}{\nu}\right)p_3 \sin 2\nu t \tag{117}$$

и отсюда

$$S = \frac{g^2 t}{2\nu^2} + \left\{p_1^2 + p_2^2 - \mu^2(e_1^2 + e_2^2)\frac{\sin 2\mu t}{4\mu} - \frac{1}{2}(e_1 p_1 + e_2 p_2)\operatorname{vers} 2\mu t +\right.$$
$$+\left\{p_3^2 - \left(\nu e_3 + \frac{g}{\nu}\right)^2\right\}\frac{\sin 2\nu t}{4\nu} - \frac{1}{2}p_3\left(e_3 + \frac{g}{\nu^2}\right)\operatorname{vers} 2\nu t. \tag{118}$$

Однако, для того чтобы выразить эту функцию S, как это предполагается нашим общим методом, в терминах конечных и начальных координат и времени, мы должны применить аналогичные выражения для постоянных p_1, p_2, p_3, выведенные

из интегралов (113):

$$p_1 = \frac{\mu\eta_1 - \mu e_1 \cos\mu t}{\sin\mu t}, \quad p_2 = \frac{\mu\eta_2 - \mu e_2 \cos\mu t}{\sin\mu t}, \quad p_3 = \frac{\nu\eta_3 + g/\nu - (\nu e_3 - g/\nu)\cos\nu t}{\sin\nu t}; \tag{119}$$

тогда находим

$$S = \frac{g^2 t}{2\nu^2} + \frac{\mu}{2}\frac{(\eta_1 - e_1)^2 + (\eta_2 - e_2)^2}{\operatorname{tg}\mu t} + \frac{\nu}{2}\frac{(\eta_3 - e_3)^2}{\operatorname{tg}\nu t} -$$
$$-\mu(\eta_1 e_1 + \eta_2 e_2)\operatorname{tg}\frac{\mu t}{2} - \nu\left(\eta_3 + \frac{g}{\nu^2}\right)\operatorname{tg}\frac{\nu t}{2}. \tag{120}$$

Эта *главная функция* S удовлетворяет следующим двум уравнениям в частных производных первого порядка вида (86):

$$\frac{\delta S}{\delta t} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\delta S}{\delta \eta_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta S}{\delta \eta_2}\right)^2 + \left(\frac{\delta S}{\delta \eta_3}\right)^2\right\} = -g\eta_3 - \frac{\mu^2}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2) - \frac{\nu^2}{2}\eta_3^2,$$

$$\frac{\delta S}{\delta t} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\delta S}{\delta e_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta S}{\delta e_2}\right)^2 + \left(\frac{\delta S}{\delta e_3}\right)^2\right\} = -g e_3 - \frac{\mu^2}{2}(e_1^2 + e_2^2) - \frac{\nu^2}{2}e_3^2, \tag{121}$$

и *если ее форма была ранее найдена* при помощи этих двух уравнений или каким-нибудь другим способом, то тогда *из нее можно* (*при помощи нашего общего метода*) *вывести интегралы уравнений движения* в форме

$$\bar\omega_1 = \frac{\delta S}{\delta \eta_1} = \mu(\eta_1 - e_1)\operatorname{ctg}\mu t - \mu e_1 \operatorname{tg}\frac{\mu t}{2},$$
$$\bar\omega_2 = \frac{\delta S}{\delta \eta_2} = \mu(\eta_2 - e_2)\operatorname{ctg}\mu t - \mu e_2 \operatorname{tg}\frac{\mu t}{2},$$
$$\bar\omega_3 = \frac{\delta S}{\delta \eta_3} = \nu(\eta_3 - e_3)\operatorname{ctg}\nu t - \left(\nu e_3 + \frac{g}{\nu}\right)\operatorname{tg}\frac{\nu t}{2} \tag{122}$$

и

$$p_1 = -\frac{\delta S}{\delta e_1} = \mu(\eta_1 - e_1)\operatorname{ctg}\mu t - \mu\eta_1 \operatorname{tg}\frac{\mu t}{2},$$
$$p_2 = -\frac{\delta S}{\delta e_2} = \mu(\eta_2 - e_2)\operatorname{ctg}\mu t - \mu\eta_2 \operatorname{tg}\frac{\mu t}{2},$$
$$p_3 = -\frac{\delta S}{\delta e_3} = \nu(\eta_3 - e_3)\operatorname{ctg}\nu t + \left(\nu\eta_3 + \frac{g}{\nu}\right)\operatorname{tg}\frac{\nu t}{2}, \tag{123}$$

причем последние две группы уравнений совпадают с группой (119) или (113) и в сочетании с первой группой (122) приводят к другой ранее найденной группе интегралов (114).

25. Предположим теперь для иллюстрации теории возмущения, что постоянные μ и ν малы и что после разделения выражения (111) для H на две части:

$$H_1 = \tfrac{1}{2}(\overline{\omega}_1^2 + \overline{\omega}_2^2 + \overline{\omega}_3^2) + g\eta_3 \tag{124}$$

и

$$H_2 = \tfrac{1}{2}\left\{\mu^2(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \nu^2\eta_3^2\right\} \tag{125}$$

мы сперва пренебрегаем малой частью H_2 и таким образом посредством (88) образуем более простые дифференциальные уравнения движения, которые мы назовем *невозмущенными*:

$$\frac{d\eta_1}{dt} = \overline{\omega}_1, \quad \frac{d\eta_2}{dt} = \overline{\omega}_2, \quad \frac{d\eta_3}{dt} = \overline{\omega}_3, \qquad \frac{d\overline{\omega}_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\overline{\omega}_2}{dt} = 0, \quad \frac{d\overline{\omega}_3}{dt} = -g. \tag{126}$$

Эти новые уравнения имеют в качестве своих точных интегралов вида (94) и (95) следующие выражения:

$$\eta_1 = e_1 + p_1 t, \quad \eta_2 = e_2 + p_2 t, \quad \eta_3 = e_3 + p_3 t - \tfrac{1}{2}gt^2 \tag{127}$$

и

$$\overline{\omega}_1 = p_1, \quad \overline{\omega}_2 = p_2, \quad \overline{\omega}_3 = p_3 - gt, \tag{128}$$

а *главная функция* S того же невозмущенного движения будет согласно (89)

$$S_1 = \int_0^t \left(\frac{\overline{\omega}_1^2 + \overline{\omega}_2^2 + \overline{\omega}_3^2}{2} - g\eta_3\right)dt = \int_0^t \left(\frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2} - ge_3 - 2gp_3 t + g^2t^2\right)dt =$$

$$= \left(\frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2} - ge_3\right)t - gp_3t^2 + \frac{1}{3}g^2t^3, \tag{129}$$

или, наконец, согласно (127)

$$S_1 = \frac{(\eta_1 - e_1)^2 + (\eta_2 - e_2)^2 + (\eta_3 - e_3)^2}{2t} - \frac{1}{2}gt(\eta_3 + e_3) - \frac{1}{24}g^2t^3. \tag{130}$$

Эта функция удовлетворяет, как и должно быть, следующим двум уравнениям в частных производных:

$$\frac{\delta S_1}{\delta t} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\delta S_1}{\delta \eta_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta S_1}{\delta \eta_2}\right)^2 + \left(\frac{\delta S_1}{\delta \eta_3}\right)^2\right\} = -g\eta_3,$$

$$\frac{\delta S_1}{\delta t} + \frac{1}{8}\left\{\left(\frac{\delta S_1}{\delta e_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta S_1}{\delta e_2}\right)^2 + \left(\frac{\delta S_1}{\delta e_3}\right)^2\right\} = -ge_3. \tag{131}$$

Если при помощи этих двух уравнений или любым другим путем мы находим форму (130) *главной функции* S_1, то из нее при помощи нашего общего метода можно вывести уравнения (127) и (128) в следующем виде:

$$\overline{\omega}_1 = \frac{\delta S_1}{\delta \eta_1} = \frac{\eta_1 - e_1}{t}, \quad \overline{\omega}_2 = \frac{\delta S_1}{\delta \eta_2} = \frac{\eta_2 - e_2}{t}, \quad \overline{\omega}_3 = \frac{\delta S_1}{\delta \eta_3} = \frac{\eta_3 - e_3}{t} - \frac{1}{2}gt \tag{132}$$

и

$$p_1 = -\frac{\delta S_1}{\delta e_1} = \frac{\eta_1 - e_1}{t}, \quad p_2 = -\frac{\delta S_1}{\delta e_2} = \frac{\eta_2 - e_2}{t}, \quad p_3 = -\frac{\delta S_1}{\delta e_3} = \frac{\eta_3 - e_3}{t} + \frac{1}{2}gt, \tag{133}$$

причем последняя из этих групп совпадает с выражением (127), а первая группа – с выражением (128).

26. Возвращаясь теперь от этого более простого движения к упомянутому ранее более сложному движению и обозначая через S_2 ту *возмущающую часть*, или функцию, которая должна быть прибавлена к S_1, для того чтобы составить полную главную функцию S этого более сложного движения, мы получаем путем применения нашего общего метода следующее строгое выражение для этой возмущающей функции:

$$S_2 = -\int_0^t H_2 dt + \int_0^t \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\delta S_2}{\delta \eta_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta S_2}{\delta \eta_2}\right)^2 + \left(\frac{\delta S_2}{\delta \eta_3}\right)^2\right\} dt, \tag{134}$$

в котором мы можем пренебречь вторым определенным интегралом и вычислить первый посредством уравнений невозмущенного движения. Таким образом, посредством (125), (127) мы находим приближенно

$$-H_2 = -\frac{\mu^2}{2}\left\{(e_1 + p_1 t)^2 + (e_2 + p_2 t)^2\right\} - \frac{\nu^2}{2}\left(e_3 + p_3 t - \frac{1}{2}gt^2\right)^2 \tag{135}$$

и отсюда путем интегрирования [51] находим

$$S_2 = -\frac{1}{2}\left\{\mu^2(e_1^2 + e_2^2) + \nu^2 e_3^2\right\}t - \frac{1}{2}\left\{\mu^2(e_1 p_1 - e_2 p_2) + \nu^2 e_3 p_3\right\}t^2 -$$
$$-\frac{1}{2}\left\{\mu^2(p_1^2 + p_2^2) + \nu^2(p_3^2 - g e_3)\right\}t^3 + \frac{1}{8}\nu^2 g p_3 t^4 - \frac{1}{40}\nu^2 g^2 t^5, \tag{136}$$

или при помощи формул (133)

$$S_2 = -\frac{\mu^2 t}{6}(\eta_1^2 + e_1\eta_1 + e_1^2 + \eta_2^2 + e_2\eta_2 + e_2^2) -$$
$$-\frac{\nu^2 t}{6}\left\{\eta_3^2 + e_3\eta_3 + e_3^2 + \frac{1}{4}g(\eta_3 + e_3)t^2 + \frac{1}{40}g^2 t^4\right\}. \tag{137}$$

Здесь ошибка будет четвертого порядка по отношению к малым величинам μ и ν. Если пренебречь этой малой ошибкой, то с помощью нашего общего метода можно вывести приближенные формулы для интегралов возмущенного движения из корректированной функции $S_1 + S_2$ в виде

$$\begin{aligned}
\overline{\omega}_1 &= \frac{\delta S_1}{\delta \eta_1} + \frac{\delta S_2}{\delta \eta_1} = \frac{\eta_1 - e_1}{t} - \frac{\mu^2 t}{3}\left(\eta_1 + \frac{1}{2}e_1\right),\\
\overline{\omega}_2 &= \frac{\delta S_1}{\delta \eta_2} + \frac{\delta S_2}{\delta \eta_2} = \frac{\eta_2 - e_2}{t} - \frac{\mu^2 t}{3}\left(\eta_2 + \frac{1}{2}e_2\right),\\
\overline{\omega}_3 &= \frac{\delta S_1}{\delta \eta_3} + \frac{\delta S_2}{\delta \eta_3} = \frac{\eta_3 - e_3}{t} - \frac{1}{2}gt - \frac{\nu^2 t}{3}\left(\eta_3 + \frac{1}{2}e_3 + \frac{1}{8}gt^2\right)
\end{aligned} \tag{138}$$

и

$$\begin{aligned}
p_1 &= -\frac{\delta S_1}{\delta e_1} - \frac{\delta S_2}{\delta e_1} = \frac{\eta_1 - e_1}{t} + \frac{\mu^2 t}{3}\left(e_1 + \frac{1}{2}\eta_1\right),\\
p_2 &= -\frac{\delta S_1}{\delta e_2} - \frac{\delta S_2}{\delta e_2} = \frac{\eta_2 - e_2}{t} + \frac{\mu^2 t}{3}\left(e_2 + \frac{1}{2}\eta_2\right),\\
p_3 &= -\frac{\delta S_1}{\delta e_3} - \frac{\delta S_2}{\delta e_3} = \frac{\eta_3 - e_3}{t} + \frac{1}{2}gt + \frac{\nu^2 t}{3}\left(e_3 + \frac{1}{2}\eta_3 + \frac{1}{8}gt^2\right),
\end{aligned} \tag{139}$$

или при том же порядке приближения

$$\begin{aligned}
&\eta_1 = e_1 + p_1 t - \frac{1}{2}\mu^2 t^2\left(e_1 + \frac{1}{3}p_1 t\right), \quad \eta_2 = e_2 + p_2 t - \frac{1}{2}\mu^2 t^2\left(e_2 + \frac{1}{3}p_2 t\right),\\
&\eta_3 = e_3 + p_3 t - \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}\nu^2 t^2\left(e_3 + \frac{1}{3}p_3 t - \frac{1}{12}gt^2\right)
\end{aligned} \tag{140}$$

и

$$\begin{aligned}
&\overline{\omega}_1 = p_1 - \mu^2 t\left(e_1 + \frac{1}{2}p_2 t\right), \quad \overline{\omega}_2 = p_2 - \mu^2 t\left(e_2 + \frac{1}{2}p_2 t\right),\\
&\overline{\omega}_3 = p_3 - gt - \nu^2 t\left(e_3 + \frac{1}{2}p_3 t - \frac{1}{6}gt^2\right).
\end{aligned} \tag{141}$$

В соответствии с этим, если мы развернем строгие интегралы возмущенного движения (113) и (114) до квадратов малых величин μ и ν включительно, то придем к этим приближенным интегралам; если же мы развернем выражение (120) главной функции такого движения с той же степенью точности, то получим сумму двух выражений (130) и (137).

27. Для того чтобы еще дальше проиллюстрировать на данном примере наш общий метод последовательного приближения, пусть S_3 обозначает небольшую

неизвестную поправку приближенного выражения (137), так что теперь мы будем иметь для данного возмущенного движения строго

$$S = S_1 + S_2 + S_3, \tag{142}$$

где S_1 и S_2 определяются по формулам (130) и (137). Подставляя $S_1 + S_2$ вместо S_1 в общее преобразование (87), мы находим для данной задачи [52]

$$S_3 = -\int_0^t \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\delta S_2}{\delta\eta_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta S_2}{\delta\eta_2}\right)^2 + \left(\frac{\delta S_2}{\delta\eta_3}\right)^2\right\}dt +$$
$$+\int_0^t \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\delta S_3}{\delta\eta_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta S_3}{\delta\eta_2}\right)^2 + \left(\frac{\delta S_3}{\delta\eta_3}\right)^2\right\}dt, \tag{143}$$

и если мы пренебрегаем только членами восьмой и более высоких степеней малых величин μ и ν, то можно ограничиться первым из этих двух определенных интегралов и воспользоваться для его вычисления приближенными выражениями (140) для координат возмущенного движения. Таким образом, мы получим весьма хорошее приближенное выражение

$$S_3 = -\frac{\mu^4}{18}\int_0^t t^2\left\{\left(\eta_1 + \frac{1}{2}e_1\right)^2 + \left(\eta_2 + \frac{1}{2}e_2\right)^2\right\}dt - \frac{\nu^4}{18}\int_0^t t^2\left(\eta_3 + \frac{1}{2}e_3 + \frac{1}{8}gt^2\right)^2 dt =$$
$$= -\frac{\mu^4 t^3}{360}(4\eta_1^2 - 7\eta_1 e_1 + 4e_1^2 + 4\eta_2^2 + 7\eta_2 e_2 + 4e_2^2) -$$
$$-\frac{\nu^4 t^3}{360}\left(4\eta_3^2 + 7\eta_3 e_3 + 4e_3^2\right) - \frac{\nu^4 g t^5}{240}(\eta_3 + e_3) - \frac{17\nu^4 g^2 t^7}{40320} -$$
$$-\frac{\mu^6 t^5}{945}\left(\eta_1^2 + \frac{31}{16}\eta_1 e_1 + e_1^2 + \eta_2^2 + \frac{31}{16}\eta_2 e_2 + e_2^2\right) -$$
$$-\frac{\nu^6 t^5}{945}\left(\eta_3^2 + \frac{31}{16}\eta_3 e_3 + e_3^2\right) - \frac{17\nu^6 g t^7}{40320}(\eta_3 + e_3) - \frac{31\nu^6 g^2 t^9}{725760}, \tag{144}$$

которое представляет собой сумму членов четвертой и шестой степеней в развернутом выражении (120) и при помощи нашего метода дает соответственно приближенные выражения для интегралов возмущенного движения в виде

$$\overline{\omega}_1 = \frac{\delta S_1}{\delta\eta_1} + \frac{\delta S_2}{\delta\eta_1} + \frac{\delta S_3}{\delta\eta_1}, \quad \overline{\omega}_2 = \frac{\delta S_1}{\delta\eta_2} + \frac{\delta S_2}{\delta\eta_2} + \frac{\delta S_3}{\delta\eta_2}, \quad \overline{\omega}_3 = \frac{\delta S_1}{\delta\eta_3} + \frac{\delta S_2}{\delta\eta_3} + \frac{\delta S_3}{\delta\eta_3} \tag{145}$$

и

$$p_1 = -\frac{\delta S_1}{\delta e_1} - \frac{\delta S_2}{\delta e_1} - \frac{\delta S_3}{\delta e_1}, \quad p_2 = -\frac{\delta S_1}{\delta e_2} - \frac{\delta S_2}{\delta e_2} - \frac{\delta S_3}{\delta e_2}, \quad p_3 = -\frac{\delta S_1}{\delta e_3} - \frac{\delta S_2}{\delta e_3} - \frac{\delta S_3}{\delta e_3}. \tag{146}$$

28. Для того чтобы проиллюстрировать на том же примере теорию последовательно меняющихся элементов, примем следующие определения для данного возмущенного движения:

$$\kappa_1 = \eta_1 - \overline{\omega}_1 t, \qquad \kappa_2 = \eta_2 - \overline{\omega}_2 t, \qquad \kappa_3 = \eta_3 - \overline{\omega}_3 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

$$\lambda_1 = \overline{\omega}_1, \qquad \lambda_2 = \overline{\omega}_2, \qquad \lambda_3 = \overline{\omega}_3 + g t \tag{147}$$

и назовем эти шесть величин $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ переменными элементами движения по аналогии с шестью постоянными величинами $e_1, e_2, e_3, p_1, p_2, p_3$, которые могут быть для невозмущенного движения представлены аналогичным путем, а именно по формулам (127) и (128):

$$e_1 = \eta_1 - \overline{\omega}_1 t, \qquad e_2 = \eta_2 - \overline{\omega}_2 t, \qquad e_3 = \eta_3 - \overline{\omega}_3 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

$$p_1 = \overline{\omega}_1, \qquad p_2 = \overline{\omega}_2, \qquad p_3 = \overline{\omega}_3 + g t. \tag{148}$$

Тогда мы получим для шести возмущенных переменных η_1, η_2, η_3, $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3$ точные выражения той же формы, что и в интегралах (127) и (128) невозмущенного движения, но с переменными элементами вместо постоянных, а именно:

$$\eta_1 = \kappa_1 + \lambda_1 t, \qquad \eta_2 = \kappa_2 + \lambda_2 t, \qquad \eta_3 = \kappa_3 + \lambda_3 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

$$\overline{\omega}_1 = \lambda_1, \qquad \overline{\omega}_2 = \lambda_2, \qquad \overline{\omega}_3 = \lambda_3 - g t. \tag{149}$$

Строгое определение шести переменных элементов $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ как функций времени и их собственных начальных значений $e_1, e_2, e_3, p_1, p_2, p_3$ будет зависеть от интегрирования шести следующих уравнений в обычных дифференциалах первого порядка, имеющих форму (105):

$$\frac{d\kappa_1}{dt} = \frac{\delta H_2}{\delta \lambda_1} = \mu^2 t(\kappa_1 + \lambda_1 t), \qquad \frac{d\kappa_2}{dt} = \frac{\delta H_2}{\delta \lambda_2} = \mu^2 t(\kappa_2 + \lambda_2 t),$$

$$\frac{d\kappa_3}{dt} = \frac{\delta H_2}{\delta \lambda_3} = \nu^2 t\left(\kappa_3 + \lambda_3 t - \frac{1}{2} g t^2\right) \tag{150}$$

и

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\delta H_2}{\delta \kappa_1} = -\mu^2(\kappa_1 + \lambda_1 t),$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\delta H_2}{\delta \kappa_2} = -\mu^2(\kappa_2 + \lambda_2 t),$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = -\frac{\delta H_2}{\delta \kappa_3} = -\nu^2\left(\kappa_3 + \lambda_3 t - \frac{1}{2} g t^2\right), \tag{151}$$

причем H_2 здесь является выражением

$$H_2 = \frac{\mu^2}{2}\{(\kappa_1 + \lambda_1 t)^2 + (\kappa_2 + \lambda_2 t)^2\} + \frac{\nu^2}{2}\left(\kappa_3 + \lambda_3 t - \frac{1}{2}gt^2\right)^2, \quad (152)$$

которое получается из формулы (125) путем подстановки вместо возмущенных координат η_1, η_2, η_3 их значений (149) как функций переменных элементов и времени. Эту систему уравнений (150) и (151) нетрудно точно проинтегрировать, и нам вскоре представится случай вывести их полные и точные интегралы. Однако мы в течение некоторого времени будем обращаться с этими точными интегралами как с неизвестными, с тем чтобы иметь возможность показать на примере наш общий метод неопределенного приближения для всех таких динамических вопросов, основанных на свойствах *функций элементов* C и E. Можно воспользоваться любой из этих функций, и мы воспользуемся здесь функцией C.

29. Эта функция может быть точно выражена посредством формул (109) и (152) следующим образом:

$$C = \frac{\mu^2}{2}\int_0^t (\lambda_1^2 t^2 - \kappa_1^2 + \lambda_2^2 t^2 - \kappa_2^2)dt + \frac{\nu^2}{2}\int_0^t \left\{\left(\lambda_3 t - \frac{1}{2}gt^2\right)^2 - \kappa_3^2\right\}dt, \quad (153)$$

и поэтому она имеет следующее первое приближенное значение, полученное благодаря тому, что мы рассматриваем элементы $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ как постоянные и равные их начальным значениям $e_1, e_2, e_3, p_1, p_2, p_3$:

$$C = -\frac{t}{2}\{\mu^2(e_1^2 + e_2^2) + \nu^2 e_3^2\} + \frac{t^3}{6}[\mu^2(p_1^2 + p_2^2) + \nu^2 p_3^2] - \frac{t^4}{8}\nu^2 g p_3 + \frac{t^5}{40}\nu^2 g^2. \quad (154)$$

Подобным же образом мы имеем в качестве первых приближений того же типа, который выражен общей формулой (18.14), следующие результаты, выведенные из уравнений (151):

$$\lambda_1 = p_1 - \mu^2\left(e_1 t + \frac{1}{2}p_1 t^2\right), \quad \lambda_2 = p_2 - \mu^2\left(e_2 t + \frac{1}{2}p_2 t^2\right),$$
$$\lambda_3 = p_3 - \nu^2\left(e_3 t + \frac{1}{2}p_3 t^2 - \frac{1}{6}gt^3\right), \quad (155)$$

и, следовательно, в качестве приближений того же рода:

$$e_1 = -\frac{1}{2}p_1 t - \frac{\lambda_1 - p_1}{\mu^2 t}, \quad e_2 = -\frac{1}{2}p_2 t - \frac{\lambda_2 - p_2}{\mu^2 t},$$
$$e_3 = -\frac{1}{2}p_3 t + \frac{1}{6}gt^2 - \frac{\lambda_3 - p_3}{\nu^2 t}. \quad (156)$$

Подставляя эти выражения вместо начальных постоянных e_1, e_2, e_3 в приближенное значение (154) функции элементов C, мы получаем следующее приближенное зна-

чение C_1 для этой функции, имеющее форму, которая вытекает из нашей теории:

$$C_1 = -\frac{1}{2t}\left\{\frac{(\lambda_1 - p_1)^2 + (\lambda_2 - p_2)^2}{\mu^2} + \frac{(\lambda_3 - p_3)^2}{\nu^2}\right\} -$$
$$-\frac{t}{2}\left\{(\lambda_1 - p_1)p_1 + (\lambda_2 - p_2)p_2 + (\lambda_3 - p_3)\left(p_3 - \frac{1}{3}gt\right)\right\} +$$
$$+\frac{t^3}{24}\{(\mu^2(p_1^2 + p_2^2) + \nu^2 p_3^2\} - \frac{t^4}{24}\nu^2 g p_3 + \frac{t^5}{90}\nu^2 g^2. \qquad (157)$$

В данном случае в соответствии с принципами, изложенными в п. 18, точная функция C должна удовлетворять уравнению в частных производных:

$$\frac{\delta C}{\delta t} = \frac{\mu^2}{2}\left\{\left(\frac{\delta C}{\delta \lambda_1} + \lambda_1 t\right)^2 + \left(\frac{\delta C}{\delta \lambda_2} + \lambda_2 t\right)^2\right\} + \frac{\nu^2}{2}\left(\frac{\delta C}{\delta \lambda_3} + \lambda_3 t - \frac{1}{2}gt^2\right)^2, \qquad (158)$$

и если написать ее в форме (18.9) $C = C_1 + C_2$, то C_1 представляет собой первое приближение, которое по предположению обращается в нуль со временем, и тогда поправка C_2 должна точно удовлетворять условию

$$C_2 = \int_0^t \left\{-\frac{\delta C_1}{\delta t} + \frac{\mu^2}{2}\left(\frac{\delta C_1}{\delta \lambda_1} + \lambda_1 t\right)^2 + \frac{\mu^2}{2}\left(\frac{\delta C_1}{\delta \lambda_2} + \lambda_2 t\right)^2 + \frac{\nu^2}{2}\left(\frac{\delta C_1}{\delta \lambda_3} + \lambda_3 t - \frac{1}{2}gt^2\right)^2\right\}dt -$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t \left\{\mu^2\left(\frac{\delta C_2}{\delta \lambda_1}\right)^2 + \mu^2\left(\frac{\delta C_2}{\delta \lambda_2}\right)^2 + \nu^2\left(\frac{\delta C_2}{\delta \lambda_3}\right)^2\right\}dt. \qquad (159)$$

Переходя ко второму приближению, мы можем пренебречь вторым определенным интегралом и вычислить первый при помощи приближенных уравнений (155), после чего получим

$$C_2 = -\int_0^t \{(\lambda_1 - p_1)^2 + (\lambda_2 - p_2)^2 + (\lambda_3 - p_3)^2\}dt + \frac{\mu^2}{2}\int_0^t \{\lambda_1(\lambda_1 - p_1) + \lambda_2(\lambda_2 - p_2)\}dt +$$
$$+\frac{\nu^2}{2}\int_0^t \left(\lambda_3 - \frac{2}{3}gt\right)(\lambda_3 - p_3)t^2 dt = -\frac{t}{3}\{(\lambda_1 - p_1)^2 + (\lambda_2 - p_2)^2 + (\lambda_3 - p_3)^2\} +$$
$$+\frac{t^3}{24}\{\mu^2 p_1(\lambda_1 - p_1) + \mu^2 p_2(\lambda_2 - p_2) + \nu^2 p_3(\lambda_3 - p_3)\} - \frac{t^4}{45}\nu^2 g(\lambda_3 - p_3) +$$
$$+\frac{t^5}{240}(\mu^4 p_1^2 + \mu^4 p_2^2 + \nu^4 p_3^2) - \frac{t^6}{240}\nu^4 g p_3 + \frac{t^7}{945}\nu^4 g^2. \qquad (160)$$

Мы можем подобным же образом усовершенствовать это второе приближение, вычислив новый определенный интеграл C_3 с помощью следующих более приближенных форм соотношений между переменными элементами λ_1, λ_2, λ_3 и началь-

ными постоянными, выведенными нашим общим методом:

$$e_1 = -\frac{\delta C_1}{\delta p_1} - \frac{\delta C_2}{\delta p_1} = -\frac{\lambda_1 - p_1}{\mu^2 t}\left(1 + \frac{\mu^2 t^2}{6} + \frac{\mu^4 t^4}{24}\right) - \frac{tp_1}{2}\left(1 + \frac{\mu^2 t^2}{12} + \frac{\mu^4 t^4}{60}\right),$$

$$e_2 = -\frac{\delta C_1}{\delta p_2} - \frac{\delta C_2}{\delta p_2} = -\frac{\lambda_2 - p_2}{\mu^2 t}\left(1 + \frac{\mu^2 t^2}{6} + \frac{\mu^4 t^4}{24}\right) - \frac{tp_2}{2}\left(1 + \frac{\mu^2 t^2}{12} + \frac{\mu^4 t^4}{60}\right),$$

$$e_3 = -\frac{\delta C_1}{\delta p_3} - \frac{\delta C_2}{\delta p_3} = -\frac{\lambda_3 - p_3}{\nu^2 t}\left(1 + \frac{\nu^2 t^2}{6} + \frac{\nu^4 t^4}{24}\right) -$$

$$-\frac{tp_3}{2}\left(1 + \frac{\nu^2 t^2}{12} + \frac{\nu^4 t^4}{60}\right) + \frac{gt^2}{6}\left(1 + \frac{7\nu^2 t^2}{60} + \frac{\nu^4 t^4}{40}\right), \qquad (161)$$

в которых мы можем рассчитывать только на члены до второго порядка; но они, освобожденные от малых делителей, позволяют довести точность до четвертого порядка, и тогда [53]

$$\lambda_1 = p_1 - \mu^2 t(e_1 + \tfrac{1}{2} p_1 t) + \tfrac{1}{6}\mu^4 t^3 (e_1 + \tfrac{1}{4} p_1 t),$$

$$\lambda_2 = p_2 - \mu^2 t(e_2 + \tfrac{1}{2} p_2 t) + \tfrac{1}{6}\mu^4 t^3 (e_2 + \tfrac{1}{4} p_2 t),$$

$$\lambda_3 = p_3 - \nu^2 t(e_3 + \tfrac{1}{2} p_3 t - \tfrac{1}{6} g t^2) + \tfrac{1}{6}\nu^4 t^3 (e_3 + \tfrac{1}{4} p_3 t - \tfrac{1}{20} g t^2). \qquad (162)$$

Однако если мы уделим немного внимания природе этого процесса, то увидим, что все последующие поправки, к которым он приводит, могут быть только рациональными целыми и однородными функциями второй степени величин λ_1, λ_2, λ_3, p_1, p_2, p_3, g и что все они могут быть выражены в форме их суммы или в форме полной искомой функции C:

$$C = \mu^{-2} a_\mu (\lambda_1 - p_1)^2 + b_\mu p_1 (\lambda_1 - p_1) + \mu^2 c_\mu p_1^2 + \mu^{-2} a_\mu (\lambda_2 - p_2)^2 + b_\mu p_2 (\lambda_2 - p_2) +$$

$$+ \mu^2 c_\mu p_2^2 + \nu^{-2} a_\nu (\lambda_3 - p_3)^2 + b_\nu p_3 (\lambda_3 - p_3) + \nu^2 c_\nu p_3^2 + f_\nu g(\lambda_3 - p_3) +$$

$$+ \nu^2 h_\nu g p_3 + \nu^2 i_\nu g^2, \qquad (163)$$

причем, поскольку коэффициенты a_μ, a_ν и т.д. являются функциями малых величин μ и ν, а также времени, то остается только раскрыть их форму. Отсюда, обозначая их дифференциалы, взятые по времени, через

$$da_\mu = a'_\mu dt, \quad da_\nu = a'_\nu dt, \ldots \qquad (164)$$

и подставляя выражение (162) в точное уравнение в частных производных (158), мы приходим к шести уравнениям в обычных дифференциалах первого порядка:

$$2a'_\nu = (2a_\nu + \nu^2 t)^2, \quad b'_\nu = (2a_\nu + \nu^2 t)(b_\nu + t), \quad c'_\nu = \tfrac{1}{2}(b_\nu + t)^2,$$

$$f'_\nu = (2a_\nu + \nu^2 t)(f_\nu - \tfrac{1}{2} t^2), \quad h'_\nu = (b_\nu + t)(f_\nu - \tfrac{1}{2} t^2), \quad i'_\nu = \tfrac{1}{2}(f_\nu - \tfrac{1}{2} t^2)^2 \qquad (165)$$

и к следующим условиям для определения шести произвольных постоянных, вве-

денных при интегрировании:

$$a_0 = \frac{1}{2t}, \quad b_0 = -\frac{t}{2}, \quad f_0 = \frac{t^2}{6}, \quad c_0 = \frac{t^3}{24}, \quad h_0 = -\frac{t^4}{24}, \quad i_0 = \frac{t^5}{90}. \tag{166}$$

Таким образом, отмечая, что a_μ, b_μ, c_μ могут быть получены из a_ν, b_ν, c_ν заменой ν на μ, мы без труда находим

$$a_\nu = -\tfrac{1}{2}\nu^2 t - \tfrac{1}{2}\nu \operatorname{ctg}\nu t, \quad a_\mu = -\tfrac{1}{2}\mu^2 t - \tfrac{1}{2}\mu \operatorname{ctg}\mu t,$$

$$b_\nu = -t + \frac{1}{\nu}\operatorname{tg}\frac{\nu t}{2}, \quad b_\mu = -t + \frac{1}{\mu}\operatorname{tg}\frac{\mu t}{2},$$

$$c_\nu = -\frac{1}{2\nu^2} + \frac{1}{\nu^3}\operatorname{tg}\frac{\nu t}{2}, \quad c_\mu = -\frac{1}{2\mu^2} + \frac{1}{\mu^3}\operatorname{tg}\frac{\mu t}{2},$$

$$h_\nu = \frac{t^2}{2\nu^2} - \frac{t}{\nu^2}\operatorname{tg}\frac{\nu t}{2}, \quad f_\nu = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{\nu^2} + \frac{t}{\nu}\operatorname{ctg}\nu t,$$

$$i_\nu = \frac{t}{2\nu^4} - \frac{t^3}{6\nu^2} - \frac{t^2}{2\nu^3}\operatorname{ctg}\nu t. \tag{167}$$

Таким образом, форма функции C полностью известна, и мы имеем следующее строгое выражение для этой *функции элементов*:

$$C = -\frac{(\lambda_1 - p_1)^2 + (\lambda_2 - p_2)^2}{2\mu \operatorname{tg}\mu t} - \frac{(\lambda_3 - p_3)^2}{2\nu \operatorname{tg}\nu t} - \frac{t}{2}\{(\lambda_1 - p_1)^2 + (\lambda_2 - p_2)^2 + (\lambda_3 - p_3)^2\} -$$

$$-t\{p_1(\lambda_1 - p_1) + p_2(\lambda_2 - p_2) + p_3(\lambda_3 - p_3)\} -$$

$$-\frac{t}{\mu}\{p_1(\lambda_1 - p_1) + p_2(\lambda_2 - p_2)\}\operatorname{tg}\frac{\mu t}{2} + \frac{1}{\lambda}p_3(\lambda_3 - p_3)\operatorname{tg}\frac{\nu t}{2} -$$

$$-\frac{t}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{\mu}(p_1^2 + p_2^2)\operatorname{tg}\frac{\mu t}{2} + \frac{1}{\nu}p_3^2\operatorname{tg}\frac{\nu t}{2} + \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{\nu^2} + \frac{t}{\nu}\operatorname{ctg}\nu t\right)g(\lambda_3 - p_3) +$$

$$+\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t}{\nu}\operatorname{tg}\frac{\nu t}{2}\right)g p_3 + \left(\frac{t}{2\nu^2} - \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2\nu}\operatorname{ctg}\nu t\right)g^2, \tag{168}$$

которое может быть преобразовано разными способами и при помощи нашего общего метода дает следующие системы точных интегралов дифференциальных уравнений переменных элементов (150) и (151):

$$e_1 = -\frac{\delta C}{\delta p_1} = -\frac{\lambda_1 - p_1}{\mu \sin\mu t} - \frac{p_1}{\mu}\operatorname{tg}\frac{\mu t}{2},$$

$$e_2 = -\frac{\delta C}{\delta p_2} = -\frac{\lambda_2 - p_2}{\mu \sin\mu t} - \frac{p_2}{\mu}\operatorname{tg}\frac{\mu t}{2},$$

$$e_3 = -\frac{\delta C}{\delta p_3} = -\frac{\lambda_3 - p_3}{\nu \sin\nu t} - \frac{p_3}{\nu}\operatorname{tg}\frac{\nu t}{2} + \frac{g}{\nu}\left(\frac{1}{\sin\nu t} - \frac{1}{\nu}\right) \tag{169}$$

и

$$\kappa_1 = \frac{\delta C}{\delta \lambda_1} = -(\lambda_1 - p_1)\left(t + \frac{1}{\mu}\operatorname{ctg}\mu t\right) + p_1\left(-t + \frac{1}{\mu}\operatorname{tg}\frac{\mu t}{2}\right),$$

$$\kappa_2 = \frac{\delta C}{\delta \lambda_2} = -(\lambda_2 - p_2)\left(t + \frac{1}{\mu}\operatorname{ctg}\mu t\right) + p_2\left(-t + \frac{1}{\mu}\operatorname{tg}\frac{\mu t}{2}\right),$$

$$\kappa_3 = \frac{\delta C}{\delta \lambda_3} = -(\lambda_3 - p_3)\left(t + \frac{1}{\nu}\operatorname{ctg}\nu t\right) + p_3\left(-t + \frac{1}{\nu}\operatorname{tg}\frac{\nu t}{2}\right) + g\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{\nu^2} + \frac{t}{\nu}\operatorname{ctg}\nu t\right), \quad (170)$$

т.е.

$$\lambda_1 = p_1 \cos\mu t - e_1\mu\sin\mu t, \quad \lambda_2 = p_2\cos\mu t - e_2\mu\sin\mu t,$$

$$\lambda_3 = p_3\cos\nu t - e_3\nu\sin\nu t + g\left(t - \frac{1}{\nu}\sin\nu t\right) \quad (171)$$

и

$$\kappa_1 = e_1(\cos\mu t + \mu t\sin\mu t) + p_1\left(\frac{1}{\mu}\sin\mu t - t\cos\mu t\right),$$

$$\kappa_2 = e_2(\cos\mu t + \mu t\sin\mu t) + p_2\left(\frac{1}{\mu}\sin\mu t - t\cos\mu t\right),$$

$$\kappa_3 = e_3(\cos\nu t + \nu t\sin\nu t) + p_3\left(\frac{1}{\nu}\sin\nu t - t\cos\nu t\right) - g\left(\frac{1}{\nu^2}\operatorname{vers}\nu t - \frac{t}{\nu}\sin\nu t + \frac{t^2}{2}\right). \quad (172)$$

Соответственно эти точные выражения шести переменных элементов в данной динамической проблеме согласуются с результатами, полученными из шести обыкновенных дифференциальных уравнений (150) и (151) при помощи обычных методов интегрирования, и с теми, которые получены путем исключения из уравнений (113), (114), (147).

Замечания по поводу предыдущего примера

30. Пример, которым мы занимались в последних шести пунктах, не является совершенно идеальным, но находит некоторое осуществление в движении метательного снаряда в пустом пространстве. Если мы будем рассматривать землю как шар с радиусом R и предположим, что ускоряющая сила тяжести меняется обратно пропорционально квадрату расстояния r от ее центра и равна g на поверхности, то эта сила вообще будет gR^2/r^2 и, чтобы применить дифференциальные уравнения (78) к движению метательного снаряда в пустом пространстве, достаточно взять

$$U = gR^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right). \quad (173)$$

Если мы поместим начало прямоугольных координат на земной поверхности и предположим, что полуось + z направлена вертикально вверх, то получим

$$r = \sqrt{(R+z)^2 + x^2 + y^2} \quad (174)$$

и

$$U = -gz + \frac{gz^2}{R} - \frac{g(x^2+y^2)}{2R}, \tag{175}$$

пренебрегая только теми очень малыми членами, которые имеют в качестве знаменателя квадрат земного радиуса. Таким образом, если пренебречь подобными членами, то силовая функция U в данном случае будет иметь форму (110), на чем основаны все рассуждения, проведенные в примере, причем малые постоянные соответственно представляют собой действительные и мнимые величины $\sqrt{g/R}$, $\sqrt{-2g/R}$. Поэтому мы можем применить результаты, полученные в последних пунктах, к движению метательных снарядов в пустом пространстве подстановкой этих значений вместо постоянных, а также заменяя там, где это необходимо, тригонометрические функции экспоненциальными. Однако, помимо теоретической легкости и малого практического значения исследований, относящихся к таких метательным снарядам, эти результаты будут точны лишь до первой отрицательной степени (включительно) земного радиуса, потому что выражение (110) для силовой функции точно лишь в такой же степени; поэтому строгие и приближенные исследования, основанные на этом выражении и изложенные в шести предыдущих пунктах, предлагаются лишь как математические иллюстрации общего *метода*, распространяющегося на все проблемы динамики или по крайней мере на все те проблемы, к которым применим закон живых сил.

Возобновление рассмотрения систем притягивающихся точек; дифференциальные уравнения внутреннего или относительного движения; интегрирование с помощью главной функции

31. Возвращаясь теперь от движения единственной точки к более важному исследованию системы притягивающихся или отталкивающихся точек, получим дифференциальные уравнения (3.1), которые могут быть представлены следующим образом:

$$dt\delta H = \sum (d\eta\delta\overline{\omega} - d\overline{\omega}\delta\eta), \tag{31.1}$$

а для того чтобы отделить абсолютное движение всей системы в пространстве от движения ее точек относительно друг друга, примем следующие отметки положения:

$$x_{,,} = \frac{\sum mx}{\sum m}, \quad y_{,,} = \frac{\sum my}{\sum m}, \quad z_{,,} = \frac{\sum mz}{\sum m} \tag{176}$$

и

$$\xi_i = x_i - x_n, \quad \eta_i = y_i - y_n, \quad \zeta_i = z_i - z_n. \tag{177}$$

Это три прямоугольные координаты центра тяжести системы, отнесенные к началу координат, закрепленному в пространстве, и $3n-3$ прямоугольные координаты $n-1$ масс $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$, отнесенные к n-й массе m_n, как к внутреннему или движущемуся началу координат, но с осями, параллельными первым [54].

Затем мы найдем, как и в предыдущей статье[1]:

$$T=\frac{1}{2}(x_{,,}'^2+y_{,,}'^2+z_{,,}'^2)\sum m+\frac{1}{2}\sum_{,} m(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)-$$
$$-\frac{1}{2\sum m}\left\{\left(\sum_{,} m\xi'\right)^2+\left(\sum_{,} m\eta'\right)^2+\left(\sum_{,} m\zeta'\right)^2\right\},\tag{178}$$

причем знак суммирования $\Sigma_,$ относится только к первым $n-1$ массам. Поэтому

$$T=\frac{1}{2\sum m}\left\{\left(\frac{\delta T}{\delta x_{,,}'}\right)^2+\left(\frac{\delta T}{\delta y_{,,}'}\right)^2+\left(\frac{\delta T}{\delta z_{,,}'}\right)^2\right\}+\frac{1}{2}\sum_{,}\frac{1}{m}\left\{\left(\frac{\delta T}{\delta \xi'}\right)^2+\left(\frac{\delta T}{\delta \eta'}\right)^2+\left(\frac{\delta T}{\delta \zeta'}\right)^2\right\}+$$
$$+\frac{1}{2m_n}\left\{\left(\sum_{,}\frac{\delta T}{\delta\xi'}\right)^2+\left(\sum_{,}\frac{\delta T}{\delta\eta'}\right)^2+\left(\sum_{,}\frac{\delta T}{\delta\zeta'}\right)^2\right\}.\tag{179}$$

Если мы затем положим для сокращения

$$x_,'=\frac{1}{m}\frac{\delta T}{\delta\xi'}=\xi'-\frac{\sum_{,}\delta\xi'}{\sum m},\qquad y_,'=\frac{1}{m}\frac{\delta T}{\delta\eta'}=\eta'-\frac{\sum_{,}\delta\eta'}{\sum m},$$
$$z_,'=\frac{1}{m}\frac{\delta T}{\delta\zeta'}=\zeta'-\frac{\sum_{,}\delta\zeta'}{\sum m},\tag{180}$$

то получим выражение

$$H=\frac{1}{2}(x_{,,}'^2+y_{,,}'^2+z_{,,}'^2)\sum m+\frac{1}{2}\sum_{,} m(x_{,}'^2+y_{,}'^2+z_{,}'^2)+$$
$$+\frac{1}{2m_n}\left\{\left(\sum_{,} mx_,'\right)^2+\left(\sum_{,} my_,'\right)^2+\left(\sum_{,} mz_,'\right)^2\right\}-U.\tag{31.2}$$

Вариацию этого выражения следует сравнить со следующей формой (31.1):

$$dt\delta H=(dx_{,,}\delta x_{,,}'-dx_{,,}'\delta x_{,,}+dy_{,,}\delta y_{,,}'-dy_{,,}'\delta y_{,,}+dz_{,,}\delta z_{,,}'-dz_{,,}'\delta z_{,,})\sum m+$$
$$+\sum_{,} m(d\xi\delta x_,'-dx_,'\delta\xi+d\eta\delta y_,'-dy_,'\delta\eta+d\zeta\delta z_,'-dz_,'\delta\zeta),\tag{31.3}$$

чтобы образовать посредством нашего общего метода $6n$ дифференциальных уравнений движения первого порядка между $6n$ величинами $x_{,,}, y_{,,}, z_{,,}, x_{,,}', y_{,,}', z_{,,}'$, $\xi, \eta, \zeta, x_,', y_,', z_,'$ и временем t.

---

[1] См. уравнение (69).

Определяя таким образом вариацию H, мы должны помнить, что силовая функция U зависит только от $3n-3$ внутренних координат ξ, η, ζ и имеет вид

$$U = m_n(m_1 f_1 + m_2 f_2 + \ldots + m_{n-1} f_{n-1}) + m_1 m_2 f_{1,2} + m_1 m_3 f_{1,3} + \ldots + m_{n-2} m_{n-1} f_{n-2,n-1}, \quad (31.4)$$

где f_i есть функция расстояния m_i от m_n, а $f_{i,k}$ – функция расстояния m_i от m_k, так что их производные функции или первые дифференциальные коэффициенты, взятые по расстояниям, выражают законы взаимного отталкивания, являясь отрицательными в случае притяжения.

Далее мы получим две отдельные группы уравнений: для движения всей системы точек в пространстве и для движения этих точек относительно друг друга, а именно: во-первых, группу

$$dx_{,,} = x'_{,,} dt, \qquad dx'_{,,} = 0,$$

$$dy_{,,} = y'_{,,} dt, \qquad dy'_{,,} = 0,$$

$$dz_{,,} = z'_{,,} dt, \qquad dz'_{,,} = 0 \qquad (181)$$

и, во-вторых, группу

$$d\xi = \left(x'_{,,} + \frac{1}{m_n} \sum_{,} m x'_{,} \right) dt, \quad dx'_{,} = \frac{1}{m} \frac{\delta U}{\delta \xi} dt,$$

$$d\eta = \left(y'_{,,} + \frac{1}{m_n} \sum_{,} m y'_{,} \right) dt, \quad dy'_{,} = \frac{1}{m} \frac{\delta U}{\delta \eta} dt,$$

$$d\zeta = \left(z'_{,,} + \frac{1}{m_n} \sum_{,} m z'_{,} \right) dt, \quad dz'_{,} = \frac{1}{m} \frac{\delta U}{\delta \zeta} dt. \qquad (182)$$

Шесть дифференциальных уравнений первого порядка (181), связывающие $x_{,,}, y_{,,}, z_{,,}, x'_{,,}, y'_{,,}, z'_{,,}$ и t, содержат закон прямолинейного и равномерного движения центра тяжести системы, а $6n-6$ уравнений того же порядка (182), связывающие $6n-6$ переменных ξ, η, ζ, $x'_{,}, y'_{,}, z'_{,}$ и время, являются формами дифференциальных уравнений внутреннего или относительного движения. Мы могли бы исключить $3n-3$ вспомогательных переменных $x'_{,}, y'_{,}, z'_{,}$ в этих последних уравнениях и получить таким образом еще одну группу $3n-3$ уравнений второго порядка, включающую только относительные координаты и время:

$$\xi'' = \frac{1}{m} \frac{\delta U}{\delta \xi} + \frac{1}{m_n} \sum_{,} \frac{\delta U}{\delta \xi}, \qquad \eta'' = \frac{1}{m} \frac{\delta U}{\delta \eta} + \frac{1}{m_n} \sum_{,} \frac{\delta U}{\delta \eta},$$

$$\zeta'' = \frac{1}{m} \frac{\delta U}{\delta \zeta} + \frac{1}{m_n} \sum_{,} \frac{\delta U}{\delta \zeta}. \qquad (183)$$

Для многих целей удобнее оставить уравнения (182), опустив, однако, для простоты нижние штрихи вспомогательных переменных $x'_{,}, y'_{,}, z'_{,}$, так как легко доказать, что эти вспомогательные переменные (180) являются компонентами центробарической скорости [55], и поэтому при исследовании свойств внутреннего или относительного движения мы можем предположить, что центр тяжести системы закреплен в пространстве в начале координат x, y, z. Мы можем также для простоты опустить нижний штрих в $\Sigma_{,}$, подразумевая, что суммирование должно распространяться только на первые $n-1$ массы, и обозначая для большей определенности n-ю массу особым символом M. Тогда можно выразить дифференциальные уравнения относительного движения следующей упрощенной формулой:

$$dt\delta H = \Sigma m(d\xi\delta x' - dx'\delta\xi + d\eta\delta y' - dy'\delta\eta + d\zeta\delta z' - dz'\delta\zeta), \tag{31.5}$$

в которой

$$H = \frac{1}{2}\sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + \frac{1}{2M}\left\{\left(\sum mx'\right)^2 + \left(\sum my'\right)^2 + \left(\sum mz'\right)^2\right\} - U. \tag{31.6}$$

Интегралы этих уравнений относительного движения содержатся (согласно нашему общему методу) в формуле

$$dS = \Sigma m(x'\delta\xi - a'\delta\alpha + y'\delta\eta - b'\delta\beta + z'\delta\zeta - c'\delta\gamma), \tag{31.7}$$

в которой $\alpha, \beta, \gamma, a', b', c'$ обозначают первоначальные величины $\xi, \eta, \zeta, x', y', z'$, а S является *главной функцией относительного движения системы*, т.е. это рассмотренная ранее функция S, упрощенная посредством опускания той части, которая исчезает при закреплении центра тяжести.

Функция S дает в общем виде законы движения этого центра, или интегралы уравнений (181).

Второй пример: случай тройной или множественной системы с одной преобладающей массой; уравнения невозмущенных движений других масс в отдельных бинарных системах относительно этой преобладающей массы; дифференциалы всех их элементов, выраженные посредством коэффициентов одной возмущающей функции

32. Предположим теперь, что $n-1$ массы малы по сравнению с n-й массой M, и разделим выражение (31.6) для H на две следующие части:

$$H_1 = \sum \frac{m}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - M\sum mf,$$

$$H_2 = \frac{m_1 m_2}{M}(x'_1 x'_2 + y'_1 y'_2 + z'_1 z'_2 - Mf_{1,2}) + \ldots + \frac{m_i m_k}{M}(x'_i x'_k + y'_i y'_k + z'_i z'_k - Mf_{i,k}) + \ldots, \tag{32.1}$$

из которых последняя мала по сравнению с первой и может быть опущена в первом приближении. Пренебрегая ею, мы придем к следующим $6n-6$ дифференциальным

уравнениям первого порядка, относящимся к более простому движению, которое может быть названо *невозмущенным*:

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{1}{m}\frac{\delta H_1}{\delta x'}=\left(1+\frac{m}{M}\right)x', \quad \frac{dx'}{dt}=-\frac{1}{m}\frac{\delta H_1}{\delta \xi}=M\frac{\delta f}{\delta \xi},$$

$$\frac{d\eta}{dt}=\frac{1}{m}\frac{\delta H_1}{\delta y'}=\left(1+\frac{m}{M}\right)y', \quad \frac{dy'}{dt}=-\frac{1}{m}\frac{\delta H_1}{\delta \eta}=M\frac{\delta f}{\delta \eta},$$

$$\frac{d\zeta}{dt}=\frac{1}{m}\frac{\delta H_1}{\delta z'}=\left(1+\frac{m}{M}\right)z', \quad \frac{dz'}{dt}=-\frac{1}{m}\frac{\delta H_1}{\delta \zeta}=M\frac{\delta f}{\delta \zeta}. \tag{32.2}$$

Эти уравнения распадаются на $n-1$ групп, соответствующих $n-1$ двойным системам (m, M). Легко проинтегрировать уравнения каждой группы отдельно. Мы можем предположить далее, что эти интегралы найдены в таком виде:

$$\kappa=\chi^{(1)}(t,\xi,\eta,\zeta,x',y',z'), \quad \nu=\chi^{(4)}(t,\xi,\eta,\zeta,x',y',z'),$$

$$\lambda=\chi^{(2)}(t,\xi,\eta,\zeta,x',y',z'), \quad \tau=\chi^{(5)}(t,\xi,\eta,\zeta,x',y',z'),$$

$$\mu=\chi^{(3)}(t,\xi,\eta,\zeta,x',y',z'), \quad \omega=\chi^{(6)}(t,\xi,\eta,\zeta,x',y',z'). \tag{32.3}$$

Шесть величин κ, λ, μ, ν, τ, ω являются константами невозмущенного движения какой-либо одной двойной системы. Поэтому шесть функций, таких, как $\chi^{(1)}$, $\chi^{(2)}$, $\chi^{(3)}$, $\chi^{(4)}$, $\chi^{(5)}$, $\chi^{(6)}$, или κ, λ, μ, ν, τ, ω, тождественно удовлетворяют следующему уравнению:

$$m\frac{\delta\kappa}{\delta t}+\frac{\delta\kappa}{\delta\xi}\frac{\delta H_1}{\delta x'}-\frac{\delta\kappa}{\delta x'}\frac{\delta H_1}{\delta\xi}+\frac{\delta\kappa}{\delta\eta}\frac{\delta H_1}{\delta y'}-\frac{\delta\kappa}{\delta y'}\frac{\delta H_1}{\delta\eta}+\frac{\delta\kappa}{\delta\zeta}\frac{\delta H_1}{\delta z'}-\frac{\delta\kappa}{\delta z'}\frac{\delta H_1}{\delta\zeta}=0 \tag{32.4}$$

и пяти другим аналогичным уравнениям для пяти остальных элементов λ, μ, ν, τ, ω какой-либо двойной системы (m, M).

33. Возвращаясь теперь к первоначальной множественной системе, мы можем оставить уравнения (32.3) как определения; тогда уже не можем больше рассматривать элементы κ_i, λ_i, μ_i, ν_i, τ_i, ω_i двойной системы (m_i, M) как постоянные, потому что система возмущается теперь другими массами m_k.

Однако $6n-6$ уравнений возмущенного относительного движения, когда мы их запишем в форме

$$m\frac{d\xi}{dt}=\frac{\delta H_1}{\delta x'}+\frac{\delta H_2}{\delta x'}, \quad m\frac{dx'}{dt}=-\frac{\delta H_1}{\delta \xi}-\frac{\delta H_2}{\delta \xi},$$

$$m\frac{d\eta}{dt}=\frac{\delta H_1}{\delta y'}+\frac{\delta H_2}{\delta y'}, \quad m\frac{dy'}{dt}=-\frac{\delta H_1}{\delta \eta}-\frac{\delta H_2}{\delta \eta},$$

$$m\frac{d\zeta}{dt}=\frac{\delta H_1}{\delta z'}+\frac{\delta H_2}{\delta z'}, \quad m\frac{dz'}{dt}=-\frac{\delta H_1}{\delta \zeta}-\frac{\delta H_2}{\delta \zeta} \tag{33.1}$$

и объединим с тождествами вида (32.4), дадут нам следующее простое выражение для дифференциала элемента κ в его возмущенном и изменяющемся состоянии:

$$m\frac{d\kappa}{dt}=\frac{\delta\kappa}{\delta\xi}\frac{\delta H_2}{\delta x'}-\frac{\delta\kappa}{\delta x'}\frac{\delta H_2}{\delta\xi}+\frac{\delta\kappa}{\delta\eta}\frac{\delta H_2}{\delta y'}-\frac{\delta\kappa}{\delta y'}\frac{\delta H_2}{\delta\eta}+\frac{\delta\kappa}{\delta\zeta}\frac{\delta H_2}{\delta z'}-\frac{\delta\kappa}{\delta z'}\frac{\delta H_2}{\delta\zeta} \tag{33.2}$$

совместно с аналогичными выражениями для дифференциалов других элементов. Если мы выразим ξ, η, ζ, x', y', z' и, следовательно, само H_2 как функции, зависящие от времени и этих переменных элементов, мы можем преобразовать $6n-6$ дифференциальных уравнений первого порядка (33.1), связывающих ξ, η, ζ, x', y', z', t, в такое же число уравнений того же порядка между этими переменными элементами и временем. Они будут иметь такую форму:

$$\begin{aligned}
m\frac{d\kappa}{dt}&=\{\kappa,\lambda\}\frac{\delta H_2}{\delta\lambda}+\{\kappa,\mu\}\frac{\delta H_2}{\delta\mu}+\{\kappa,\nu\}\frac{\delta H_2}{\delta\nu}+\{\kappa,\tau\}\frac{\delta H_2}{\delta\tau}+\{\kappa,\omega\}\frac{\delta H_2}{\delta\omega},\\
m\frac{d\lambda}{dt}&=\{\lambda,\kappa\}\frac{\delta H_2}{\delta\kappa}+\{\lambda,\mu\}\frac{\delta H_2}{\delta\mu}+\{\lambda,\nu\}\frac{\delta H_2}{\delta\nu}+\{\lambda,\tau\}\frac{\delta H_2}{\delta\tau}+\{\lambda,\omega\}\frac{\delta H_2}{\delta\omega},\\
m\frac{d\mu}{dt}&=\{\mu,\kappa\}\frac{\delta H_2}{\delta\kappa}+\{\mu,\lambda\}\frac{\delta H_2}{\delta\lambda}+\{\mu,\nu\}\frac{\delta H_2}{\delta\nu}+\{\mu,\tau\}\frac{\delta H_2}{\delta\tau}+\{\mu,\omega\}\frac{\delta H_2}{\delta\omega},\\
m\frac{d\nu}{dt}&=\{\nu,\kappa\}\frac{\delta H_2}{\delta\kappa}+\{\nu,\lambda\}\frac{\delta H_2}{\delta\lambda}+\{\nu,\mu\}\frac{\delta H_2}{\delta\mu}+\{\nu,\tau\}\frac{\delta H_2}{\delta\tau}+\{\nu,\omega\}\frac{\delta H_2}{\delta\omega},\\
m\frac{d\tau}{dt}&=\{\tau,\kappa\}\frac{\delta H_2}{\delta\kappa}+\{\tau,\lambda\}\frac{\delta H_2}{\delta\lambda}+\{\tau,\mu\}\frac{\delta H_2}{\delta\mu}+\{\tau,\nu\}\frac{\delta H_2}{\delta\nu}+\{\tau,\omega\}\frac{\delta H_2}{\delta\omega},\\
m\frac{d\omega}{dt}&=\{\omega,\kappa\}\frac{\delta H_2}{\delta\kappa}+\{\omega,\lambda\}\frac{\delta H_2}{\delta\lambda}+\{\omega,\mu\}\frac{\delta H_2}{\delta\mu}+\{\omega,\nu\}\frac{\delta H_2}{\delta\nu}+\{\omega,\tau\}\frac{\delta H_2}{\delta\tau},
\end{aligned} \tag{33.3}$$

если мы примем для сокращения, что

$$\{\kappa,\lambda\}=\frac{\delta\kappa}{\delta\xi}\frac{\delta\lambda}{\delta x'}-\frac{\delta\kappa}{\delta x'}\frac{\delta\lambda}{\delta\xi}+\frac{\delta\kappa}{\delta\eta}\frac{\delta\lambda}{\delta y'}-\frac{\delta\kappa}{\delta y'}\frac{\delta\lambda}{\delta\eta}+\frac{\delta\kappa}{\delta\zeta}\frac{\delta\lambda}{\delta z'}-\frac{\delta\kappa}{\delta z'}\frac{\delta\lambda}{\delta\zeta}, \tag{33.4}$$

и из этого символа образуем другие, $\{\kappa, \mu\}$, $\{\lambda, \kappa\}$ и т.д. путем чередования букв. Очевидно, что эти символы имеют такие свойства:

$$\{\lambda, \kappa\} = -\{\kappa, \lambda\}, \quad \{\kappa, \kappa\} = 0. \tag{184}$$

Из п. 15 вытекает, что комбинации $\{\kappa, \lambda\}$ и т.д., представленные как функции этих элементов, не содержат времени в явном виде. Существуют, вообще говоря, согласно свойствам (184) только 15 таких различных комбинаций для каждой из $n-1$ систем. Но всего их могло бы быть $15n-15$, если бы они не допускали дальнейшего сокращения.

Однако из принципов п. 16 следует, что $12n-12$ этих комбинаций могут быть приведены к нулю посредством соответствующего выбора элементов. Ниже предлагается иной путь значительного упрощения уравнений, по крайней мере для обширного класса случаев, в которых невозмущенное расстояние между двумя точками каждой двойной системы (m, M) допускает минимальное значение.

Упрощение дифференциальных выражений посредством соответствующего выбора элементов

34. Когда невозмущенное расстояние r от m до M может принять минимальное значение q, соответствующее времени τ и удовлетворяющее в это же время условиям

$$r' = 0, \quad r'' > 0, \tag{185}$$

тогда интегралы группы (32.2), или известные законы невозмущенного движения m относительно M, могут быть представлены следующим образом:

$$\kappa = \{(\xi y' - \eta x')^2 + (\eta z' - \zeta y')^2 + (\zeta x' - \xi x')^2\}^{1/2},$$

$$\lambda = \kappa - \xi y' + \eta x', \quad \mu = \frac{M+m}{2M}(x'^2 + y'^2 + z'^2) - Mf(r), \quad \nu = \mathrm{tg}^{-1}\frac{\eta z' - \zeta y'}{\xi z' - \zeta x'},$$

$$\tau = t - \int_q^r \left(\frac{M}{M+m}\right)^{1/2} \left\{2\mu + 2Mf(r) - \left(1 + \frac{m}{M}\right)\frac{\kappa^2}{r^2}\right\}^{-1/2} \frac{dr}{\sqrt{(dr)^2}}\,dr,$$

$$\omega = \nu + \sin^{-1}\frac{\kappa\zeta r^{-1}}{\sqrt{2\kappa\lambda - \lambda^2}} -$$

$$-\int_q^r \left(\frac{M+m}{m}\right)^{1/2} \left\{2\mu + 2Mf(r) - \left(1 + \frac{m}{M}\right)\frac{\kappa^2}{r^2}\right\}^{-1/2} \frac{dr}{\sqrt{(dr)^2}}\,dr. \tag{34.1}$$

Здесь минимальное расстояние q является функцией двух элементов κ, μ, которые должны удовлетворять условиям

$$2\mu + 2Mf(q) - \left(1 + \frac{m}{M}\right)\frac{\kappa^2}{q^2} = 0, \quad Mf'(q) + \left(1 + \frac{m}{M}\right)\frac{k^2}{q^3} > 0, \tag{186}$$

а $\sin^{-1}s$, $\mathrm{tg}^{-1}t$ использованы (согласно написанию сэра Джона Гершеля) [56], чтобы выразить не косеканс и котангенс, а *обратные функции*, соответствующие синусу и косинусу или дугам, которые чаще называют arc(sin = s), arc(tg = t). Следует отметить также, что множитель $dr / \sqrt{(dr)^2}$, который мы ввели под знак интеграла, не является лишним. Оставаясь равным единице по абсолютной величине, он сообщает знак плюс или минус в зависимости от того, является ли dr положительным или отрицательным, т.е. соответственно увеличивается r или уменьшается. Это сделано, чтобы придать каждому подынтегральному выражению неизменно положительное значение.

Вообще говоря, по-видимому, это полезное правило (хотя ему не всегда следуют математики) употреблять символ квадратного корня $\sqrt{R}$ только для положительных величин, если перед ним специально не поставлен отрицательный знак.

Тогда $r/\sqrt{r^2}$ будет означать положительную или отрицательную единицу, соответственно тому, является ли r положительным или отрицательным.

Предполагается, что дуга, обозначаемая синусом в выражении элемента ω, выбрана таким образом, что она непрерывно увеличивается с течением времени.

35. После этих замечаний относительно символики применим формулу (33.4), чтобы вычислить значения пятнадцати комбинаций вида $\{\kappa, \lambda\}$ шести постоянных величин или элементов (34.1). Так как

$$r=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, \tag{187}$$

то легко видеть, что шесть комбинаций четырех первых элементов будут

$$\{\kappa, \lambda\}=0, \quad \{\kappa, \mu\}=0, \quad \{\kappa, \nu\}=0, \quad \{\lambda, \mu\}=0, \quad \{\lambda, \nu\}=1, \quad \{\mu, \nu\}=0. \tag{188}$$

Чтобы образовать четыре комбинации этих четырех элементов с τ, нужно принять во внимание, что пятый элемент τ, как это видно из его выражения в (34.1), явно содержит (помимо времени) расстояние r и два элемента κ, μ. Определенные выше комбинации показывают, что эти два элемента могут считаться постоянными при образовании четырех искомых комбинаций. Нам следует учесть изменение r, и если мы интерпретируем с помощью правила (33.4) символы $\{\kappa, r\}$, $\{\lambda, r\}$, $\{\mu, r\}$, $\{\nu, r\}$ и примем во внимание уравнения (32.2), то увидим, что

$$\{\kappa, r\}=0, \quad \{\lambda, r\}=0, \quad \{\mu, r\}=-dr/dt, \quad \{\nu, r\}=0, \tag{189}$$

где dr/dt является полной производной r при невозмущенном движении, определенном уравнениями (32.2). Следовательно,

$$\{\kappa, \tau\}=0, \quad \{\lambda, \tau\}=0, \quad \{\nu, \tau\}=0 \tag{190}$$

и

$$\{\mu,\tau\}=-\frac{\delta\tau}{\delta r}\frac{dr}{dt}=+\frac{dt}{dr}\frac{dr}{dt}=1. \tag{191}$$

Очевидно, что в процессе дифференцирования выражений элементов (34.1) мы можем считать эти элементы постоянными, если заменим дифференциалы ξ, η, ζ, x', y', z' их невозмущенными значениями. Остается вычислить пять комбинаций пяти рассмотренных элементов с последним элементом ω, который представлен в (34.1) как функция расстояния r, координаты ζ и четырех элементов κ, λ, μ, ν. Таким образом, мы можем использовать формулу

$$\{e,\omega\}=\frac{\delta\omega}{\delta r}\{e,r\}+\frac{\delta\omega}{\delta\zeta}\{e,\zeta\}+\frac{\delta\omega}{\delta\kappa}\{e,\kappa\}+\frac{\delta\omega}{\delta\lambda}\{e,\lambda\}+\frac{\delta\omega}{\delta\mu}\{e,\mu\}+\frac{\delta\omega}{\delta\nu}\{e,\nu\}, \tag{192}$$

если в ней e будет каким-либо из первых пяти элементов или расстоянием r. Тогда

$$\{e,r\}=-\frac{1}{r}\left(\xi\frac{\delta e}{\delta x'}+\eta\frac{\delta e}{\delta y'}+\zeta\frac{\delta e}{\delta z'}\right), \quad \{e,\zeta\}=-\frac{\delta e}{\delta z'}, \quad \{e,\kappa\}=0 \tag{193}$$

и

$$\frac{\delta\omega}{\delta\zeta}=\left(\frac{\delta\kappa}{\delta z'}\right)^{-1},\quad \frac{\delta\omega}{\delta r}=-\frac{d\zeta}{dr}\frac{\delta\omega}{\delta\zeta},\quad \frac{\delta\omega}{\delta\nu}=1. \tag{194}$$

Формула (192) может быть записана в следующем виде:

$$\{e,\omega\}=\left\{\frac{z'(\xi(\delta e/\delta x')+\eta(\delta e/\delta y')+\zeta(\delta e/\delta z'))}{\xi x'+\eta y'+\zeta z'}-\frac{\delta e}{\delta z'}\right\}\left(\frac{\delta\kappa}{\delta z'}\right)^{-1}+$$

$$+\{e,\nu\}+\frac{\delta\omega}{\delta\lambda}\{e,\lambda\}+\frac{\delta\omega}{\delta\mu}\{e,\mu\}. \tag{195}$$

Мы легко найдем с помощью этой формулы, что

$$\{\kappa,\omega\}=-1,\quad \{\lambda,\omega\}=0,\quad \{\mu,\omega\}=0,\quad \{r,\omega\}=\frac{dr}{dt}\frac{\delta\omega}{\delta\mu} \tag{196}$$

и

$$\{\nu,\omega\}=-\frac{\delta\nu}{\delta z'}\frac{d\omega}{\delta\zeta}-\frac{\delta\omega}{\delta\lambda}=0. \tag{197}$$

Формула (195) распространяется также и на комбинацию $\{\tau,\omega\}$, но в процессе вычисления этой последней комбинации мы должны помнить, что τ определяется уравнениями (34.1) как функция κ, μ, r, так что

$$\frac{\delta\tau}{\delta r}=-\frac{dt}{dr}. \tag{198}$$

Таким образом, с помощью уже определенных комбинаций (196) мы видим, что

$$\{\tau,\omega\}=-\frac{\delta\tau}{\delta\kappa}-\frac{\delta\omega}{\delta\mu}=\frac{\delta}{\delta\kappa}\int_q^r\Theta_r dr+\frac{\delta}{\delta\mu}\int_q^r\Omega_r dr, \tag{199}$$

где Θ_r и Ω_r – сокращенное обозначение коэффициентов при dr в подынтегральном выражении формул (34.1), а именно

$$\Theta_r=\left(\frac{M}{M+m}\right)^{1/2}\frac{dr}{\sqrt{(dr)^2}}\left\{2\mu+Mf(r)-\frac{M+m}{M}\frac{\kappa^2}{r^2}\right\}^{-1/2},$$

$$\Omega_r=\frac{\kappa}{r^2}\left(\frac{M+m}{M}\right)^{1/2}\frac{dr}{\sqrt{(dr)^2}}\left\{2\mu+2Mf(r)-\frac{M+m}{M}\frac{\kappa^2}{r^2}\right\}^{-1/2}. \tag{200}$$

Эти коэффициенты, очевидно, связаны соотношением

$$\frac{\delta\Theta_r}{\delta\kappa}+\frac{\delta\Omega_r}{\delta\mu}=0, \tag{201}$$

которое (после интегрирования) принимает вид

$$\frac{\delta}{\delta\kappa}\int_{r_i}^r\Theta_r dr+\frac{\delta}{\delta\mu}\int_{r_i}^r\Omega_r dr=0. \tag{202}$$

Здесь r, является величиной, независимой по отношению к элементам κ и μ. Мы могли бы, следовательно, сразу заключить с помощью (199), что комбинация $\{\tau, \omega\}$ обращается в нуль, если бы не обнаружилась трудность, заключающаяся в необходимости варьировать нижний предел q, зависящий от этих двух элементов, и в том, что на этом нижнем пределе коэффициенты Θ_r, Ω_r становятся бесконечными.

Однако соотношение (202) показывает, что мы можем представить комбинацию $\{\tau, \omega\}$ следующим образом:

$$\{\tau,\omega\} = \frac{\delta}{\delta\kappa}\int_q^{r_,} \Theta_r dr + \frac{\delta}{\delta\mu}\int_q^{r_,} \Omega_r dr, \tag{203}$$

где r, является вспомогательной и произвольной величиной, которая фактически не может повлиять на результат, но может облегчить вычисление. Другими словами, мы можем придать расстоянию r произвольное значение, не изменяющееся в зависимости от бесконечно малых вариаций κ, μ. Это может оказать помощь в процессе вычисления (199). Поэтому мы можем предположить, что увеличение расстояния $r - q$ малó и соответствует малому положительному интервалу времени $t - \tau$, в течение которого расстояние r и его производная r' постоянно увеличиваются. И далее после первого момента τ величина

$$\Theta_r = 1/r' \tag{204}$$

будет постоянно ограничена, положительна и будет уменьшаться в течение того же самого интервала времени, так что ее интеграл должен быть больше, чем в том случае, если бы он имел постоянно свое конечное значение, т.е.

$$t - \tau = \int_q^r \Theta_r dr > (r - q)\Theta_r. \tag{205}$$

Следовательно, хотя Θ_r стремится к бесконечности, тем не менее $(r - q)\Theta_r$ стремится к нулю, когда при уменьшении интервала мы заставляем r стремится к q. Поэтому разность

$$\int_q^r \Omega_r dr - \frac{M+m}{M}\frac{\kappa}{q^2}\int_q^r \Theta_r dr = \frac{M+m}{M}\int_q^r \left(\frac{\kappa}{r^2} - \frac{\kappa}{q^2}\right)\Theta_r dr \tag{206}$$

будет также стремиться к нулю одновременно с ее частной производной первого порядка, взятой по μ [57].

Мы находим, таким образом, следующую формулу для $\{\tau, \omega\}$ (приняв во внимание, что, как было показано, эта комбинация не зависит от r):

$$\{\tau,\omega\} = \Lambda_{r=q}\left\{\frac{\delta}{\delta\kappa}\int_q^r \Theta_r dr + \frac{M+m}{M}\frac{\kappa}{q^2}\frac{\delta}{\delta\mu}\int_q^r \Theta_r dr\right\}, \tag{207}$$

где знак $\Lambda_{r=q}$ означает, что берется предел, к которому стремится это выражение, когда r стремится к q.

В последней формуле, как и в (199), интеграл $\int_q^r \Theta_r dr$ можно рассматривать как известную функцию от r, q, κ, μ или просто от r, q, κ, если μ исключается с помощью первого условия (186). Следовательно, он исчезает независимо от κ, когда $r = q$. Это можно обозначить так:

$$\int_q^r \Theta_r dr = \varphi(r, q, \kappa) - \varphi(q, q, \kappa), \tag{208}$$

причем форма функции φ зависит от закона притяжения или отталкивания. Поэтому, когда рассматривается зависимость этого интеграла от κ и μ через посредство зависимости от κ и q, необходимо, чтобы интеграл не изменялся вместе с κ в процессе вычисления {τ, ω} по формуле (207), потому что его частные производные $\left(\frac{\delta}{\delta\kappa}\int_q^r \Theta_r dr\right)$, полученные, когда q считается постоянной, обращаются в нуль в пределе при $r = q$. Его изменение с изменением q также не должно иметь место, потому что, согласно формуле (186),

$$\frac{\delta q}{\delta\kappa} + \frac{M+m}{M}\frac{\kappa}{q^2}\frac{\delta q}{\delta\mu} = 0. \tag{209}$$

Поэтому рассматриваемый интеграл может считаться постоянным, и мы найдем, наконец,

$$\{\tau, \omega\} = 0. \tag{210}$$

Выражения (199) или (203) оба стремятся к бесконечности, когда r стремится к q, но всегда уничтожают друг друга.

36. Объединяя теперь наши результаты и представляя для большей ясности каждую комбинацию в двух формах, в каких она встречается, когда изменяется порядок элементов, мы получаем для каждой двойной системы следующие тридцать выражений [58]:

$$\begin{array}{lllll}
\{\kappa, \lambda\} = 0, & \{\kappa, \mu\} = 0, & \{\kappa, \nu\} = 0, & \{\kappa, \tau\} = 0, & \{\kappa, \omega\} = -1,\\
\{\lambda, \kappa\} = 0, & \{\lambda, \mu\} = 0, & \{\lambda, \nu\} = 1, & \{\lambda, \tau\} = 0, & \{\lambda, \omega\} = 0,\\
\{\mu, \kappa\} = 0, & \{\mu, \lambda\} = 0, & \{\mu, \nu\} = 0, & \{\mu, \tau\} = 1, & \{\mu, \omega\} = 0,\\
\{\nu, \kappa\} = 0, & \{\nu, \lambda\} = -1, & \{\nu, \mu\} = 0, & \{\nu, \tau\} = 0, & \{\nu, \omega\} = 0,\\
\{\tau, \kappa\} = 0, & \{\tau, \lambda\} = 0, & \{\tau, \mu\} = -1, & \{\tau, \nu\} = 0, & \{\tau, \omega\} = 0,\\
\{\omega, \kappa\} = 1, & \{\omega, \lambda\} = 0, & \{\omega, \mu\} = 0, & \{\omega, \nu\} = 0, & \{\omega, \tau\} = 0.
\end{array} \tag{36.1}$$

В этой системе три комбинации {μ,τ}, {ω,κ}, {λ,ν} равны (каждая) положительной единице; три обратные комбинации {τ, μ}, {κ, ω}, {ν, λ} равны (каждая) отрицательной единице, а все остальные равны нулю. Шесть дифференциальных уравнений первого порядка для шести переменных элементов какой-либо двойной

системы (m, M) имеют, согласно (32.7), следующий вид:

$$m\frac{d\mu}{dt} = \frac{\delta H_2}{\delta \tau}, \qquad m\frac{d\tau}{dt} = -\frac{\delta H_2}{\delta \mu},$$
$$m\frac{d\omega}{dt} = \frac{\delta H_2}{\delta \kappa}, \qquad m\frac{d\kappa}{dt} = -\frac{\delta H_2}{\delta \omega},$$
$$m\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\delta H_2}{\delta \nu}, \qquad m\frac{d\nu}{dt} = -\frac{\delta H_2}{\delta \lambda}. \tag{36.2}$$

Если мы опустим вариацию t, то все они могут быть в итоге представлены в следующей форме для вариации H_2:

$$\delta H_2 = \sum m(\mu'\delta\tau - \tau'\delta\mu + \omega'\delta\kappa - \kappa'\delta\omega + \lambda'\delta\nu - \nu'\delta\lambda). \tag{36.3}$$

Эта единственная формула дает возможность вывести все $6n - 6$ дифференциальных уравнений первого порядка для всех переменных элементов всех двойных систем из вариаций или из частных производных одной величины H_2, выраженной как функция этих элементов.

Если мы решим ввести в уравнение (36.3) для δH_2 вариацию времени t, то должны только заменить $\delta\tau$ на $\delta\tau - \delta t$, потому что, согласно (34.1), δt входит только в таком виде, т.е. t входит только в форме $t - \tau_i$ в выражения ξ_i, η_i, ζ_i, x_i', y_i', z_i' как функции времени и этих элементов. Мы имеем поэтому

$$\frac{\delta H_2}{\delta t} = -\sum \frac{\delta H_2}{\delta \tau} = -\sum m\mu', \tag{211}$$

и, следовательно, согласно формулам (32.1), (34.1),

$$H_1 = \sum m\mu. \tag{212}$$

Окончательно находим

$$\frac{dH_1}{dt} = -\frac{\delta H_2}{\delta t}. \tag{36.2}$$

Эта замечательная форма для дифференциала величины H_1, рассматриваемой как переменный элемент, является общей для всех проблем динамики.

Посредством общего метода она может быть выведена из формул п. 13 и 14, которые дают [59]

$$\frac{dH_1}{dt} = \frac{\delta H_2}{\delta \kappa_1}\sum\left(\frac{\delta H_1}{\delta \eta}\frac{\delta \kappa_1}{\delta \varpi} - \frac{\delta H_1}{\delta \varpi}\frac{\delta \kappa_1}{\delta \eta}\right) + \ldots + \frac{\delta H_2}{\delta \kappa_{6n}}\sum\left(\frac{\delta H_1}{\delta \eta}\frac{\delta \kappa_{6n}}{\delta \varpi} - \frac{\delta H_1}{\delta \varpi}\frac{\delta \kappa_{6n}}{\delta \eta}\right) =$$
$$= \frac{\delta H_2}{\delta \kappa_1}\frac{\delta \kappa_1}{\delta t} + \frac{\delta H_2}{\delta \kappa_2}\frac{\delta \kappa_2}{\delta t} + \ldots + \frac{\delta H_2}{\delta \kappa_{6n}}\frac{\delta \kappa_{6n}}{\delta t} = -\frac{\delta H_2}{\delta t}, \tag{213}$$

где κ_1, κ_2,… κ_{6n} являются какими-либо из $6n$ элементов системы, выраженными как функции времени и величин η, ω. При специальном и более конкретном разборе мы увидим, что $H_1 + H_2$ является постоянной возмущенного движения и что при

нахождении первых производных от H_2 по времени эти элементы могут, согласно (15.3), считаться постоянными. Это также замечательный результат только что рассмотренных общих принципов, но нетрудно проверить, что первая частная производная $\delta\kappa_s/\delta t$ какого-либо элемента κ_s по времени может быть выражена как функция одного только элемента, не включающая время в явном виде.

О существенном различии между системами переменных элементов, рассматриваемых в данном очерке, и системами, которые применялись математиками до сих пор

37. Когда мы проинтегрируем дифференциальные уравнения переменных элементов (36.2), то сможем вычислить переменные относительные координаты ξ, η, ζ для какой-либо двойной системы (m, M) с помощью законов невозмущенного движения, выраженных уравнениями (32.2), (34.1) или посредством следующих формул:

$$\xi = r\left(\cos\theta + \frac{\lambda}{\kappa}\sin(\theta - \nu)\sin\nu\right),$$

$$\eta = r\left(\sin\theta - \frac{\lambda}{\kappa}\sin(\theta - \nu)\cos\nu\right),$$

$$\zeta = \frac{r}{\kappa}\sqrt{2\lambda\kappa - \lambda^2}\,\sin(\theta - \nu). \tag{37.1}$$

В этих формулах расстояние r определяется как функция времени t и элементов τ, κ, μ посредством пятого уравнения (34.1). В уравнениях (37.1) имеем [60]

$$\theta = \omega + \int_q^r \left(\frac{M+m}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{2\mu + 2Mf(r) - \frac{M+m}{M}\frac{\kappa^2}{r^2}\right\}^{-\frac{1}{2}} \frac{dr}{\sqrt{(dr)^2}}\frac{\kappa}{r^2}dr, \tag{37.2}$$

где q по-прежнему выражает минимум r, когда орбита рассматривается как постоянная, и по-прежнему связано с элементами κ, μ согласно первому уравнению условия (186). С астрономической точки зрения M – это Солнце; m – планета; ξ, η, ζ – гелиоцентрические прямоугольные координаты; r – радиус-вектор; θ – долгота по орбите; ω – долгота перигелия; ν – долгота точки пересечения орбит; $\theta - \omega$ – действительная аномалия; $\theta - \nu$ – угол (argument) широты; μ – неизменная часть половины квадрата невозмущенной гелиоцентрической скорости, уменьшенной в отношении массы Солнца (M) к суммарной массе Солнца и планеты $(M + m)$; κ – двойная секториальная скорость, уменьшенная в том же отношении; λ/κ – обратный синус наклона орбиты; q – расстояние перигелия и τ – время прохождения перигелия. Закон притяжения и отталкивания остается здесь неопределенным. По закону Ньютона μ является массой Солнца, деленной на большую ось орбиты, взятую с отрицательным знаком, а κ – квадратный корень из половины параметра, умноженный на массу Солнца и деленный на квадратный корень из суммы масс Солнца и планеты.

Изменяющийся эллипс или другая орбита, требуемая предшествующими форму-

лами, соответственно (хотя и немного) отличается от орбиты, используемой до сих пор астрономами.

Это происходит потому, что она правильно дает гелиоцентрические координаты, но не гелиоцентрические компоненты скорости без дифференцирования элементов при вычислении.

Поэтому наша орбита (по существу) *не касается*, но пересекает (хотя и под очень малым углом) подлинную гелиоцентрическую орбиту, описывамую под влиянием всех возмущающих сил.

38. Из рассмотренной теории следует, что если мы дифференцируем выражения (37.1) для гелиоцентрических координат, не дифференцируя элементов, а затем определяем по отношению к ним новые переменные элементы, то их значения являются функциями времени, полученными из уравнений (36.2).

Компоненты центробарической скорости мы вводим согласно формулам (32.2) или следующим из них:

$$x' = \frac{M\xi'}{M+m}, \quad y' = \frac{M\eta'}{M+m}, \quad z' = \frac{M\zeta'}{M+m}. \tag{214}$$

Тогда эти центробарические компоненты будут теми же функциями времени и новых переменных элементов, которые могли быть введены иначе посредством исключения из интегралов (34.1). Они будут строго представлять (путем распространения теории на эти ранее упоминавшиеся интегралы) компоненты скорости возмущенной планеты m относительно центра тяжести всей Солнечной системы. Мы предпочли (и это вполне соответствует общему направлению нашего метода), чтобы эти центробарические компоненты скорости были вспомогательными переменными, объединяемыми с гелиоцентрическими координатами. Их возмущенные значения были в этом случае строго выражены формулами невозмущенного движения. Этот выбор сделал необходимым видоизменить эти последние формулы и определить орбиту, существенно отличающуюся теоретически (хотя мало отличающуюся практически) от орбиты, так блестяще разработанной Лагранжем. Орбита, которую он себе представлял, была более просто связана с гелиоцентрическим движением *единственной планеты*, следовательно, она давала для такого гелиоцентрического движения как скорость, так и положение (планеты).

Орбита, которую мы избрали, быть может, более тесно связана с концепцией *множественной системы*, движущейся относительно ее общего центра тяжести и подверженной в каждой ее части влиянию со стороны всех остальных. Какая бы орбита ни была в будущем принята астрономами, следует помнить, что обе они одинаково пригодны для описания небесных явлений, если числовые элементы каждой системы будут соответствующим образом определены при наблюдениях, а элементы другой системы орбит будут выведены из результатов наблюдения в процессе вычисления.

Тем временем математики решат, пожертвовать ли частично простотой той геометрической концепции, исходя из которой выведены теории Лагранжа и Пуассона, для простоты другого рода (которая хотя еще не введена, но была бы желательна для этих превосходных теорий), получаемой благодаря нашим достижениям в строгом выражении дифференциалов *всех* наших собственных новых

переменных элементов через посредство *единственной* функции (поскольку до сих пор казалось необходимым употреблять одну функцию для Земли, возмущенной Венерой, и другую функцию для Венеры, возмущенной Землей).

Интегрирование упрощенных уравнений, определяющих новые переменные элементы

39. Упрощенные дифференциальные уравнения переменных элементов (36.2) имеют ту же форму, что и уравнения (3.1), и могут быть проинтегрированы аналогичным способом.

Если мы примем для упрощения

$$(\tau,\kappa,\nu)=\int_0^t\left\{\sum\left(\tau\frac{\delta H_2}{\delta\tau}+\kappa\frac{\delta H_2}{\delta\kappa}+\nu\frac{\delta H_2}{\delta\nu}\right)-H_2\right\}dt \tag{39.1}$$

и символы (μ, ω, λ) и т.д. интерпретируем подобным же образом, то сможем легко определить вариации следующих восьми комбинаций: (τ, κ, ν), (μ, ω, λ), (μ, κ, ν), (τ, ω, λ), (τ, ω, ν), (μ, κ, λ), (τ, κ, λ), (μ, ω, ν), а именно:

$$\begin{aligned}
&\delta(\tau,\kappa,\nu)=\sum m(\tau\delta\mu-\tau_0\delta\mu_0+\kappa\delta\omega-\kappa_0\delta\omega_0+\nu\delta\lambda-\nu_0\delta\lambda_0)-H_2\delta t,\\
&\delta(\mu,\omega,\lambda)=\sum m(\mu_0\delta\tau_0-\mu\delta\tau+\omega_0\delta\kappa_0-\omega\delta\kappa+\lambda_0\delta\nu_0-\lambda\delta\nu)-H_2\delta t,\\
&\delta(\mu,\kappa,\nu)=\sum m(\mu_0\delta\tau_0-\mu\delta\tau+\kappa\delta\omega-\kappa_0\delta\omega_0+\nu\delta\lambda-\nu_0\delta\lambda_0)-H_2\delta t,\\
&\delta(\tau,\omega,\lambda)=\sum m(\tau\delta\mu-\tau_0\delta\mu_0+\omega_0\delta\kappa_0-\omega\delta\kappa+\lambda_0\delta\nu_0-\lambda\delta\nu)-H_2\delta t,\\
&\delta(\tau,\omega,\nu)=\sum m(\tau\delta\mu-\tau_0\delta\mu_0+\omega_0\delta\kappa_0-\omega\delta\kappa+\nu\delta\lambda-\nu_0\delta\lambda_0)-H_2\delta t,\\
&\delta(\mu,\kappa,\lambda)=\sum m(\mu_0\delta\tau_0-\mu\delta\tau+\kappa\delta\omega-\kappa_0\delta\omega_0+\lambda_0\delta\nu_0-\lambda\delta\nu)-H_2\delta t,\\
&\delta(\tau,\kappa,\lambda)=\sum m(\tau\delta\mu-\tau_0\delta\mu_0+\kappa\delta\omega-\kappa_0\delta\omega_0+\lambda_0\delta\nu_0-\lambda\delta\nu)-H_2\delta t,\\
&\delta(\mu,\omega,\lambda)=\sum m(\mu_0\delta\tau_0-\mu\delta\tau+\omega_0\delta\kappa_0-\omega_0\delta\kappa+\nu\delta\lambda-\nu_0\delta\lambda_0)-H_2\delta t,
\end{aligned} \tag{39.2}$$

где κ_0, λ_0, μ_0, ν_0, τ_0, ω_0 являются начальными значениями элементов κ, λ, μ, ν, τ, ω. Если затем мы рассмотрим, например, первую из этих восьми комбинаций как функцию всех $3n-3$ элементов μ, ω, λ и их начальных значений $\mu_{0,i}$, $\omega_{0,i}$, $\lambda_{0,i}$, включающих вообще в явном виде также и время, то получим следующие выражения для $6n-6$ строгих интегралов $6n-6$ уравнений (36.2):

$$\begin{aligned}
&m_i\tau_i=\frac{\delta}{\delta\mu_i}(\tau,\kappa,\nu), &&m_i\tau_{0,i}=-\frac{\delta}{\delta\mu_{0,i}}(\tau,\kappa,\nu),\\
&m_i\kappa_i=\frac{\delta}{\delta\omega_i}(\tau,\kappa,\nu), &&m_i\kappa_{0,i}=-\frac{\delta}{\delta\omega_{0,i}}(\tau,\kappa,\nu),\\
&m_i\nu_i=\frac{\delta}{\delta\lambda_i}(\tau,\kappa,\nu), &&m_i\nu_{0,i}=-\frac{\delta}{\delta\lambda_{0,i}}(\tau,\kappa,\nu).
\end{aligned} \tag{39.3}$$

Подобным способом мы можем вывести формы тех же строгих интегралов из какой-либо одной из восьми комбинаций (39.2). Определение всех переменных элементов было бы поэтому вполне завершено, если бы мы могли найти полные выражения для какой-либо одной из этих восьми комбинаций.

40. Первое приближенное выражение для какой-либо одной из них может быть найдено в виде, какой мы предположительно приняли для H_2, а именно в виде функции элементов и времени, которая может быть обозначена таким образом:

$$H_2 = H_2(t, \kappa_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1, \tau_1, \omega_1, \ldots, \kappa_{n-1}, \lambda_{n-1}, \mu_{n-1}, \nu_{n-1}, \tau_{n-1}, \omega_{n-1}). \quad (40.1)$$

В этой функции переменные элементы заменены их первоначальными значениями и использованы следующие приближенные интегралы уравнений (36.2):

$$\mu = \mu_0 + \frac{1}{m}\int_0^t \frac{\delta H_2}{\delta \tau_0} dt, \qquad \tau = \tau_0 - \frac{1}{m}\int_0^t \frac{\delta H_2}{\delta \mu_0} dt,$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{1}{m}\int_0^t \frac{\delta H_2}{\delta \kappa_0} dt, \qquad \kappa = \kappa_0 - \frac{1}{m}\int_0^t \frac{\delta H_2}{\delta \omega_0} dt,$$

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{1}{m}\int_0^t \frac{\delta H_2}{\delta \nu_0} dt, \qquad \nu = \nu_0 - \frac{1}{m}\int_0^t \frac{\delta H_2}{\delta \lambda_0} dt. \quad (40.2)$$

Если мы обозначим, например, первую из восьми комбинаций (39.2) через G, так что

$$G = (\tau, \kappa, \nu), \quad (40.3)$$

то получим в качестве первого приближенного значения G

$$G_1 = \int_0^t \left\{ \sum \left(\tau_0 \frac{\delta H_2}{\delta \tau_0} + \kappa_0 \frac{\delta H_2}{\delta \kappa_0} + \nu_0 \frac{\delta H_2}{\delta \nu_0} \right) - H_2 \right\} dt. \quad (40.4)$$

Выразив таким образом G_1 как функцию времени и первоначальных элементов, мы можем исключить начальные значения τ_0, κ_0, ν_0 и ввести вместо них конечные значения μ, ω, λ так, чтобы получить выражение для G_1 в виде, показанном в (39.3), а именно как функцию времени t, переменных элементов μ, ω, λ и их начальных значений μ_0, ω_0, λ_0. Приближенное выражение, найденное таким образом, может быть уточнено тем путем, какой часто применялся в этом очерке для других подобных целей. Функция G или комбинация (τ, κ, ν) должна строго удовлетворять, согласно (39.2), (40.1), следующему дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\frac{\delta G}{\delta t} + H_2\left(t, \frac{1}{m_1}\frac{\delta G}{\delta \omega_1}, \lambda_1, \mu_1, \frac{1}{m_1}\frac{\delta G}{\delta \lambda_1}, \frac{1}{m_1}\frac{\delta G}{\delta \mu_1}, \frac{1}{m_2}\frac{\delta G}{\delta \omega_2}, \ldots, \omega_{n-1} \right) = 0. \quad (40.5)$$

Каждая из других аналогичных функций или комбинаций (39.2) должна удовлетворять аналогичному уравнению. Если мы затем заменим G на $G_1 + G_2$ и

пренебрежем квадратами и произведениями коэффициентов малой поправки G_2, причем G_1 является уже найденным первым приближением, то придем (во втором приближении согласно уже рассмотренным принципам) к следующему выражению этой поправки:

$$G_2 = -\int_0^t \left\{ \frac{\delta G_1}{\delta t} + H_2\left(t, \frac{1}{m_1}\frac{\delta G_1}{\delta \omega_1}, \lambda_1, \mu_1, \frac{1}{m_1}\frac{\delta G_1}{\delta \lambda_1}, \frac{1}{m_1}\frac{\delta G_1}{\delta \mu_1}, \omega_1, \ldots \right) \right\} dt, \qquad (40.6)$$

которая может непрерывно и неограниченно становиться точнее путем повторения того же процесса введения поправки. Таким образом, теоретически мы можем считать проблему решенной. Однако она остается для будущего обсуждения и, возможно, для действительного испытания, чтобы определить, какие из различных процессов последовательного и неограниченного приближения, выведенные в настоящем очерке, а также в предыдущем как результаты одного общего метода и как следствия центральной идеи, лучше всего применимы для численного приложения и для математического исследования явлений [[61]].

КВАТЕРНИОНЫ

О КВАТЕРНИОНАХ, ИЛИ О НОВОЙ СИСТЕМЕ МНИМЫХ ВЕЛИЧИН В АЛГЕБРЕ*[1]

1. Пусть выражение вида

$$Q = w + ix + jy + kz$$

называется *кватернионом,* где $w, x, y, z,$ которые мы будем называть *конституентами* кватерниона Q [[1]], означают любые действительные величины – положительные, отрицательные или нуль, а i, j, k – символы для трех мнимых величин, которые мы будем называть *мнимыми единицами* и предполагать, что они не связаны друг с другом никаким линейным соотношением [[2]]. Таким образом, если имеется другое выражение того же вида

$$Q' = w' + ix' + jy' + kz',$$

то равенство этих двух кватернионов $Q = Q'$ будет означать четыре отдельные равенства соответствующих конституент, а именно следующие четыре соотношения:

$$w = w', \quad x = x', \quad y = y', \quad z = z'.$$

Естественно затем определить, что сложение или вычитание кватернионов выполняется по формулам

$$Q \pm Q' = w \pm w' + i(x \pm x') + j(y \pm y') + k(z \pm z')$$

или, другими словами, по правилу: *суммы или разности конституент любых двух кватернионов являются конституентами суммы или разности этих двух кватернионов.* Будет естественно также определить, что произведение QQ' (умножая Q как множитель на Q' как на множимое) допустимо выразить таким образом:

$$QQ' = ww' + iwx' + jwy' + kwz' + ixw' + i^2xx' + ijxy' + ikxz' + jyw' + jiyx' + j^2yy' +$$
$$+ jkyz' + kzw' + kizx' + kjzy' + k^2zz'.$$

---

* On quaternions; or on new system of imaginaries in algebra // Philos. Mag. 1844. Vol. 25. P. 10–13, 241–246; 1845. Vol. 26. P. 220–224; 1846. Vol. 29. P. 26–31, 113–122, 326–328; 1847. Vol. 30. P. 458–461; Vol. 31. P. 214–219, 278–293, 511–519; 1848. Vol. 32. P. 367–374; Vol. 33. P. 58–60; 1849. Vol. 34. P. 294–297, 340–343, 425–439; Vol. 35. P. 133–137, 200–204; 1850. Vol. 36. P. 305–306 [Н. 3. Р. 227–298]. Перевод Н.В. Александровой.

[1] Сообщение по существу то же самое, что и опубликованное здесь, было доложено автором Королевской ирландской академии на первом собрании ее после летнего перерыва в ноябре 1843 г.

До того как мы сможем свести это произведение к выражению кватернионного вида, такого как

$$QQ' = Q'' = w'' + ix'' + jy'' + kz'',$$

необходимо зафиксировать кватернионные выражения (или действительные значения) для девяти квадратов или произведений i^2, ij, ik, ji, j^2, jk, ki, kj, k^2.

2. Рассмотрения, которые могут занять слишком много места, чтобы дать отчет о них здесь, привели автора к тому, чтобы принять следующую систему величин или произведений:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \qquad (2.1)$$

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \qquad (2.2)$$

$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j, \qquad (2.3)$$

хотя с первого взгляда должно казаться странным и почти недопустимым, что произведение двух мнимых сомножителей, взятых в одном порядке, отличается (знаком) от произведения тех же сомножителей в противоположном порядке ($ji = -ij$). Однако можно надеяться, что в ходе обсуждения новой системы мнимых величин будет необходимым или удобным отказаться от некоторых ожиданий, внушенных предшествовавшим изучением произведений действительных величин или даже выражений вида $x + iy$, где $i^2 = -1$. И выбор системы определяющих уравнений (2.1), (2.2), (2.3) либо разумен, либо (по крайней мере) удачен, в любом случае можно прийти к выводу, что эти уравнения ведут к результатам, достаточно последовательным и красивым.

3. Принимая соотношения (2.1), (2.2), (2.3), мы имеем четыре следующие выражения для четырех конституент произведения двух кватернионов как функции конституент множителя и множимого:

$$w'' = ww' - xx' - yy' - zz', \quad y'' = wy' + yw' + zx' - xz',$$

$$x'' = wx' + xw' + yz'' - zy', \quad z'' = wz' + zw' + xy' - yx'. \qquad (3.1)$$

Эти уравнения дают

$$w''^2 + x''^2 + y''^2 + z''^2 = (w^2 + x^2 + y^2 + z^2)(w'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

и, следовательно,

$$\mu'' = \mu\mu', \qquad (3.2)$$

если мы введем систему выражений для конституент

$$w = \mu \cos\theta, \quad y = \mu \sin\theta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\psi,$$

$$x = \mu \sin\theta \cdot \cos\varphi, \quad z = \mu \sin\theta \cdot \sin\varphi \cdot \sin\psi, \qquad (3.3)$$

где полагаем каждое μ положительным. Поэтому, называя μ модулем кватерниона Q, мы имеем теорему: модуль произведения Q″ любых двух кватернионов Q и Q′ равен произведению их модулей [3].

4. Уравнения (3.1) дают также

$$w'w'' + x'x'' + y'y'' + z'z'' = w(w'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

$$ww'' + xx'' + yy'' + zz'' = w'(w^2 + x^2 + y^2 + z^2).$$

Комбинируя поэтому эти результаты с первым из уравнений (3.1), и с тригонометрическими выражениями (3.3), и с соотношением (3.2) между модулями, мы получим три следующие соотношения между угловыми координатами θ, φ, ψ, θ', φ', ψ', θ'', φ'', ψ'' двух сомножителей и произведения:

$$\cos\theta'' = \cos\theta\cdot\cos\theta' - \sin\theta\cdot\sin\theta'(\cos\varphi\cdot\cos\varphi' + \sin\varphi\cdot\sin\varphi'\cdot\cos(\psi - \psi')),$$

$$\cos\theta = \cos\theta'\cdot\cos\theta'' + \sin\theta'\cdot\sin\theta''(\cos\varphi'\cdot\cos\varphi'' + \sin\varphi'\cdot\sin\varphi''\cdot\cos(\psi' - \psi'')),$$

$$\cos\theta' = \cos\theta''\cdot\cos\theta + \sin\theta''\cdot\sin\theta(\cos\varphi''\cdot\cos\varphi + \sin\varphi''\cdot\sin\varphi\cdot\cos(\psi'' - \psi)). \qquad (4.1)$$

Эти уравнения (4.1) допускают простое геометрическое построение. Будем рассматривать x, y, z как три ортогональные координаты точки в пространстве, радиус-вектор которой есть $\mu\sin\theta$, долгота равна ψ, а широта φ. Пусть эти три последние величины так и называются *радиусом-вектором, долготой* и *широтой* кватерниона Q, а θ будет называться *амплитудой* этого кватерниона. Пусть R будет точкой, в которой радиус-вектор (продолженный, если необходимо) пересекает сферическую поверхность, описанную около начала координат радиусом, равным единице; так что φ – широта, а ψ – долгота ⟨точки⟩ R; и пусть эта точка R называется *представляющей точкой* кватерниона (representative point). Пусть подобным же образом R' и R'' – представляющие точки кватернионов Q′ и Q″. Тогда уравнения (4.1) выражают тот факт, что *в сферическом треугольнике $RR'R''$, образованном представляющими точками двух сомножителей и произведения* (при любом умножении двух кватернионов) *углы соответственно равны амплитудам этих двух сомножителей и углу, дополняющему амплитуду произведения до двух прямых*. Таким образом, мы имеем три уравнения

$$R = \theta, \quad R' = \theta', \quad R'' = \pi - \theta''. \qquad (4.2)$$

5. Система четырех очень простых и легко запоминающихся уравнений (3.2) и (4.2) может рассматриваться как эквивалент системы четырех более сложных уравнений (3.1) и как содержащая в себе достаточное выражение правила умножения кватернионов [4] с тем только исключением, что остается неопределенным, на какой именно *полусфере* лежит точка R'' или с какой именно *стороны* (side) от дуги RR' находится точка-произведение R'', если заданы точки-сомножители R и R' с амплитудами θ и θ'. В самом деле, уравнения (3.2) и (4.2) получены не непосредственно из уравнений (3.1), а путем некоторых комбинаций упомянутых уравнений; эти комбинации остаются неизменными, если знаки трех функций

$$yz' - zy', \quad zx' - xz', \quad xy' - yx'$$

меняются одновременно. Это последнее изменение соответствует чередованию множителей в принятых условиях (2.2) и (2.3); эти предположения, или $ij = -k$, $ji = k$

и т.д., означают выбор того циклического порядка kji (или ijk), при котором произведение любых двух мнимых единиц (рассматриваемых как множитель и множимое) равно следующей мнимой единице, взятой со знаком плюс.

С этим замечанием нетрудно понять, что *точка-произведение R'' всегда берется справа (или всегда слева) от точки-множимого R' относительно точки-множителя R* в соответствии с тем, как расположена полуось $+z$ – справа (или слева) от полуоси $+y$ относительно полуоси $+x$, или, другими словами, в зависимости от того, правым или левым является положительное направление вращения по долготе.

Это правило вращения совместно с законом модулей и с теоремой о сферическом треугольнике завершает преобразованную систему условий, связывающих произведение любых двух кватернионов с сомножителями и с их порядком.

6. Из уже изложенных принципов немедленно следует, что, если $RR'R''$ – любой сферический треугольник и если (α, β, γ) – прямоугольные координаты точки R, $(\alpha', \beta', \gamma')$ – точки R' и $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ – точки R'', центром сферы является начало координат O, радиус равен единице и положительная полуось z выбрана так, чтобы она лежала справа (или слева) от положительной полуоси y относительно положительной полуоси x в зависимости от того, как лежит радиус OR'' – справа или слева от OR' относительно OR, то будет иметь место следующая мнимая или символическая формула умножения кватернионов:

$$\{\cos R + (i\alpha + j\beta + k\gamma)\sin R\}\{\cos R' + (i\alpha' + j\beta' + k\gamma')\sin R'\} =$$
$$= -\cos R'' + (i\alpha'' + j\beta'' + k\gamma'')\sin R''. \tag{6.1}$$

Здесь квадраты и произведения трех мнимых единиц i, j, k задаются девятью уравнениями (2.1), (2.2), (2.3) предыдущего пункта, именно

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j,$$
$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j.$$

Выполняя умножение и преобразуя мнимую формулу (6.1) с помощью этих условий, можно разбить ее на четыре следующих действительных уравнения сферической тригонометрии:

$$-\cos R'' = \cos R \cos R' - (\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')\sin R \sin R',$$
$$\alpha'' \sin R'' = \alpha \sin R \cos R' + \alpha' \sin R' \cos R + (\beta\gamma' - \gamma\beta')\sin R \sin R',$$
$$\beta'' \sin R'' = \beta \sin R \cos R' + \beta' \sin R' \cos R + (\gamma\alpha' - \alpha\gamma')\sin R \sin R',$$
$$\gamma'' \sin R'' = \gamma \sin R \cos R' + \gamma' \sin R' \cos R + (\alpha\beta' - \beta\alpha')\sin R \sin R'. \tag{6.2}$$

Первое из этих уравнений соответствует хорошо известному соотношению (уже использованному в этой статье), которое связывает сторону сферического треугольника с тремя углами. Три другие уравнения (6.2) соответствуют теореме

(возможно, новой) и выражают ее содержание, словами можно ее сформулировать следующим образом.

Если три силы приложены к центру сферы, одна равна $\sin R \cos R'$ и направлена к точке R, другая равна $\sin R' \cos R$ и направлена к R' и третья равна $\sin R \sin R' \sin RR'$ и направлена к тому полюсу дуги RR', который лежит с той же стороны этой дуги, что и точка R'', то результирующая этих трех сил будет направлена к R'' и будет равна $\sin R''$.

Нетрудно доказать эту теорему другим образом, но можно признать интересным, что четыре действительных уравнения (6.2) все так просто заключаются в единственной мнимой формуле (6.1) и так легко выводятся из этой формулы с помощью правил умножения кватернионов. Любопытно, что это доказательство получается таким же образом, как и фундаментальные теоремы плоской тригонометрии для косинуса и синуса суммы двух любых дуг следуют из хорошо известной формулы для умножения пар, т.е. выражений вида $x + iy$ или более специального $\cos\theta + i\sin\theta$, где $i^2 = -1$. Таким образом, дан (или указан) новый вид исчисления сферической тригонометрии.

Если мы считаем, что сферический треугольник $RR'R''$ становится бесконечно малым, когда каждая из его вершин стремится к точке, координаты которой 1, 0, 0, то каждая координата α стремится к значению 1, тогда как каждые β и γ будут в конечном счете обращаться в нуль и сумма трех углов будет неограниченно приближаться к значению π. Формула (6.1) превратится поэтому в следующую:

$$(\cos R + i\sin R)(\cos R' + i\sin R') = \cos(R + R') + i\sin(R + R'),$$

которая имеет так много важных приложений в обычной теории мнимых.

7. В той теории имеются только два различных квадратных корня из отрицательной единицы и они отличаются лишь знаками. В теории кватернионов, для того чтобы квадрат величины $w + ix + jy + kz$ был бы равен -1, необходимо и достаточно, чтобы

$$w = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Ибо, вообще говоря, согласно выражению (3.1) для конституент произведения, или, что то же, согласно (2.1), (2.2), (2.3) имеем

$$(w + ix + jy + kz)^2 = w^2 - x^2 - y^2 - z^2 + 2w(ix + jy + kz).$$

Поэтому в этой теории существует бесконечно много различных квадратных корней из отрицательной единицы, которые все имеют один общий модуль, равный 1, и одну общую амплитуду, равную $\pi/2$, будучи все вида

$$\sqrt{-1} = i\cos\varphi + j\sin\varphi \cdot \cos\psi + k\sin\varphi \cdot \sin\psi, \tag{7.1}$$

который допускает все вариации координат, задающих направление, т.е. широт и долгот, так как φ и ψ произвольны. И все их мы можем назвать мнимыми единицами вдобавок к трем первоначальным мнимым i, j, k, из которых они состав-

лены. Чтобы отличить один такой корень, или единицу, от другого, мы можем обозначать правую часть в формуле (7.1) через $i_{\varphi,\psi}$ или короче – через i_R, если R означает (как и прежде) ту конкретную точку сферической поверхности (описанной единичным радиусом около начала как около центра), которая имеет широту, равную φ, и долготу, равную ψ. Тогда будем иметь

$$i_R = i\alpha + j\beta + k\gamma, \quad i_R^2 = -1, \tag{7.1'}$$

где $\alpha = \cos\varphi$, $\beta = \sin\varphi \cdot \cos\psi$, $\gamma = \sin\varphi \cdot \sin\psi$; α, β, γ – по-прежнему прямоугольные координаты точки R, отнесенные к центру как к началу. Формула (6.1) станет, таким образом, для любого сферического треугольника такой:

$$(\cos R + i_R \sin R)(\cos R' + i_{R'} \sin R') = -\cos R'' + i_{R''} \sin R''. \tag{6.1'}$$

8. Чтобы разделить действительную и мнимую части этой последней формулы, необходимо только выполнить такое разделение в произведении двух мнимых единиц, которое входит в левую часть. При изменении углов R и R' до прямых (без изменения точек R и R' на сфере) мнимые единицы i_R и $i_{R'}$ не подвергаются никаким изменениям, но угол R'' становится равным дуге RR', и точка R'' совпадает теперь с положительным полюсом этой дуги, т.е. с таким полюсом, что наименьшее вращение к нему от R' вокруг R является положительным. Обозначая затем этот полюс через P'', мы имеем уравнение

$$i_R \cdot i_{R'} = -\cos RR' + i_{P''} \sin RR', \tag{8.1}$$

которое содержится в формуле (6.1') и, обратно, служит для преобразования ее, ибо из нее следует, что сравнение действительных частей воспроизводит известное уравнение

$$\cos R \cos R' - \sin R \sin R' \cos RR' = -\cos R''. \tag{6.2'}$$

А сравнение мнимых частей приводит к следующему символическому выражению теоремы п. 6:

$$i_R \sin R \cos R' + i_{R'} \sin R' \cos R + i_{P''} \sin R \sin R' \sin RR' = i_{R''} \sin R''. \tag{6.2''}$$

В качестве проверки (подтверждения) мы можем заметить, что, когда треугольник (и вместе с ним дуга RR') стремится обратиться в нуль, два последние уравнения совпадают, выражая свойство плоского треугольника: $R + R' + R'' = \pi$.

9. Выражение (8.1) для произведения двух любых мнимых единиц, которое допускает много приложений, можно немедленно вывести из фундаментальных определений (2.1), (2.2), (2.3) для квадратов и произведений трех начальных мнимых единиц i, j, k, подставляя их в форму

$$(i\alpha + j\beta + k\gamma)(i\alpha' + j\beta' + k\gamma') = -(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') + i(\beta\gamma' - \gamma\beta') +$$

$$+j(\gamma\alpha' - \alpha\gamma') + k(\alpha\beta' - \beta\alpha'). \qquad (8.1')$$

Очевидно (или из этой последней формы, или из таких рассмотрений вращений, какие уже проведены), что если изменить порядок двух любых чисто мнимых сомножителей, то действительная часть произведения останется неизменной, а мнимая часть изменит знак. Так что, применив это правило к уравнению (8.1), получим

$$i_{R'}i_R - = -\cos RR' - i_{P''}\sin RR'. \qquad (9.1)$$

В самом деле, мы можем принять $-i_{P''}$ за $i_{P''}$, если $P''_{,}$ – точка, диаметрально противоположная точке P'', и, следовательно, положительный полюс обращенной дуги $R'R$ (в уже определенном смысле), хотя она есть отрицательный полюс дуги RR' (с ее прежним направлением).

Так как вообще произведение двух любых кватернионов, которые отличаются только знаками их мнимых частей, есть действительное число, равное квадрату модуля, или если записать это в символах

$$\mu(\cos\theta + i_R\sin\theta) \times \mu(\cos\theta - i_R\sin\theta) = \mu^2, \qquad (9.2)$$

то мы видим, что произведение двух различных произведений (8.1) и (9.1) (т.е. произведение двух любых мнимых единиц на них же, взятых в другом порядке) есть действительное число, равное единице, так что можно написать

$$i_R i_{R'} \cdot i_{R'} i_R = 1. \qquad (9.3)$$

И два кватерниона, представленные двумя произведениями $i_R i_{R'}$ и $i_{R'} i_R$ могут быть названы *обратными* друг другу. Например, из фундаментальных определений (2.1), (2.2), (2.3) следует немедленно, что $ij \cdot ji = k \times -k = -k^2 = 1$. Произведения ij и ji являются, следовательно, обратными величинами в только что объясненном смысле. Полагая два мнимых сомножителя i_R и $i_{R'}$ взаимно *перпендикулярными*, т.е. считая, что дуга равна четверти окружности, получим, что произведения (8.1) и (9.1) будут $\pm i_{P''}$; таким образом или более прямым способом мы можем показать, что если две мнимые единицы будут взаимно *противоположны* (одна есть отрицание другой), то они также и взаимно *обратны.*

10. Уравнение (9.3), которое найдет применение в делении кватернионов, можно доказать чисто алгебраическим путем или по крайней мере путем, более свободным от рассмотрений направлений в пространстве. Найдем, что благодаря определениям (2.1), (2.2), (2.3) справедливо каждое уравнение вида

$$\iota.\kappa\lambda = \iota\kappa.\lambda,$$

если каждый из трех сомножителей ι, κ, λ (равных между собой или различных) равен той или иной мнимой единице i, j, k; так, например,

$$i.jk = (i.i = -1 = kk =)ij.k, \qquad j.ji = (j. -k = -i = -1.i =)jj.i.$$

Отсюда, какие бы три кватерниона ни были обозначены через Q, Q′, Q″, мы имеем закон

$$Q.Q'Q'' = QQ'.Q''. \qquad (10.1)$$

Подобным образом для любых четырех кватернионов имеем

$$Q.Q'Q''Q''' = QQ'.Q''Q''' = QQ'Q''.Q''' \qquad (10.1')$$

И т.д. для любого числа сомножителей. Обозначение QQ′Q″ использовалось в формуле (10.1′), чтобы обозначить тот один определенный кватернион, который получен благодаря теореме (10.1), когда мы сначала умножаем Q″ как множимое на Q′ как на множитель, а затем умножаем произведение Q′Q″ как множимое на Q как на множитель; или умножаем сначала Q′ на Q, а затем Q″ на QQ′. С помощью этого принципа мы легко докажем уравнение (9.3), заметив, что

$$i_R i_{R'}.i_{R'} i_R = i_R.i_{R'}^2 i_R = -i_R^2 = 1.$$

11. Теорема, выраженная формулами (10.1), (10.1′), имеет большую важность в исчислении кватернионов как имеющая тенденцию включить в эту систему те вычисления, которые используются в обычной алгебре (включить настолько далеко, насколько это удастся). При обычном умножении мы можем разбить любой сомножитель на любое число частей, действительных или мнимых, и сложить эти частичные произведения. Тот же процесс допустим при оперировании с кватернионами: кватернионное умножение обладает так называемой дистрибутивностью, что символически выражается так:

$$Q(Q' + Q'') = QQ' + QQ'', \quad (Q + Q')Q'' = QQ'' + Q'Q'' \text{ и т.д.}$$

Но в обычной алгебре мы имеем к тому же QQ′ = Q′Q; это равенство произведений сомножителей, взятых в противоположном порядке, вообще не имеет места для кватернионов ($ji = -ij$); коммутативный характер обычного умножения, следовательно, вообще говоря, утерян, и QQ′ – Q′Q, вместо того чтобы равняться нулю, представляет собой чисто мнимую величину. С другой стороны, как и для обычных сомножителей, можно вообще объединять кватернионные сомножители в группы любым способом, который не изменяет их порядок, например

$$Q.Q'Q''.Q'''Q^{IV} = QQ'.Q''Q'''Q^{IV}.$$

Это свойство, которое поэтому может быть названо *ассоциативностью* [5], является общим для умножения кватернионов и для обычных величин, действительных или мнимых (подобно дистрибутивности) [6].

12. Если разделить кватернион Q на его модуль μ, то можно привести его к виду

$$\mu^{-1} Q = \cos\theta + i_R \sin\theta$$

(как уже показано, вообще говоря). Здесь θ – действительная величина, а именно амплитуда кватерниона, а i_R – некоторая мнимая единица или квадратный корень из

-1, и именно тот конкретный корень (или единица), который отличается от всех других своими двумя координатами, задающими направление, и может быть построен как прямая линия, проведенная из начала координат к представляющей точке R; эта точка лежит на сферической поверхности, описанной единичным радиусом из начала координат как из центра.

Сравнивая это выражение для $\mu^{-1}Q$ с формулой (8.1) для произведения двух любых мнимых единиц, мы видим, что если мы опишем на той же сферической поверхности дугу большого круга $P'P''$, для которой точка R – положительный полюс, и возьмем эту дугу равной $\pi - \theta$, т.е. равной углу, дополняющему амплитуду до двух прямых, и будем считать затем точки P' и P'' представляющими точками двух новых мнимых единиц $i_{P'}$ и $i_{P''}$, то мы будем иметь следующее общее преобразование для любого заданного кватерниона:

$$Q = \mu i_{P'} i_{P''}.$$

Здесь дуга $P'P''$ задана по длине и направлению с точностью до того, что она может быть повернута в своей плоскости (или на большом круге, которому она принадлежит) и может быть увеличена или уменьшена на любое целое число дуг окружности, не меняя при этом значения Q.

13. Рассмотрим теперь *произведение нескольких последовательных кватернионных сомножителей* $Q_1, Q_2, \ldots$ при условии, что их амплитуды $\theta_1, \theta_2, \ldots$ будут соответственно равны углам сферического многоугольника, который образован их представляющими точками $R_1, R_2, \ldots$, взятыми именно в таком порядке. Чтобы наиболее точно зафиксировать, что подразумевается здесь под этими углами, предположим, что R_m – представляющая точка m-го кватернионного сомножителя, или m-я вершина многоугольника. Ближайшая предыдущая вершина R_{m-1}, а ближайшая следующая R_{m+1}. И пусть угол или (полнее) *внутренний угол* многоугольника в точке R_m обозначается тем же символом R_m и определяется как наименьший угол вращения, на который дуга R_mR_{m+1} должна вращаться в положительном направлении вокруг точки R_m до совпадения с направлением дуги R_mR_{m-1}. Тогда вращение на $2\pi - R_m$ приведет R_mR_{m-1} к совпадению по направлению с R_mR_{m+1}.

Поэтому вращение на $\pi - R_m$ (выполненное в том же направлении или в противоположном в зависимости от того, положительно оно или отрицательно) должно привести *продолжение* предыдущей дуги $R_{m-1}R_m$ к совпадению со следующей дугой R_mR_{m+1}; по этой причине мы будем называть этот угол $\pi - R_m$ (взятый с его собственным знаком) *внешним углом* многоугольника в точке R_m. То же самое вращение на $\pi - R_m$ приведет положительный полюс предыдущей стороны $R_{m-1}R_m$ многоугольника (который мы назовем P_{m+1}) к совпадению с положительным полюсом P_{m+2} следующей стороны R_mR_{m+1} вследствие вращения вокруг вершины R_m как около полюса по дуге большого круга в положительном или отрицательном направлении вращения (в зависимости от того, каков внешний угол $\pi - R_m$ многоугольника – положительный или отрицательный). Следовательно, по послед-

нему пункту мы будем иметь формулу

$$\mu_m^{-1}\,Q_m = \cos R_m + i_{R_m}\sin R_m = i_{P_{m+1}} i_{P_{m+2}}.$$

Перемножим n формул такого вида для n вершин многоугольника (сохраняя порядок множителей и принимая во внимание ассоциативный характер кватернионного умножения), получим в качестве обобщения формулы (9.3) следующую:

$$i_{P_1} i_{P_2} . i_{P_2} i_{P_3} \ldots i_{P_n} i_{P_1} = (-1)^n. \qquad (9.3')$$

Мы видим, что при сделанных предположениях относительно амплитуд имеем такое выражение для произведения n кватернионных сомножителей:

$$Q_1 Q_2 Q_3 \ldots Q_n = (-1)^n \mu_1 \mu_2 \mu_3 \ldots \mu_n.$$

Отсюда следует, что для *любого сферического многоугольника* $R_1R_2...R_n$ (даже с выступающими и "вдавленными" углами) справедливо следующее общее соотношение:

$$(\cos R_1 + i_{R_1}\sin R_1)(\cos R_2 + i_{R_2}\sin R_2)\ldots(\cos R_n + i_{R_n}\sin R_n) = (-1)^n. \qquad (13.1)$$

14. Для случая сферического треугольника $RR'R''$ это соотношение превращается в следующее:

$$(\cos R + i_R \sin R)(\cos R' + i_{R'}\sin R')\ (\cos R'' + i_{R''}\sin R'') = -1 \qquad (6.1'')$$

и воспроизводит формулу (6.1′), если умножить обе части как множители на $\cos R'' - i_{R''}\sin R''$ как на множимое.

Ограничение, упомянутое в предыдущем пункте (относительно положительной полуоси одной координаты после того, как для двух других координат направления выбраны), предназначалось более для того, чтобы мы смогли рассматривать каждый из трех углов треугольника как положительный и меньший двух прямых углов, согласно общепринятому допущению, используемому математиками в сферической тригонометрии. Было бы нетрудно, наоборот, вывести теорему (13.1) для любого сферического многоугольника из менее общих соотношений (6.1′) или (6.1″) для случая сферического треугольника, принимая любую точку P на сферической поверхности за общую вершину n треугольников, которые имеют основаниями n сторон многоугольника, и используя ассоциативный характер умножения совместно с тем принципом, что умножение сонаправленных (codirectional) кватернионов (когда все их модули предполагаются равными единице) производится сложением их амплитуд. Этот последний принцип дает также в качестве проверки формулы (13.1) в случае бесконечно малых (или, другими словами, плоских) многоугольников известные уравнения $\cos \Sigma R = (-1)^n$, $\sin \Sigma R = 0$.

15. Ассоциативный характер умножения, или формула (10.1), показывает, что если мы берем любые три кватерниона Q, Q′, Q″ и выводим из них два другие $Q_{,}$, $Q_{,,}$ следующим образом: $QQ' = Q_{,}$, $Q'Q'' = Q_{,,}$, то будем иметь уравнение $Q_{,}Q'' =$

$= QQ_{,,} = Q'''$, где Q''' – третий производный кватернион, именно тернарное произведение $QQ'Q''$.

Пусть $R, R', R'', R_,, R_{,,}, R'''$ – шесть представляющих точек этих шести кватернионов на той же сферической поверхности, что и прежде. Тогда по общему построению произведения, описанному в предыдущем пункте [7], мы будем иметь следующие выражения для шести амплитуд этих шести кватернионов:

$$\theta = R'RR_, = R_{,,}RR''', \qquad \theta_, = R''R_,R''' = \pi - RR_,R',$$
$$\theta' = R_,R'R = R''R'R_{,,}, \qquad \theta_{,,} = R'''R_{,,}R = \pi - R'R_{,,}R'',$$
$$\theta'' = R_{,,}R''R_, = R'''R''R_, \qquad \theta''' = \pi - R_,R'''R'' = \pi - RR'''R_{,,},$$

где $R'RR'$ – сферический угол R, измеренный от RR' к $RR_,$ (и аналогично в других случаях). Но эти уравнения между сферическими углами фигуры точно те же, какие требуются, чтобы две точки $R_,$ и $R_{,,}$ были бы двумя *фокусами* линии, нарезанной на конической поверхности вращения, т.е. линии, которая является *сферическим* четырехугольником $RR'R''R'''$, или касающейся четырех больших кругов, дугами которых являются $RR', R'R'', R''R''', R'''R$.

Это геометрическое соотношение между шестью представляющими точками $R_, R', R'', R_,, R_{,,}, R'''$ шести кватернионов $Q, Q', Q'', QQ', Q'Q'', QQ'Q''$ можно условно обозначить таким образом:

$$R_,R_{,,}(\ldots)RR'R''R'''. \qquad (10.1'')$$

Оно является поэтому следствием очень простой алгебраической теоремы для трех кватернионных сомножителей (10.1)

$$QQ'.Q'' = Q.Q'Q''$$

и может рассматриваться как ее интерпретация.

В то же время из теории следует, что две прямые линии (или радиусы-векторы), которые проведены из начала координат в точки $R_,, R_{,,}$ и которые построены как мнимые части двух бинарных кватернионных произведений $QQ', Q'Q''$, являются двумя фокальными линиями конуса второго порядка, вписанного в пирамиду, которая имеет своими четырьмя ребрами четыре радиуса, построенные как мнимые части трех кватернионных сомножителей Q, Q', Q'' и их последовательного (или тернарного) произведения $QQ'Q''$.

16. Мы имеем также (благодаря тому же ассоциативному характеру умножения) аналогичные формулы для любых четырех независимых сомножителей

$$Q.Q'Q''Q''' = QQ'.Q''Q''' \text{ и т.д.}$$

Обозначим это последовательное произведение через Q^{IV} и положим

$$QQ' = Q_,, \quad Q'Q'' = Q'_,, \quad Q''Q''' = Q''_,, \quad QQ'Q'' = Q'''_,, \quad Q'Q''Q''' = Q_,^{IV},$$

а также заметим, что как только E и F являются фокусами линии на конусе вращения, вписанной в сферический четырехсторонник $ABCD$, так что $EF(\ldots)ABCD$ (в недавно предложенных обозначениях), то мы можем написать $FE(\ldots)ABCD$ и $EF(\ldots)BCDA$ и найти без труда с помощью формулы (10.1″) пять следующих геометрических соотношений, в которых R – представляющая точка соответствующего кватерниона Q:

$$R_{,} R'_{,} (\ldots)RR'R''R'''_{,}\ ,$$

$$R', R''_{,} (\ldots)R'R''R'''R_{,}^{\mathrm{IV}}\ ,$$

$$R''_{,}\ R'''_{,} (\ldots)R''R'''R^{\mathrm{IV}}R_{,}\ ,$$

$$R''_{,}\ R_{,}^{\mathrm{IV}} (\ldots)R'''R^{\mathrm{IV}}RR'_{,}\ ,$$

$$R_{,}^{\mathrm{IV}}\ R_{,}\ (\ldots)R^{\mathrm{IV}}RR'R''_{,}\ . \qquad (10.1''')$$

Эти пять формул устанавливают замечательную связь между одним сферическим пятиугольником и другим (построенным согласно предыдущим правилам) посредством пяти кривых; каждая из этих пяти кривых касается двух сторон пятиугольника и имеет фокусы в двух вершинах другого. Если мы предположим для простоты, что каждый из десяти модулей равен единице, и рассмотрим шесть кватернионов (три бинарных произведения, два – тернарных и одно – из четырех сомножителей, где множители берутся последовательно без изменения порядка), то зависимость от умножения этих кватернионов на четырех других даст 18 различных уравнений между десятью амплитудами и двадцатью полярными координатами рассмотренных здесь десяти кватернионов. Поэтому вообще допустимо считать произвольными 12 из этих координат или выбрать, как угодно, шесть из десяти точек на сфере. Поэтому не только один из двух пятиугольников можно вообще взять произвольным, но и одну вершину другого пятиугольника (кроме исключительных случаев, конечно).

После подходящего выбора десяти амплитуд пять соотношений (10.1‴) между двумя пятиугольниками и пятью сферическими кониками (spherical conic) будут оставаться справедливыми.

17. Очень частный (или, скорее, ограниченный), но все же элегантный случай этой теоремы доставляется рассмотрением плоскости и правильного пятиугольника элементарной геометрии, сравниваемого с таким же другим пятиугольником, который образуется при пересечении диагоналей первого. Обозначим через $R_{,}$ ту вершину внутреннего пятиугольника, которая является ближайшей к стороне RR' внешнего пятиугольника. Через $R'_{,}$ – ту вершину, которая является ближайшей к $R'R''$ и т.д. до $R_{,}^{\mathrm{IV}}$. Соотношения (10.1‴) удовлетворяются, символ (...) теперь означает, что две точки, написанные перед ним, являются фокусами обыкновенного (или плоского) эллипса, начерченного в плоскости четырехсторонника, вершинами которого являются четыре точки, написанные после символа (...). Мы можем

добавить, что (в этом частном случае) две точки касания каждого из пяти четырехсторонников являются вершинами внутреннего пятиугольника и что большая ось каждого из пяти вписанных эллипсов равна стороне внешней фигуры.

18. Отделение действительной и мнимой частей кватерниона есть операция, встречающаяся так часто, что ее можно считать основной в этой теории; поэтому удобно ввести символы, которые будут кратко обозначать два отдельных результата этой операции. Алгебраически действительную часть можно получить (соответственно задачам, где она появляется) как все значения, лежащие на одной шкале последовательности чисел от $-\infty$ до $+\infty$; поэтому мы будем называть ее *скалярной частью* или просто *скаляром* кватернионов, и ее символом будет приставка перед символом кватернионов – характеристика Scal. или просто S. там, где не будет возникать путаница из-за этого последнего сокращения.

С другой стороны, алгебраически мнимая часть (будучи геометрически представлена прямой линией или радиусом-вектором, которые для каждого определенного кватерниона имеют, вообще говоря, определенную длину и определенное направление в пространстве) может быть названа *векторной частью* или просто *вектором* кватерниона и обозначена приставкой Vect. или V. [8].

Следовательно, мы можем сказать, что *кватернион есть вообще сумма его скалярной и векторной частей* и написать

$$Q = \mathrm{Scal.}Q + \mathrm{Vect.}Q = \mathrm{S.}Q + \mathrm{V.}Q$$

или просто $Q = SQ + VQ$.

Отделяя характеристики операций от знаков операндов, можно установить в этих обозначениях общие формулы:

$$1 = S + V, \quad 1 - S = V, \quad 1 - V = S, \quad S.S. = S, \quad S.V = 0, \quad V.S = 0, \quad V.V = V$$

и написать

$$(S + V)^n = 1,$$

если n – любое целое положительное число.

Скаляр или вектор суммы или разности кватернионов равен сумме или разности скаляров или векторов тех же кватернионов, что можно выразить, написав формулы:

$$S\Sigma = \Sigma S, \quad S\Delta = \Delta S, \quad V\Sigma = \Sigma V, \; V\Delta = \Delta V.$$

19. Другое общее разложение кватерниона (не в сумму, а в произведение) можно получить следующим путем. Так как квадрат скаляра всегда положителен, а квадрат вектора всегда отрицателен, то алгебраическая разность первого и последнего квадратов – всегда положительное число. Если затем мы образуем

$$(TQ)^2 = (SQ)^2 - (VQ)^2$$

и положим, что TQ – всегда положительное действительное число (т.е. абсолютное), которое можно назвать *тензором* кватерниона Q, то мы не уменьшим общности кватерниона Q. Этот тензор есть как раз то, что мы называли *модулем* в предыдущих пунктах[2], но теперь кажется некоторым удобством не сохранять обязательно этот термин, который использовался в нескольких других смыслах авторами в других предметах. А слово "тензор" (как кажется) имеет некоторые причины для предпочтения, которые вполне выяснятся впоследствии.

Между тем мы можем заметить (в качестве некоторого оправдания использования этого слова или по крайней мере как некоторой помощи для запоминания), что оно дает нам право сказать, что тензор чисто мнимой величины, или вектора, есть число, выражающее *длину* или *линейное протяжение* прямой линии, посредством которой строится эта алгебраическая мнимая величина. Если такая мнимая делится на ее собственный тензор, то частное есть мнимая или векторная единица, которая отмечает *направление* построенной линии или область в пространстве, на которую повернута эта линия. Отсюда (и по другим причинам) мы предлагаем назвать это частное *верзором* чисто мнимой величины и вообще сказать, что кватернион есть произведение своих тензорного и верзорного сомножителей, или написать

$$Q = TQ.UQ,$$

используя букву U для характеристики верзора, а T – для тензора.

Это другое общее разложение кватерниона, упомянутое в начале настоящего пункта. В этих обозначениях мы имеем

$$T.TQ = TQ, \quad T.UQ = 1, \quad U.TQ = 1, \quad U.UQ = UQ,$$

так что тензор верзора или верзор тензора равен единице, тогда как мы видели, что скаляр вектора или вектор скаляра есть нуль.

Тензор положительного скаляра равен самому этому скаляру; но тензор отрицательного скаляра равен положительному числу, противоположному данному (отрицательному). Верзор положительного или отрицательного скаляра равен положительной или отрицательной единице, и вообще по доказанному в п. 12, верзор кватерниона есть произведение двух мнимых единиц. Тензор и верзор вектора рассмотрены в настоящем пункте. Тензор не может стать равным верзору (исключая случай, когда каждый из них равен положительной единице), так же как скаляр и вектор не могут быть равны друг другу, если каждый из них не сводится к нулю.

---

[2] Автор полагает, что к первоначальному использованию терминов "модуль" и "амплитуда" его привела номенклатура м-ра Коши для обыкновенных мнимых чисел алгебры. Кроме того, использование слова "конституенты" было у его друга Дж.Т. Грэйвса, эсквайра, в связи с обычными мнимыми выражениями вида $x + \sqrt{-1}y$, что привело сэра Уильяма Гамильтона к употреблению того же термина применительно к его собственным мнимым. И если бы он не пришел к предпочтению наименования "тензор" слову "модуль" в этой теории, то вместо характеристики T следовало бы ввести символ M с тем же самым значением (из ценной статьи м-ра Кэли (*Cayley A.* On certain results relating to quaternions), которая появилась в "Philosophical Magazine" в феврале 1845 г.). Настоящим автором было предложено в упомянутой статье назвать логарифмический модуль "мензором" кватерниона и обозначать его упомянутой характеристикой M, так что имеем

$$MQ = \log.TQ, \quad M.QQ' = MQ + MQ'.$$

20. Если мы назовем *сопряженными* два кватерниона, когда они имеют одну и ту же скалярную часть, но противоположные по знаку векторные части, то согласно последнему

$$(TQ)^2 = (SQ + VQ)(SQ - VQ).$$

Мы можем сказать, что *произведение двух сопряженных кватернионов* SQ + VQ и SQ – VQ равно *квадрату их общего тензора* TQ, из чего следует, что *сопряженные верзоры обратны друг другу*; один кватернион называется *обратным* другому, если их произведение есть положительная единица.

Если Q и Q′ – любые два кватерниона, то два произведения их верзоров, взятых в разном порядке, именно VQ.VQ′ и VQ′.VQ, являются сопряженными кватернионами по определению, данному выше, и по правилам п. 9. Сопряженное суммы любого числа кватернионов равно сумме сопряженных им кватернионов; следовательно, произведения (SQ + VQ)(SQ′ + VQ′) и (SQ′ – VQ′)(SQ – VQ) – сопряженные. Поэтому T.QQ′, который есть тензор первого произведения, равен корню квадратному из их произведения, т.е. из $(SQ + VQ)(TQ')^2(SQ - VQ)$ или из $(TQ)^2(TQ')^2$. Следовательно, имеем формулу

$$T.QQ' = TQ.TQ',$$

которая доставляет еще одну:

$$UQQ' = UQ.UQ'.$$

Это можно сформулировать так: *тензор произведения* любых двух кватернионов равен *произведению тензоров*, подобным же образом *верзор произведения* равен *произведению верзоров*. Оба эти результата можно легко распространить на любое число сомножителей и, используя символ П как характеристику произведения, можно написать

$$T\Pi Q = \Pi TQ, \quad U\Pi Q = \Pi UQ.$$

В самом деле, было показано (в п. 3), что модуль произведения равен произведению модулей. Но процесс, которым здесь был выведен эквивалентный результат, не зависел существенно от этого, более раннего доказательства; он имеет также преимущество демонстрации того, что последовательное произведение любого числа кватернионных сомножителей является сопряженным выражением последовательного произведения сопряженных соответствующих множителей, взятых в противоположном порядке. Так что можно написать формулу

$$(S - V).QQ'Q''... = ...(SQ'' - VQ'')(SQ' - VQ')(SQ - VQ),$$

которая, будучи скомбинирована с другой:

$$(S + V).QQ'Q''... = (SQ + VQ)(SQ' + VQ')(SQ'' + VQ'')...,$$

дает нам возможность легко развернуть SПQ и VПQ, т.е. представить скаляр и вектор любого произведения кватернионов через скаляры и векторы сомножителей этого произведения. Например, если мы договоримся использовать в этих вычисле-

ниях маленькие греческие буквы α, β и т.д. (со штрихами или без них) как символы векторов (за исключением π и еще нескольких других, которые или будут точно оговорены при появлении, или ясно указаны контекстом), то можно составить следующую таблицу, из которой очевиден закон:

$2S.\alpha = \alpha - \alpha = 0,$	$2V.\alpha = \alpha + \alpha = 2\alpha,$
$2S.\alpha\alpha' = \alpha\alpha' + \alpha'\alpha,$	$2V.\alpha\alpha' = \alpha\alpha' - \alpha'\alpha,$
$2S.\alpha\alpha'\alpha'' = \alpha\alpha'\alpha'' - \alpha''\alpha'\alpha,$	$2V.\alpha\alpha'\alpha'' = \alpha\alpha'\alpha'' + \alpha''\alpha'\alpha,$
. . . .	. . . .

21. Основные правила умножения в этом исчислении дают (в принятых обозначениях для скалярной и векторной частей произведения двух любых векторов):

$$S.\alpha\alpha' = -(xx' + yy' + zz'),$$

$$V.\alpha\alpha' = i(yz' - zy') + j(zx' - xz') + k(xy' - yx'),$$

если $\alpha = ix + jy + kz$, $\alpha' = ix' + jy' + kz'$; x, y, z и x', y', z' – действительные прямоугольные координаты, а i, j, k – начальные мнимые единицы этой теории.

Геометрические значения символов $S.\alpha\alpha'$, $V.\alpha\alpha'$ поэтому полностью известны. Первый из этих двух символов, как мы увидим, находится в тесной связи с теорией взаимных поляр. Этого можно ожидать, если заметить, что уравнение $S.\alpha\alpha' = -a^2$ относится к сфере, уравнение которой есть $\alpha^2 = -a^2$, т.е. оно относится к сфере, центр которой – начало векторов и радиус которой имеет длину, обозначенную через a. *Вектор α' оканчивается в полярной плоскости точки, которая является концом вектора α.* Последний же из этих символов, именно $V.\alpha\alpha'$, означает или может быть построен как прямая линия, которая по направлению перпендикулярна обеим линиям, обозначенным через α и α', и такова, что вращение вокруг нее от α к α' положительно, и отношение (по длине) к единице длины таково, каково отношение *площади параллелограмма, построенного на двух линиях-сомножителях*, к единице площади.

Легко можно показать с помощью тех же принципов, что *объем параллелепипеда*, образованного любыми тремя линиями, имеющими общее начало, или *ушестеренный объем тетраэдра*, ребрами которого являются эти линии, равен *скаляру произведения трех соответствующих линий.* Этот скаляр $S.\alpha\alpha'\alpha''$, который равен $S(V.\alpha\alpha')\alpha''$, будет положителен или отрицателен в зависимости от того, образует α'' тупой или острый угол с $V.\alpha\alpha'$, т.е. в зависимости от того, положительно или отрицательно вращение вокруг α'' от α' к α.

Чтобы выразить тот факт, что две взятые линии α, α' перпендикулярны, мы можем написать следующее уравнение перпендикулярности:

$$S.\alpha\alpha' = 0, \quad \text{или} \quad \alpha\alpha' + \alpha'\alpha = 0.$$

Чтобы выразить, что α и α' – две линии одного или противоположного направления, мы можем написать уравнение соосности (coaxility), или параллельности:

$$V.\alpha\alpha' = 0, \quad \text{или} \quad \alpha\alpha' - \alpha'\alpha = 0.$$

И чтобы выразить, что три линии лежат в одной общей плоскости или параллельны одной плоскости, мы можем написать уравнение компланарности [9]

$$S.\alpha\alpha'\alpha'' = 0, \quad \text{или} \quad \alpha\alpha'\alpha'' - \alpha''\alpha'\alpha = 0.$$

Оно справедливо либо потому, что объем параллелепипеда, построенного на этих трех линиях, обращается в нуль, либо потому, что один из трех векторов тогда перпендикулярен векторной части произведения двух других.

22. Геометрические рассмотрения предыдущего пункта могли часто подсказать алгебраические преобразования функций от новых мнимых величин, которые характерны для новой теории. Так, если мы встречаем функцию

$$\alpha S.\alpha'\alpha'' - \alpha' S.\alpha''\alpha, \tag{1}$$

мы можем видеть сразу же, что в наших обозначениях эта функция чисто мнимая или векторного вида; она может быть построена геометрически в этой теории как прямая линия, имеющая длину и направление в пространстве, потому что три символа α, α', α'' предполагаются векторами такого вида, т.е. допускают такое представление тремя линиями, тогда как $S.\alpha'\alpha''$ и $S.\alpha''\alpha$ являются (в тех же обозначениях) двумя скалярными формами и означают некоторые два действительные числа, положительные, отрицательные или нуль. Поэтому можно приравнять предложенную функцию (1) новой маленькой греческой букве, штрихованной или нет, например α''', написав

$$\alpha''' = \alpha S.\alpha'\alpha'' - \alpha' S.\alpha''\alpha. \tag{2}$$

Умножая это уравнение на α'' и сравнивая скаляры правой и левой частей (т.е. действуя на уравнение характеристикой $S.\alpha''$), замечаем, что по свойству скаляров

$$S.\alpha''\alpha S.\alpha'\alpha'' = S.\alpha''\alpha.S.\alpha'\alpha'' = S.\alpha''\alpha'.S.\alpha''\alpha = S.\alpha''\alpha' S.\alpha''\alpha,$$

где обозначение $S.\alpha''\alpha S.\alpha'\alpha''$ – сокращение для $S(\alpha''\alpha S.\alpha'\alpha'')$, а обозначение $S.\alpha''\alpha.S.\alpha'\alpha''$ – сокращение $(S.\alpha''\alpha).(S.\alpha'\alpha'')$, тогда как $S.\alpha'\alpha''$ – символ, эквивалентный $S(\alpha'\alpha'')$, а также согласно п. 20 эквивалентный $S(\alpha''\alpha')$ или $S.\alpha''\alpha'$, хотя сами $\alpha'\alpha''$ и $\alpha''\alpha'$ неэквивалентны. Мы пришли к уравнению

$$S.\alpha''\alpha''' = 0, \tag{3}$$

которое показывает (сравнением с общим *уравнением перпендикулярности*, записанным в последнем пункте), что *новый вектор* α''' *перпендикулярен данному вектору* α'' или что эти два вектора представляют две перпендикулярные линии в пространстве.

Далее, так как квадраты векторов – скаляры (действительные, хотя и отрицательные числа), мы имеем

$$\alpha(\alpha S.\alpha'\alpha'').\alpha' = \alpha^2\alpha' S.\alpha'\alpha'' = \alpha'(\alpha S.\alpha'\alpha'').\alpha,$$

$$\alpha'(\alpha' S.\alpha''\alpha).\alpha = \alpha'^2\alpha S.\alpha''\alpha = \alpha(\alpha' S.\alpha''\alpha).\alpha'.$$

Поэтому уравнение (2) дает также

$$\alpha\alpha'''\alpha' = \alpha'\alpha'''\alpha. \tag{4}$$

Этот результат, если сравнить его с общим *уравнением компланарности*, записанным в том же предыдущем пункте, показывает, что *новый вектор* α''' *компланарен с двумя данными векторами,* α и α', и поэтому перпендикулярен вектору их произведения $V.\alpha\alpha'$, который перпендикулярен этим обоим данным векторам. Следовательно, мы имеем два известных вектора, именно $V.\alpha\alpha'$ и α''; обоим им перпендикулярен искомый вектор α'''. Поэтому он параллелен (или коаксиален) вектору произведения двух известных только что упомянутых векторов, или он равен вектору их произведения, умноженному на некоторый скалярный коэффициент x. Так что можно написать преобразованное выражение

$$\alpha''' = xV(V.\alpha\alpha'.\alpha''). \tag{5}$$

Так как функция α''', согласно уравнению (2), есть однородная функция первой степени относительно каждого из векторов α, α', α'' и функция $V(V.\alpha\alpha'.\alpha'')$ – также однородная той же степени относительно каждого из этих трех векторов, то мы видим, что коэффициент x должен быть либо постоянным числом, либо однородной функцией нулевой степени относительно каждого из тех же трех векторов. Мы можем поэтому задать этим трем векторам любые произвольные длины, какие только больше всего облегчат определение этого скалярного коэффициента x.

Далее, два выражения (2) и (5) обращаются в нуль, если α'' перпендикулярен плоскости α и α'. Поэтому, чтобы определить x, позволим предположить, что α, α', α'' – три компланарных вектора. И согласно только что отмеченному, мы можем положить, что их длины равны друг другу, и положить их равными единице.

Таким путем мы придем к отысканию значения x из уравнения

$$xV.\alpha\alpha'\alpha'' = \alpha S.\alpha'\alpha'' - \alpha' S.\alpha''\alpha \tag{6}$$

при условии

$$S.\alpha\alpha'\alpha'' = 0 \tag{7}$$

и

$$\alpha^2 = \alpha'^2 = \alpha''^2 = -1, \tag{8}$$

так что α, α', α'' – *три компланарные и мнимые единицы.* Умножая каждую часть уравнения (6) как множитель на $-\alpha''$ как на множимое и сравнивая векторные части двух произведений, а также замечая, что $V.\alpha'\alpha'' = -V.\alpha''\alpha'$ и $-V.\alpha\alpha'' = V.\alpha''\alpha$, мы получим такое уравнение:

$$xV.\alpha\alpha' = V.\alpha''\alpha.S\alpha'\alpha'' - V.\alpha''\alpha'.S.\alpha''\alpha, \tag{9}$$

в котором три вектора $V.\alpha''\alpha$, $V.\alpha''\alpha'$, $V.\alpha\alpha'$ коаксиальны, так как каждый перпендикулярен общей плоскости трех векторов α, α', α''. Поэтому отношение каждого из них к другому есть скаляр, а длины их пропорциональны (согласно последнему пункту) площадям параллелограммов, построенных на трех парах единичных векторов соответственно α'' и α, α'' и α', α и α', т.е. пропорциональны синусам углов a, a' и $a' - a$, если a – угол вращения от α'' к α и a' – угол вращения от α'' к α' в общей плоскости этих трех векторов. В то же время мы имеем (по

правилам того же самого пункта) выражения

$$-S.\alpha''\alpha = \cos a, \quad S.\alpha''\alpha' = -\cos a',$$

так что уравнение (9) сводится к следующей очень простой формуле:

$$x \sin(a' - a) = \sin a' \cdot \cos a - \sin a \cdot \cos a' \tag{10}$$

и дает немедленно

$$x = 1. \tag{11}$$

Таково значение коэффициента x в преобразованном уравнении (5), и, сравнивая это выражение с предложенной формой (1), мы находим, что можно написать для любых трех векторов α, α', α'' следующее *общее преобразование*:

$$\alpha S.\alpha'\alpha'' - \alpha' S.\alpha''\alpha = V(V.\alpha\alpha' - \alpha''), \tag{12}$$

которое будет находить широкие приложения. При этом векторы α, α', α'' не обязательно подчинены условиям: быть равными по длине и компланарными по направлениям (так как эти условия использовались не при выводе формы (5), а только при определении значения x (11)).

23. Хотя возможно, таким образом, использовать геометрические рассмотрения, чтобы навести на мысль и даже чтобы доказать законность многих общих преобразований, все же желательно знать, как получить те же самые символические результаты из законов комбинации символов; также и исчисление кватернионов не следовало бы рассматривать как завершенное, пока все такие эквивалентные формы не могут быть выведены из таких символических законов посредством наименьшего числа (и наипростейших) принципов. В примере предыдущего пункта символическое преобразование может быть выполнено следующим путем [10].

Когда скалярная форма умножается на векторную форму (или вектор на скаляр), произведение есть векторная форма. Сумма или разность двух таких векторных форм сама есть векторная форма. Следовательно, выражение (1) последнего пункта является векторной формой; как таковую его можно обозначить маленькой греческой буквой, другими словами, допустимо уравнение (2). Но каждая векторная форма равна своей собственной векторной части или она не подвергается никакому изменению в значении, когда на нее действуют характеристикой V. Мы имеем поэтому другое выражение для уравнения (2):

$$\alpha''' = V(\alpha S.\alpha''\alpha' - \alpha' S.\alpha''\alpha), \tag{1'}$$

где под знаком характеристики S произведено допустимое изменение порядка двух множителей α', α''.

Подставляя сюда вместо характеристики S символически эквивалентную (согласно п. 18) характеристику 1 – V и замечая, что

$$V(\alpha\alpha''\alpha' - \alpha'\alpha''\alpha) = 0, \tag{2'}$$

так как согласно п. 20 $\alpha\alpha''\alpha' - \alpha'\alpha''\alpha$ – скалярная форма, мы получим такое

другое выражение

$$\alpha''' = V(\alpha' V.\alpha''\alpha - \alpha V.\alpha''\alpha'). \tag{3'}$$

Выражение (1′) может быть переписано в виде

$$\alpha''' = V(\alpha S.\alpha'\alpha'' - \alpha' S.\alpha\alpha''), \tag{4'}$$

а (3′) – в виде

$$\alpha''' = V(\alpha V.\alpha'\alpha'' - \alpha' V.\alpha\alpha''). \tag{5'}$$

Эти формулы получены переменой местами двух векторных сомножителей в каждом из двух бинарных произведений под знаком V, а затем изменением знаков у этих произведений. Составляя полусумму этих двух форм (4′) и (5′) и используя символическое соотношение $S + V = 1$ (п. 18), мы находим

$$\alpha''' = {}^1\!/\!_2 V(\alpha\alpha'\alpha'' - \alpha'\alpha\alpha'') = V({}^1\!/\!_2(\alpha\alpha' - \alpha'\alpha).\alpha''), \tag{6'}$$

в котором согласно п. 20 $^1\!/\!_2(\alpha\alpha' - \alpha'\alpha) = V.\alpha\alpha'$. Имеем поэтому, наконец,

$$\alpha''' = V(V.\alpha\alpha'.\alpha''), \tag{7'}$$

т.е. мы пришли к преобразованному выражению (12) последнего пункта чисто символическим процессом из законов комбинаций, установленных предварительно.

24. Соотношение вида (4) из п. 22 есть уравнение между двумя тернарными произведениями трех векторов, взятых в различных и противоположных порядках. Оно означает, что скалярная часть такого тернарного произведения равна нулю, хотя вообще она может фигурировать (и на самом деле это так и есть) в различных исследованиях. По п. 21 известна геометрическая интерпретация такого символического соотношения между тремя векторными формами, именно: это условие того, что формы представляют три компланарные линии; эта интерпретация подсказывает, что один из этих векторов может быть преобразован в линейную функцию со скалярными коэффициентами от двух других векторов, так как любая данная прямая линия в данной плоскости можст быть представлена как диагональ параллелограмма, у которого две смежные стороны имеют два заданных направления в этой плоскости. И хотя мы это знаем, все же желательно знать (по причинам, упомянутым в начале последнего пункта), как получить то же самое общее преобразование тех же символических соотношений без помощи геометрических рассмотрений.

Предположим, что какое-то исследование привело к соотношению

$$\alpha\alpha'\alpha'' - \alpha''\alpha'\alpha = 0, \tag{1}$$

которое не является тождеством в этой теории и которое требуется преобразовать. Согласно п. 20, мы можем записать последнее соотношение (1) в форме

$$S.\alpha\alpha'\alpha'' = 0. \tag{2}$$

И так как вообще для любых трех векторов мы имеем формулу (12) из п. 22, то, если мы положим в этой формуле $\alpha'' = V.\beta\beta'$ и заметим, что $S(V.\beta\beta'.\alpha) = S(\alpha V.\beta\beta') = S.\alpha\beta\beta'$, мы найдем для любых четырех векторов α, α', β, β' урав-

нение

$$V(V.\alpha\alpha'.V.\beta\beta') = \alpha S.\alpha'\beta\beta' - \alpha' S.\alpha\beta\beta'. \tag{3}$$

Полагая в этом последнем уравнении $\beta = \alpha'$, $\beta' = \alpha''$, мы найдем для любых трех векторов α, α', α'' формулу

$$V(V.\alpha\alpha' V.\alpha'\alpha'') = -\alpha' S.\alpha\alpha'\alpha''. \tag{4}$$

Если затем скаляр произведения $\alpha\alpha'\alpha''$ равен нулю, т.е. если удовлетворяется условие (2) или (1) настоящего пункта, то произведение двух векторов: $V.\alpha\alpha'$ и $V.\alpha'\alpha''$ – скаляр. Поэтому последний из этих двух векторов (или противоположный ему вектор $V.\alpha''\alpha'$), вообще говоря, равен первому вектору $V.\alpha\alpha'$, умноженному на некоторый скалярный коэффициент b. Можно написать при этом условии (1) уравнение

$$V.\alpha''\alpha' = bV.\alpha\alpha', \tag{5}$$

т.е.

$$V.(\alpha'' - b\alpha)\alpha' = 0, \tag{6}$$

так что один векторный сомножитель $\alpha'' - b\alpha$ этого последнего произведения должен быть равен другому векторному сомножителю α', умноженному на некоторый новый скаляр b'. И мы можем написать формулу

$$\alpha'' = b\alpha + b'\alpha' \tag{7}$$

как преобразование формул (1) или (2). Мы можем также написать (более симметрично) уравнение

$$a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' = 0 \tag{8}$$

как символическое преобразование предложенного уравнения

$$\alpha\alpha'\alpha'' - \alpha''\alpha'\alpha = 0.$$

Здесь три скалярных коэффициента a, a', a'' (хотя произвольных отношений их только два). И это замечательно: мы понижаем таким образом на два размерность предложенного уравнения, содержащего три произвольных вектора α, α', α'', и в то же время вводим две произвольных константы, именно два отношения чисел a, a', a''.

Обратный процесс служил бы для исключения двух произвольных констант (таких, как эти два отношения или два скалярных коэффициента b и b') из линейного уравнения вида (8) или (7) между тремя переменными векторами и увеличивал бы на два размерность уравнения, приводя к виду (1) или (2).

Аналогия между этими двумя обратными преобразованиями, с одной стороны, и интегрированием и дифференцированием уравнений – с другой, обнаруживается полнее, если мы займемся промежуточной стадией (5) каждого преобразования. Оно промежуточной степени или размерности и включает одну произвольную постоянную b, что, так сказать, на единицу больше, чем уравнение наивысшей размерности (1), и на единицу меньше, чем уравнение наименьшей размерности (7).

25. Как мы видели, уравнение $S.\alpha\alpha'\alpha'' = 0$ выражает тот факт, что три вектора α, α', α'' представляют компланарные линии или что любая из этих трех линий, например линия, представленная вектором α, лежит в плоскости , определяемой двумя другими, когда они расходятся из общего начала, Так, если мы введем для краткости

$$\beta = V(V.\alpha\alpha'.V.\alpha'''\alpha^{IV}), \quad \beta' = V(V.\alpha'\alpha''.V.\alpha^{IV}\alpha^{V}), \quad \beta'' = V(V.\alpha''\alpha'''.V.\alpha^{V}\alpha), \quad (1)$$

то легко показать, что уравнение

$$S.\beta\beta'\beta'' = 0 \quad (2)$$

выражает, что шесть векторов α, α', α'', α''', α^{IV}, α^{V} (если предположить, что все они проведены из общего начала векторов) являются соконусными (homoconic) или представляют шесть ребер одного конуса второго порядка. Ибо если мы принимаем пять векторов $\alpha', \alpha'', \alpha''', \alpha^{IV}, \alpha^{V}$ за данные, а оставшийся вектор α за переменный, то во-первых, уравнение (2) дает в качестве геометрического места этого переменного вектора α некоторый конус второго порядка, потому что по определениям (1) векторов $\beta\beta'\beta''$, если мы заменяем α на $a\alpha$ (a – скаляр), то каждый из двух векторов β и β'' также умножается на a, тогда как β' остается неизменным. Поэтому функция $S.\beta\beta'\beta''$ будет умножаться на a^2, т.е. на квадрат скаляра a, на который умножен вектор α.

Во-вторых, это коническое геометрическое место векторов α будет содержать данный вектор α', потому что, если мы полагаем $\alpha = \alpha'$, мы имеем $\beta = 0$ и уравнение (2) удовлетворяется. Таким же образом геометрическое место векторов α содержит вектор α^{V}, потому что предположение $\alpha = \alpha^{V}$ дает $\beta'' = 0$.

В-третьих, конус содержит α'' и α^{IV}, так как если мы полагаем $\alpha = \alpha''$, то по принципу, выраженному формулой (4) последнего пункта, мы имеем

$$\beta'' = -V(V.\alpha^{V}\alpha''.V.\alpha''\alpha''') = \alpha''S\alpha^{V}\alpha''\alpha'''$$

и по тому же принципу (при том же условии)

$$V.\beta\beta' = V(V(V.\alpha'''\alpha^{IV}.V.\alpha'\alpha'').V(V.\alpha'\alpha''.V.\alpha^{IV}\alpha^{V})) =$$
$$= -V.\alpha'\alpha''S.(V.\alpha'''\alpha^{IV}.V.\alpha'\alpha''.V.\alpha^{IV}\alpha^{V}).$$

Но $S.(V.\alpha'\alpha''.\alpha'') = S.\alpha'\alpha''\alpha'' = 0$, поэтому $S.\beta\beta'\beta'' = S(V.\beta\beta'.\beta'') = 0$.

Подобным же образом это последнее условие удовлетворяется, если $\alpha = \alpha^{IV}$, так как тогда β и $V.\beta'\beta''$ отличаются только на скалярные коэффициенты соответственно от α^{IV} и $V.\alpha^{IV}\alpha^{V}$, так что скаляр их произведения равен нулю. Наконец, коническое геометрическое место векторов α содержит также оставшийся вектор α''', так как если мы положим $\alpha = \alpha'''$, то имеем

$$\beta = \alpha'''S.\alpha'\alpha'''\alpha^{IV}, \quad \beta'' = \alpha'''S.\alpha''\alpha'''\alpha^{V},$$

и поэтому в этом случае $S.\beta\beta'\beta'' = 0$, так как скаляр произведения α''' и $\beta'\alpha'''$ есть нуль.

Геометрическое место векторов α, следовательно, есть конус второго порядка, содержащий пять векторов α', α'', α''', α^{IV}, α^{V}. И именно таким же путем можно показать без труда, что любой из шести векторов $\alpha, \ldots, \alpha^{V}$ можно рассматривать как переменный вектор и его геометрическое место, описанное уравнением (2)

настоящего пункта, есть конус второго порядка, содержащий пять других векторов. Мы можем поэтому сказать, что это уравнение

$$S.\beta\beta'\beta'' = 0,$$

когда символы β, β', β'' имеют значения, заданные определениями (1), выражает тот факт, что когда оно удовлетворяется, то один общий конус второго порядка проходит через все шесть векторов α, α', α'', α''', α^{IV}, α^{V} и дает нам возможность вывести из него все свойства этого общего конуса. Подставляя вместо этих символов их значения, можем сказать, что справедливо следующее уравнение:

$$S\{V(V.\alpha\alpha'.V.\alpha'''\alpha^{IV}).V(V.\alpha'\alpha''.V.\alpha^{IV}\alpha^{V}).V(V.\alpha''\alpha'''.V.\alpha^{V}\alpha)\} = 0. \quad (3)$$

Можно назвать это уравнение уравнением соконусности (equation of homoconism or of uniconality).

26. Рассмотрения, проведенные в предыдущем пункте, оставляют сомнения: нет ли другого конуса той же степени, который мог бы проходить через те же шесть векторов. Чтобы устранить это сомнение методом, согласующимся с духом настоящей теории, мы можем провести следующие исследования относительно вообще конических сечений.

Можно обозначить какие-нибудь четыре вектора α, α', β, β'; имеем

$$V(V.\alpha\alpha'.V.\beta\beta'.) + V(V.\beta\beta'.V.\alpha\alpha') = 0. \quad (1)$$

Подставляя затем для первой из этих двух противоположных векторных функций выражение (3) из п. 24, а для второй – выражение, образованное заменой каждого α на соответствующие β, мы найдем для любых четырех векторов

$$\alpha S.\alpha'\beta\beta' - \alpha' S.\alpha\beta\beta' + \beta S.\beta'\alpha\alpha' - \beta' S.\beta\alpha\alpha' = 0. \quad (2)$$

Далее из принципов и уже установленных результатов легко следует, что скаляр произведения трех векторов изменяет знак, когда меняются местами любые два из этих трех сомножителей, так что

$$S.\alpha\beta\gamma = -S.\alpha\gamma\beta = S.\gamma\alpha\beta = -S.\gamma\beta\alpha = S.\beta\gamma\alpha = -S.\beta\alpha\gamma. \quad (3)$$

Полагая поэтому, что ι, κ, λ – любые три вектора, скаляр произведения которых не равен нулю, мы можем выразить любой четвертый вектор α через эти три вектора и скаляры трех произведений $\alpha\kappa\lambda$, $\iota\alpha\lambda$, $\iota\kappa\alpha$ по формуле

$$\alpha S.\iota\kappa\lambda = \iota S.\alpha\kappa\lambda + \kappa S.\iota\alpha\lambda + \lambda S.\iota\kappa\alpha. \quad (4)$$

Пусть предполагается, что α – векторная функция одной скалярной переменной t, что может быть выражено уравнением

$$\alpha = \varphi(t). \quad (5)$$

Положим для сокращения

$$\frac{S.\alpha\kappa\lambda}{S.\iota\kappa\lambda} = f_1(t), \quad \frac{S.\iota\alpha\lambda}{S.\iota\kappa\lambda} = f_2(t), \quad \frac{S.\iota\kappa\alpha}{S.\iota\kappa\lambda} = f_3(t). \quad (6)$$

Формы этих трех скалярных функций зависят от вида векторной функции $\varphi(t)$ и

от трех предложенных векторов ικλ; они связаны с этими векторами и друг с другом соотношением

$$\varphi(t) = \iota f_1(t) + \kappa f_2(t) + \lambda f_3(t). \qquad (7)$$

Будем мыслить t исключенным из выражений для двух отношений трех скалярных функций f_1, f_2, f_3; таким образом будет получено уравнение вида

$$F(f_1(t), f_2(t), f_3(t)) = 0, \qquad (8)$$

в котором F – скалярная (или действительная) и однородная функция.

Затем будет очевидно, что уравнение (5) можно рассматривать как уравнение кривой в пространстве (эквивалентное системе трех действительных уравнений между тремя координатами точки для кривой двоякой кривизны и вспомогательной переменной t; последняя переменная может означать время в движении вдоль этой кривой). Уравнение конуса, который проходит через эту произвольную кривую и имеет вершину в начале векторов, есть

$$F(\mathrm{S}.\alpha\kappa\lambda,\ \mathrm{S}.\iota\alpha\lambda,\ \mathrm{S}.\iota\kappa\alpha) = 0. \qquad (9)$$

Такова в этой теории форма уравнения произвольной конической поверхности, мы можем написать, в частности, в качестве определения конуса порядка n уравнение

$$\Sigma(A_{p,q,r}(\mathrm{S}.\alpha\kappa\lambda)^p.(\mathrm{S}.\iota\alpha\lambda)^q.(\mathrm{S}.\iota\kappa\alpha)^r) = 0, \qquad (10)$$

где p, q, r – любые целые числа, положительные или нуль, сумма которых есть n; $A_{p,q,r}$ – скалярная функция этих чисел; суммирование, указанное индексом Σ, распространяется на все системы значений, совместимые с упомянутыми выше условиями, что может быть записано таким образом:

$$\sin p\pi = \sin q\pi = \sin r\pi = 0; \quad p \geqslant 0,\ q \geqslant 0,\ r \geqslant 0; \ p + q + r = n. \qquad (11)$$

Когда $n = 2$, этим условиям могут удовлетворять только *шесть* систем значений p, q, r; следовательно, в этом случае в уравнение (10) входят только шесть коэффициентов A; поэтому достаточно пяти скалярных отношений этих шести коэффициентов, чтобы задать конус второго порядка. И они могут быть найдены вообще обычным решением системы пяти уравнений первой степени, когда заданы пять конкретных векторов, например α', α'', α''', α^{IV}, α^{V}, через которые проходит конус или на поверхности которого они лежат. Отсюда (как известно из других источников) поставленная проблема: найти конус второго порядка, на поверхности которого лежат пять данных прямых линий. Общее решений этой проблемы содержится в уравнении соконусности предудыщего пункта.

Здесь дано доказательство того, что шесть векторов $\alpha, \ldots, \alpha^{\mathrm{V}}$ соконусны, если они удовлетворяют уравнению, которое не выражает никакого свойства конических сечений, ни даже какого-нибудь свойства окружности: наоборот, раз установленное с помощью только что проведенного доказательства это уравнение может быть использовано как основа для полной теории конических сечений и конусов второго порядка.

27. Чтобы обосновать это утверждение, не пытаясь на самом деле развить такую теорию, может быть, достаточно вывести из уравнения соконусности, записанного в п. 25, то великое и плодотворное свойство окружности или конуса с круговым основанием, которое было открыто гением Паскаля. Это легко сделать, ибо три вспомогательных вектора β, β', β'', введенные в уравнениях (1) п. 25, являются, очевидно (согласно принципам, недавно установленным в другом пункте этой статьи), соответствующими линиями пересечения трех пар плоскостей. Это следующие плоскости: плоскости векторов $\alpha\alpha'$ и $\alpha'''\alpha^{V}$ пересекаются по β; плоскости $\alpha'\alpha''$ и $\alpha^{IV}\alpha^{V}$ – по β'; плоскости векторов $\alpha''\alpha'''$ и $\alpha^{V}\alpha$ – по β''. Форма (2) уравнения соконусности п. 25 выражает тот факт, что эти три линии β, β', β'' компланарны. Если затем шестигранный угол вписан в конус второго порядка и если каждую из шести плоских граней продолжить (если необходимо) так, чтобы она пересекалась с противоположной ей по прямой линии, то три линии пересечения противоположных граней, полученные таким образом, будут расположены в одной общей плоскости, что есть форма теоремы Паскаля.

28. Известное и чисто геометрическое свойство конуса второго порядка, которое устанавливает теорема Паскаля и утверждает компланарность трех линий пересечения плоскостей противоположных граней вписанного шестигранного угла, можно преобразовать в другое известное, но чисто метрическое свойство того же конуса второго порядка. Оно является формой теоремы Шаля о постоянстве ангармонического отношения. Это преобразование можно выполнить без труда по схеме настоящего пункта, ибо, если мы умножим на $V.\gamma\gamma'$ обе части уравнения (3) п. 24 и затем подействуем характеристикой S., мы найдем (принимая во внимание общие свойства скаляров произведений) для любых шести векторов α, α', β, β', γ, γ' формулу

$$S(V.\alpha\alpha'.V.\beta\beta'.V.\gamma\gamma') = S.\alpha\gamma\gamma'.S.\alpha'\beta\beta' - S.\alpha'\gamma\gamma'.S.\alpha\beta\beta', \tag{1}$$

которая дает для любых пяти векторов α, α', α'', γ, γ' следующую формулу:

$$S(V.\alpha\alpha'.V.\alpha'\alpha''.V.\gamma\gamma') = S.\alpha\alpha'\alpha''.S.\gamma\alpha'\gamma'. \tag{2}$$

Возьмем затем шесть произвольных векторов α, α', α'', α''', α^{IV}, α^{V} и выведем из них девять других векторов с помощью выражений

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 = V.\alpha\alpha'. &&\alpha_1 = V.\alpha'\alpha'', &&\alpha_2 = V.\alpha''\alpha''',\\
&\alpha_3 = V.\alpha'''\alpha^{IV}. &&\alpha_4 = V.\alpha^{IV}\alpha^{V}, &&\alpha_5 = V.\alpha^{V}\alpha,\\
&\beta = V.\alpha_0\alpha_3, &&\beta' = V.\alpha_1\alpha_4, &&\beta'' = V.\alpha_2\alpha_5.
\end{aligned} \tag{3}$$

Мы тогда будем иметь *вообще*

$$S.\beta\beta'\beta'' = S.\alpha_0\alpha_2\alpha_5.S.\alpha_3\alpha_1\alpha_4 - S.\alpha_3\alpha_2\alpha_5.S.\alpha_0\alpha_1\alpha_4 =$$

$$= S.\alpha_0\alpha_1\alpha_4.S.\alpha_2\alpha_3\alpha_5 - S.\alpha_3\alpha_4\alpha_1.S.\alpha_5\alpha_0\alpha_2 =$$

$$= S.\alpha\alpha'\alpha''.S.\alpha^{IV}\alpha'\alpha^{V}.S.\alpha''\alpha'''\alpha^{IV}.S.\alpha^{V}\alpha'''\alpha -$$

$$-S.\alpha'''\alpha^{IV}\alpha^{V}.S.\alpha'\alpha^{IV}\alpha''.S.\alpha^{V}\alpha\alpha'.S.\alpha''\alpha\alpha'''=$$

$$=S.\alpha\alpha'\alpha''.S.\alpha''\alpha'''\alpha^{IV}.S.\alpha\alpha'''\alpha^{V}.S.\alpha^{V}\alpha'\alpha^{IV}-$$

$$-S.\alpha\alpha'''\alpha''.S.\alpha''\alpha'\alpha^{IV}.S.\alpha\alpha'\alpha^{V}.S.\alpha^{V}\alpha'''\alpha^{IV}. \tag{4}$$

Таким образом, если, в частности, шесть векторов $\alpha, \dots, \alpha^{V}$ таковы, что удовлетворяют условию

$$S.\beta\beta'\beta''=0, \tag{5}$$

то они будут также удовлетворять и другому условию или тому же условию в другой форме:

$$\frac{S.\alpha\alpha'\alpha''}{S.\alpha\alpha'''\alpha''}\frac{S.\alpha''\alpha'''\alpha^{IV}}{S.\alpha''\alpha'\alpha^{IV}}=\frac{S.\alpha\alpha'\alpha^{V}}{S.\alpha\alpha'''\alpha^{V}}\frac{S.\alpha^{V}\alpha'''\alpha^{IV}}{S.\alpha^{V}\alpha'\alpha^{IV}}. \tag{6}$$

И обратно, первое из этих двух условий будет удовлетворяться, если удовлетворяется последнее.

Эти два уравнения (5) и (6) выражают, следовательно (каждое по-своему), существование одного и того же геометрического соотношения между шестью векторами $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \alpha^{IV}, \alpha^{V}$. С первого же взгляда на эти уравнения видно, что оба они согласуются с тем, что шесть векторов соконусны (в смысле п. 25) или, другими словами, что шесть векторов являются образующими одного общего конуса второго порядка. В самом деле, уравнение (5) настоящего пункта (вследствие определения (3)) совпадает с уравнением (2) только что цитированного пункта; символы β, β', β'' сохраняют значения, которые они получили в другом пункте. Последние преобразования показывают, следовательно, что уравнение соконусности п. 25 можно привести к виду (6) настоящего пункта, который отличен от прежнего и в некоторых отношениях проще.

Предыдущая форма выражает геометрическое свойство или соотношение между направлениями, именно три линии β, β', β'', являющиеся соответственными линиями пересечения трех пар плоскостей $(\alpha\alpha', \alpha'''\alpha^{IV})$, $(\alpha'\alpha'', \alpha^{IV}\alpha^{V})$, $(\alpha''\alpha''', \alpha^{V}\alpha)$, лежат в одной общей плоскости, если шесть векторов соконусны (они предполагаются расходящимися из одного начала).

Последнее уравнение выражает *метрическое* свойство или соотношение между такими величинами: отношение, составленное из произведения объемов пирамид $(\alpha\alpha'\alpha'')(\alpha''\alpha'''\alpha^{IV})$ и произведения объемов двух других пирамид $(\alpha\alpha'''\alpha'')(\alpha''\alpha'\alpha^{IV})$, не изменяется, когда вектор α'' (который является общим ребром этих четырех пирамид) заменяют новым общим ребром-вектором, α^{V} – новым, но соконусным вектором; четыре остальных ребра пирамиды $\alpha, \alpha', \alpha''', \alpha^{IV}$ (соконусные и имеющие общее начало) предполагаются не претерпевающими изменений.

Одна формулировка есть выражение свойства мистической гексаграммы Паскаля; другая – выражение постоянства ангармонического отношения Шаля[3]. Исчисле-

---

[3] Хотя предыдущий процесс вычисления (и вообще метод трактовки геометрических проблем с помощью кватернионов, который был распространен автором на задачи динамики и теории теплоты) кажется ему (автору) новым, все-таки, упоминая здесь имя Шаля, трудно удержаться от признания глубокого интеллектуального долга, который чувствует автор за информацию и еще больше – за импульс,

ние кватернионов (или метод скаляров и векторов) дает нам возможность (как мы видим) кратко и символически перейти от одного из этих двух важных и известных свойств конуса второго порядка к другому.

29. Если мы обозначим через α и β два постоянных вектора, а через ρ – переменный вектор, проведенных из общего начала, а также через u и v обозначим два переменных скаляра, зависящих от названных векторов α, β и ρ согласно соотношениям

$$u = 2S.\alpha\rho = \alpha\rho + \rho\alpha, \quad v^2 = -4(V.\beta\rho)^2 = -(\beta\rho - \rho\beta)^2, \tag{1}$$

то мы можем представить центральные поверхности второго порядка уравнениями величайшей простоты.

Эллипсоид второго порядка с тремя неравными осями может быть представлен уравнением

$$u^2 + v^2 = 1. \tag{2}$$

Уравнение одного из цилиндров вращения, описанных около эллипсоида, имеет вид

$$v^2 = 1. \tag{3}$$

Плоскость, в которой лежит эллипс касания, представляется уравнением

$$u = 0, \tag{4}$$

а система двух касательных плоскостей эллипсоида, параллельных плоскости этого эллипса, – уравнением

$$u^2 = 1. \tag{5}$$

Однополостный гиперболоид, касающийся этого же цилиндра по этому же эллипсу, описывается уравнением

$$u^2 - v^2 = -1, \tag{6}$$

его асимптотический конус – уравнением

$$u^2 - v^2 = 0. \tag{7}$$

Двуполостный гиперболоид с тем же асимптотическим конусом (7) и двумя касательными плоскостями (5) представляется таким уравнением:

$$u^2 - v^2 = 1. \tag{8}$$

Заменяя ρ на $\rho - \gamma$, где γ – третий произвольный, но постоянный вектор, мы вводим произвольное начало векторов или произвольное положение центра поверх-

---

данный его мыслям при внимательном чтении интересной и превосходной "Истории геометрической науки", которая так широко известна под ее собственным скромнейшим названием "Aperçu historique" (Brussels, 1837). Автор старался также извлечь выгоду из изучения мемуаров Шаля "О сферических кониках и конусах второго порядка", которые переведены (с примечаниями и приложениями) преподобным Чарлзом Грэйвсом (Дублин, 1841). Автор хочет использовать эту возможность, чтобы вспомнить, какое наслаждение и какую помощь (так же как и ободрение в геометрических изысканиях вообще) он получал при беседах с последним названным джентльменом.

ности, отнесенной к нему как к началу. Общая проблема определения поверхности второго порядка, которая будет проходить через девять заданных точек, может, таким образом, считаться эквивалентной проблеме нахождения трех постоянных векторов α, β, γ, которые для девяти заданных значений переменного вектора ρ будут удовлетворять одному уравнению вида

$$\{\alpha(\rho - \gamma) + (\rho - \gamma)\alpha\}^2 \pm \{\beta(\rho - \gamma) - (\rho - \gamma)\beta\}^2 = \pm 1. \qquad (9)$$

Подходящий выбор двух знаков (и их замена) определяют зависящий от них частный вид поверхности; предполагается, что поверхность имеет центр, пока вычисления не покажут, что в каком-нибудь частном вопросе его нет.

30. Уравнение эллипсоида с тремя неравными осями, отнесенного как к центру к началу координат, можно, таким образом, представить в следующей форме (что было доложено Королевской ирландской академии наук в декабре 1845 г.) [[11]]:

$$(\alpha\rho + \rho\alpha)^2 - (\beta\rho - \rho\beta)^2 = 1. \qquad (1)$$

Выражение раскладывается на два множителя:

$$(\alpha\rho + \rho\alpha + \beta\rho - \rho\beta)(\alpha\rho + \rho\alpha - \beta\rho + \rho\beta) = 1. \qquad (2)$$

Эти два множителя не только отдельно линейны относительно переменного вектора ρ, но являются также сопряженными кватернионами (по п. 20); они имеют поэтому общий тензор, который должен быть равен единице, так что можно переписать уравнение эллипсоида в другом виде

$$\mathrm{T}(\alpha\rho + \rho\alpha + \beta\rho - \rho\beta) = 1, \qquad (3)$$

если использовать (как в п. 19) характеристику T, чтобы обозначить операцию образования тензора кватерниона.

Пусть σ – вспомогательный вектор, связанный с вектором ρ эллипсоида уравнением

$$\sigma = \rho(\alpha - \beta)\rho^{-1}. \qquad (4)$$

Тогда будем иметь согласно (3) и общему закону для тензора произведения

$$\mathrm{T}(\alpha + \beta + \sigma).\mathrm{T}\rho = 1, \qquad (5)$$

а также

$$(\alpha - \beta + \sigma)\rho = (\alpha - \beta)\rho + \rho(\alpha - \beta), \qquad (6)$$

где правая часть есть скаляр. Поэтому, используя характеристику U, чтобы обозначить операцию образования верзора кватерниона (как в том же п. 19), мы будем иметь уравнение

$$\mathrm{U}(\alpha - \beta + \sigma).\mathrm{U}\rho = \mp 1, \qquad (7)$$

и зависимость переменного вектора ρ эллипсоида от вспомогательного вектора σ выражается формулой

$$\rho = \pm \frac{\mathrm{U}(\alpha - \beta + \sigma)}{\mathrm{T}(\alpha + \beta + \sigma)}. \qquad (8)$$

Кроме того, длина этого вспомогательного вектора σ постоянна и равна длине $\alpha - \beta$, так как уравнение (4) дает

$$\mathrm{T}\sigma = \mathrm{T}(\alpha - \beta). \qquad (9)$$

Можно поэтому рассматривать $\alpha - \beta$ как вектор центра C некоторой вспомогательной сферы, поверхность которой проходит через центр эллипсоида – точку A, а вектор $\alpha - \beta + \sigma$ можно рассматривать как переменную вспомогательную ведущую хорду AD указанной ведущей сферы, хорда которой определяет направление радиуса-вектора AE (или ρ) эллипсоида (направление точно такое же или точно противоположное).

В то же время постоянный вектор -2β, проведенный из того же постоянного начала, что и прежде (именно из центра A эллипсоида), будет определять положение некоторой фиксированной точки B, имеющей то замечательное свойство, что ее расстояние от конца D переменной ведущей хорды, проведенной из точки A, равно обратной длине радиуса-вектора ρ или "близости" $(AE)^{-1}$ точки E (на поверхности эллипсоида) до центра (слово "proximity" заимствовано у сэра Джона Гершеля).

Предполагается затем для простоты, что фиксированная точка B является внешней относительно фиксированной сферы (что несущественно уменьшает общность рассмотрений) и, выбирая за единицу длины длину касательной, проведенной к этой сфере из этой точки, можно считать AE и BD' двумя линиями равной длины, или можно написать

$$\overline{AE} = \overline{BD}', \qquad (10)$$

если D' – другая точка пересечения прямой линии BD со сферой.

31. Отсюда следует это очень простое построение эллипсоида[4] (с тремя неравными осями) с помощью сферы и внешней точки. Автор пришел к нему с помощью предыдущего процесса, но построение можно вывести и из более широко известных принципов.

Из фиксированной точки A на поверхности сферы проведена переменная хорда AD; пусть D' – вторая точка пересечения сферической поверхности с секущей BD, проведенной к переменному концу D этой хорды AD из фиксированной внешней точки B. Возьмем радиус-вектор AE равным по длине отрезку BD', а по направлению – или совпадающим с хордой AD, или противоположным ей. Геометрическое место точек E, построенных таким образом, будет эллипсоид, который проходит через точку E.

[4] Это построение уже было опубликовано в "Proceedings of the Royal Irish Academy" за 1846 г. Но я думаю, что его перепечатка здесь может быть полезна для некоторых читателей Лондонского, Эдинбургского и Дублинского "Philosophical Magazine", где периодически (начиная с июльского номера 1844 г.) имела место первая печатная публикация фундаментальных уравнений теории кватернионов ($i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$), хотя эти уравнения были доложены Королевской ирландской академии наук в ноябре 1843 г., а представлены на собрании Совета в течение предыдущего месяца.

32. Мы можем также сказать, что если четырехсторонник ($ABED'$), у которого одна сторона (AB) задана по длине и положению, две диагонали (AE, BD') равны друг другу по длине и пересекаются (в D) на поверхности данной сферы (с центром в точке C), хорда которой (AD') есть сторона четырехсторонника, смежная данной стороне (AB), то другая сторона (BE), смежная той же данной стороне, является хордой данного эллипсоида.

Форма, положение и величина эллипсоида (с тремя неравными осями), таким образом, зависят от формы, положения и величины порождающего треугольника ABC. Две стороны этого треугольника, именно BC и CA, перпендикулярны двум плоскостям кругового сечения; третья сторона AB – перпендикуляр к одной из двух плоскостей круговой проекции эллипсоида, так как она есть ось вращения одного из двух описанных круговых цилиндров. Это троякое отношение к кругу, возможно, является причиной той предельной простоты, с которой будет найдено, что из этого способа построения эллипсоида можно вывести много фундаментальных свойств его.

В качестве такого вывода можно упомянуть известное свойство: разность квадратов обратных полуосей диаметрального сечения пропорциональна произведению синусов углов между плоскостью сечения и двумя плоскостями круговых сечений. Это свойство можно представить в виде пропорции разности квадратов площади прямоугольника, построенного на проекциях двух сторон BC и CA порождающего треугольника на плоскость эллиптического сечения.

33. Ради тех читателей-математиков, которые знакомы с методом координат, а не с методом кватернионов, автор предложит здесь исследование по первому методу того общего свойства эллипсоида, к которому он был подведен последним методом и о котором был дан отчет в недавнем номере "Philosophical Magazine" (июнь, 1847) [[12]].

Пусть x, y, z означают, как обычно, три прямоугольные координаты точки, и введем две действительные функции этих трех координат и шести произвольных, но действительных констант l, m, n, l', m', n'. Эти функции будут обозначены через u, v и будут определены двумя следующими соотношениями:

$$u(ll'+mm'+nn') = l'x + m'y + n'z;$$

$$v^2(ll'+mm'+nn')^2 = (ly-mx)^2 + (mz-ny)^2 + (nx-lz)^2.$$

Тогда полученных принципов достаточно, чтобы показать, что криволинейная поверхность, которая есть геометрическое место точек x, y, z уравнения

$$u^2 + v^2 = 1, \tag{1}$$

является эллипсом с центром в начале координат.

И обратно, это уравнение $u^2 + v^2 = 1$ может представить любой такой эллипсоид при подходящем выборе шести действительных констант l, m, n, l', m', n'.

В то же время уравнение $u^2 = 1$ будет представлять систему двух параллельных

плоскостей, которые касаются эллипсоида в концах диаметра, определенного уравнением $v = 0$. Этот диаметр будет осью вращения некоторого кругового цилиндра, описанного около эллипсоида, именно цилиндра, задаваемого уравнением $v^2 = 1$.

Уравнение плоскости касания, по которому круговой цилиндр огибает эллипсоид, в тех же обозначениях таково: $u = 0$, оно может быть выведено из обычных принципов и согласуется с тем, что отмечалось в п. 29 этой статьи.

34. При таких предпосылках введем затем три новые константы p, q, r (зависящие от шести прежних констант) соотношениями

$$2p = l + l', \quad 2q = m + m', \quad 2r = n + n'.$$

Будем иметь тогда

$$l'x + m'y + n'z = 2(px + qy + rz) - (lx + my + nz),$$

и уравнение эллипсоида (1) станет

$$(ll' + mm' + nn')^2 = (l^2 + m^2 + n^2)(x^2 + y^2 + z^2) - 4(lx + my + nz)(px + qy + rz) +$$
$$+ 4(px + qy + rz)^2 = (x^2 + y^2 + z^2)\{(l - x')^2 + (m - y')^2 + (n - z')^2\},$$

если мы введем три новые переменные x', y', z', зависящие от старых трех переменных x, y, z или, скорее, от их отношений и от трех новых констант p, q, r, согласно условиям

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \frac{2(px + qy + rz)}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Эти три последние уравнения дают (по исключении из отношений x', y', z') соотношение

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 2(px' + qy' + rz').$$

Новые переменные x', y', z' являются поэтому координатами новых точек, геометрическим местом которых является некоторая сферическая поверхность, проходящая через центр эллипсоида; каждая из этих новых точек, очевидно, лежит на радиусе-векторе, проведенном из центра эллипсоида к точке x, y, z или на продолжении радиуса-вектора. Мы видим также, что длина этого радиуса-вектора эллипсоида (или расстояние от точки x, y, z до начала координат) обратно пропорциональна расстоянию новой точки x', y', z' сферической поверхности от точки l, m, n, каковая последняя точка является некоторой фиксированной точкой на поверхности эллипсоида. Этот результат уже дает легкий и элементарный способ построения (generating) последней поверхности, который, однако, может быть сведен к еще более высокой степени простоты следующим продолжением анализа.

35. Далее продолжим прямую линию, соединяющую две точки x', y', z' и l, m, n, (если необходимо) так, чтобы пересечь ту же самую сферическую поверхность в

другой точке x'', y'', z''; мы тогда будем иметь уравнение

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = 2(px'' + qy'' + rz''),$$

из которого можно исключить новые координаты x'', y'', z'', подставив выражения $x'' = l + t(x' - l)$, $y'' = m + t(y' - m)$, $z'' = n + t(z' - n)$. Если затем отбросить корень $t = 1$ получившегося квадратного уравнения для t и принять за второй корень t произведение корней этого квадратного уравнения, мы находим

$$t = \frac{l^2 + m^2 + n^2 - 2(lp + mq + nr)}{(x' - l)^2 + (y' - m)^2 + (z' - n)^2}.$$

Поэтому, согласно последнему пункту,

$$t = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{l^2 + m^2 + n^2 - 2(lp + mq + nr)}.$$

Следовательно,

$$t^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x' - l)^2 + (y' - m)^2 + (z' - n)^2}$$

и, наконец,

$$(x'' - l)^2 + (y'' - m)^2 + (z'' - n)^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{2}$$

Обозначим через A, B, C три фиксированные точки, координаты которых соответственно равны (0, 0, 0), (l, m, n), (p, q, r), а через D, D', E – три переменные точки, координаты которых (x', y', z'), (x'', y'', z''), (x, y, z). Можно считать $ABED'$ плоским четырехугольником, диагонали которого AE и BD' пересекаются в точке D на фиксированной сферической поверхности (которая имеет центр в точке C и проходит через точки A и D). Так что одна сторона $D'A$ четырехсторонника, смежная с фиксированной стороной AB, является хордой этой фиксированной сферы. Уравнение (2) выражает, что сторона BE того же самого плоского четырехсторонника, смежная с фиксированной стороной AB, есть хорда фиксированного эллипсоида, если две диагонали AE, BD' четырехсторонника равны по длине.

Так что общее и характеристическое свойство эллипсоида, достаточное для построения этой поверхности и исследования всех его свойств, заключается в исключительно простой и замечательной геометрической формуле

$$\overline{AE} = \overline{BD'}. \tag{3}$$

Если это условие выполнено, то геометрическое место точек E – эллипсоид, который проходит через точку B и имеет центр в точке A.

Эта формула (3), которая уже была опубликована в "Philosophical Magazine" как

уравнение (10) из п. 30 этой статьи, может быть поэтому выведена, как выше, из принятых вообще принципов с помощью декартова метода координат. Однако (как мог удостовериться автор), по-видимому, она не была известна геометрам до тех пор, пока он не получил ее летом 1846 г. [13] совершенно другим методом, именно применив свое исчисление кватернионов к исследованию одной из новых форм для уравнений центральных поверхностей второго порядка, что было сообщено Королевской ирландской академии наук в декабре 1845 г. [14].

36. Рассмотрим пример *геометрического* использования формулы (3) (на что уже намекалось в п. 32 этой статьи) или выражаемого ею равенства между длинами двух диагоналей некоторого плоского четырехсторонника, связанного с этим новым построением эллипсоида, к которому автор пришел с помощью кватернионов. Предложим теперь исследовать геометрически при помощи этого равенства диагоналей разность квадратов ⟨величин⟩, обратных наибольшему и наименьшему полудиаметрам какого-нибудь плоского диаметрального сечения эллипсоида (с тремя неравными осями). Затем будем думать, что этот эллипсоид и вспомогательная сфера, используемая в приведенном выше построении, пересекаются по плоскости $AB'C'$, точки которой B' и C' являются ортогональными проекциями фиксированных точек B и C. Вспомогательная точка D, таким образом, может мыслиться движущейся по окружности, которая проходит через A и имеет центр в точке C', и так как AE равна по длине BD' (потому что две диагонали четырехсторонника равны по построению), AE должна изменяться обратно пропорционально BD (по элементарному свойству сферы). Мы будем искать разность квадратов крайних значений BD (или $B'D$), поскольку квадрат перпендикуляра BB' есть константа для сечения. Но наидлиннейшая и наикратчайшая прямые линии $B'D_1, B'D_2$, которые можно провести таким образом к вспомогательному кругу (с центром в C') из фиксированной точки B' в плоскости круга, проведены к концам того диаметра $D_1C'D_2$, который проходит через B' (или к точке B'). Так что четыре точки D_1, C', D_2, B' лежат на одной прямой линии и разность квадратов $B'D_1$ и $B'D_2$ равна учетверенной площади прямоугольника, построенного на $B'C'$ и $C'D_1$ или на $B'C'$ и $C'A$.

Мы видим поэтому, что наикратчайший и наидлиннейший полудиаметры AE_1, AE_2 диаметрального сечения эллипсоида перпендикулярны друг другу, потому что (по описанному выше построению) они совпадают по направлениям с двумя дополнительными хордами AD_1, AD_2 сечения вспомогательной сферы, а угол, вписанный в полукруг, есть прямой угол. В то же время мы видим, что эта разность квадратов величин, обратных к этим двум перпендикулярным полуосям диаметрального сечения эллипсоида, изменяется при переходе от одного такого сечения к другому пропорционально площади прямоугольника, построенного на проекциях $B'C'$ и $C'A$ двух фиксированных линий BC и CA на плоскости переменного сечения. Разность квадратов этих обратных полуосей сечения поэтому изменяется (как хорошо известно в самом деле) пропорционально произведению синусов углов между плоскостью сечения и двумя фиксированными диаметральными плоскостями, которые пересекают эллипсоид по окружностям.

Мы видим, что нормали к этим двум последним плоскостям (назовем их цикли-

ческими плоскостями) имеют точно направления сторон BC, CA порождающего треугольника ABC, вершинами которого являются три фиксированные точки, используемые в предшествующем построении; так что вспомогательная проходящая через центр эллипсоида сфера, используемая в этом построении, касается одной из этих двух циклических плоскостей в точке A – центре эллипсоида. Поэтому сфера может быть названа диацентрической.

Если мы берем точку B вне этой сферы, то расстояние BC от этой внешней точки до центра сферы есть (по построению) полусумма наибольшей и наименьшей полуосей эллипсоида, а радиус сферы CA есть полуразность этих же двух полуосей. И по тому же построению эти наибольшая и наименьшая полуоси эллипсоида (или их продолжения) пересекают поверхность той же диацентрической сферы в точках, которые соответственно расположены на самой конечной прямой линии BC или на продолжении этой линии.

Третья сторона AB этого же фиксированного или порождающего треугольника ABC есть полудиаметр эллипсоида, проведенный в направлении от одного из двух описанных цилиндров вращения. Справедливость свойства, упомянутого в п. 32, можно увидеть не только из недавнего анализа, проведенного декартовым методом, но также (и при этом гораздо проще) из геометрических рассмотрений, а именно площадь постоянного прямоугольника, построенного на двух прямых линиях BD и AE, превышает площадь прямоугольника, построенного на фиксированной линии AB и перпендикуляре, опущенном на нее из переменной точки E эллипсоида, за исключением предельных точек, где угол ADB прямой. Это последнее условие определяет круговое место точек D и эллиптическое место точек E, именно эллипс, по которому цилиндр вращения (вокруг AB) касается эллипсоида и который здесь представляет собой сечение цилиндра плоскостью. Радиус этого цилиндра равен линии BG, если точка G – точка пересечения (отличная от A) стороны AB порождающего треугольника с поверхностью диацентрической сферы. Линия BG (что легко показать из геометрических принципов – как следствие того же построения) равна радиусу двух круговых сечений или средней полуоси эллипсоида (которая перпендикулярна наибольшей и наименьшей полуосям).

Отсюда также следует, что длина AB порождающего треугольника есть четвертая пропорциональная к трем полуосям, т.е. средней, наибольшей и наименьшей (или к средней, наименьшей и наибольшей) из трех главных и взаимно перпендикулярных полуосей эллипсоида.

37. Продолжим исследование кватернионной формы уравнения эллипсоида

$$(\alpha\rho + \rho\alpha)^2 - (\beta\rho - \rho\beta)^2 = 1 \tag{1}$$

и положим

$$\alpha + \beta = \frac{\iota}{\iota^2 - \kappa^2}, \qquad \alpha - \beta = \frac{\kappa}{\iota^2 - \kappa^2} \tag{2}$$

и

$$\frac{\iota\rho+\rho\kappa}{\iota^2-\kappa^2}=Q, \quad \frac{\rho\iota+\kappa\rho}{\iota^2-\kappa^2}=Q'. \quad (3)$$

Тогда два линейных сомножителя в левой части уравнения (1) превратятся в два сопряженных кватерниона Q и Q′, так что само уравнение становится таким:

$$QQ'=1. \quad (4)$$

Но согласно п. 19 и 20 произведение двух любых сопряженных кватернионов равно квадрату их общего тензора; этот общий тензор двух кватернионов Q и Q′ равен поэтому единице. Используя, следовательно, как и в тех пунктах, T в качестве характеристики операции образования тензора кватерниона, сведем уравнение эллипсоида к форме

$$TQ=1, \quad (5)$$

или, подставляя вместо Q его выражение (3), к уравнению

$$T\left(\frac{\iota\rho+\rho\kappa}{\iota^2-\kappa^2}\right)=1. \quad (6)$$

Эта последняя форма может быть получена из уравнения (3) п. 30 подстановкой (2), именно из следующего уравнения [[15]]:

$$T(\alpha\rho+\rho\alpha+\beta\rho-\rho\beta)=1. \quad (7)$$

38. В геометрическом построении или порождении эллипсоида, которое было описано в предыдущих пунктах этой статьи (см. п. 31–36), значения некоторых символов были следующими. Два постоянных вектора ι и κ могут считаться означающими соответственно (по длинам и по направлениям) две стороны производящего треугольника *ABC*, которые образованы так: они проведены из центра *C* вспомогательной диацентрической сферы в точку *B* (фиксированную внешнюю относительно эллипсоида) и в точку *A* (центр этого же эллипсоида). Третья сторона треугольника (или вектор из *A* в *B*) будет здесь обозначена поэтому (по длине и направлению) через $\iota-\kappa$, а ρ есть радиус-вектор точки эллипсоида, проведенный из центра *A* к переменной точке *E* поверхности, так что (по построению) постоянный вектор $\iota-\kappa$ есть частное значение этого переменного вектора ρ.

Вектор из *A* к *C*, будучи противоположным вектору из *C* в *A*, обозначается через $-\kappa$. Пусть *D* – та же самая вспомогательная точка на поверхности вспомогательной сферы, которая была обозначена этой же самой буквой в уже опубликованном отчете о построении. Тогда вектор из *C* в *D* можно рассматривать как отражение вектора $-\kappa$ относительно ρ (в смысле, который подробнее будет рассмотрен позднее); он равен $-\rho\kappa\rho^{-1}$. И следовательно, вектор из *D* в *B* есть $\iota+\rho\kappa\rho^{-1}$. Длины двух прямых линий *BD* и *AE* поэтому обозначены соответственно через два тензора $T(\iota+\rho\kappa\rho^{-1})$ и $T\rho$; площадь прямоугольника, построенного на этих двух линиях, представлена произведением этих двух тензоров, которое равно тензору произведения, или $T(\iota\rho+\rho\kappa)$. Но по основному равенству длин диагоналей *AE*, *BD′* плоского четырехсторонника *ABED′*, фигурирующего в построении, этот прямоугольник (построенный на *BD* и *AE*) равен постоянному прямоугольнику (построенному на *BD*

и BD'), т.е. на всей секущей и на ее внешней части. Тогда его площадь равна также и квадрату касательной, проведенной из точки B, если предполагается, что точка B – внешняя к вспомогательной сфере, которая имеет центр в C и проходит через D, D' и A. Таким образом, $\mathrm{T}(\iota\rho + \rho\kappa)$ равен $(\mathrm{T}\iota)^2 - (\mathrm{T}\kappa)^2$ или $\kappa^2 - \iota^2$, разность которых является здесь положительным скаляром, потому что предполагается, что CB длиннее, чем CA, или что

$$\mathrm{T}\iota > \mathrm{T}\kappa. \tag{8}$$

И кватернионное уравнение эллипсоида получается снова как результат геометрического построения в слегка упрощенном виде

$$\mathrm{T}(\iota\rho + \rho\kappa) = \kappa^2 - \iota^2. \tag{9}$$

Чтобы проверить, что это уравнение относительно ρ удовлетворяется (а мы видим, что это должно иметь место) при частном значении

$$\rho = \iota - \kappa, \tag{10}$$

что соответствует частному положению (B) точки E на поверхности эллипсоида, мы должны только заметить, что справедливо тождество

$$\iota(\iota - \kappa) + (\iota - \kappa)\kappa = \iota^2 - \iota\kappa + \iota\kappa - \kappa^2 = \iota^2 - \kappa^2 = -(\kappa^2 - \iota^2)$$

и что (по п. 19) тензор отрицательного скаляра равен положительному скаляру, противоположному исходному [16].

39. Предыдущий пункт дает достаточно простой процесс для перевода геометрического построения[5] эллипсоида, описанного в п. 31, на язык исчисления кватернионов, на котором само построение было первоначально произведено способом, изложенным в п. 30 этой статьи. Все-таки читателям, незнакомым с этим исчислением, может не показаться очевидным, почему в предыдущем пункте (п. 38) за радиус вспомогательной сферы, проведенной из C в D (по длине и направлению), было взято выражение $-\rho\kappa\rho^{-1}$; также непонятно, в каком смысле и по какой причине сказано, что это выражение $-\rho\kappa\rho^{-1}$ представляет отражение вектора $-\kappa$ относительно ρ. Совершенно ясный ответ на каждый из этих вопросов (или различные оправдания каждого из этих предположений или утверждений) может быть не только полезным в связи с настоящим способом рассмотрения эллипсоида, но также может пролить свет на другие приложения кватернионов к исследованию геометрических и физических проблем. Не надо думать об этом отступлении, как о не относящемся к делу, важно вникнуть в некоторые детали относительно этого выра-

---

[5] Возможно, краткость и новизна этого правила для построения этой важной поверхности могут оправдать его перепечатку здесь. Построение состояло в следующем: из фиксированной точки A на поверхности сферы проводится переменная хорда AD. Пусть D' – вторая точка пересечения сферической поверхности с секущей BD, проведенной из фиксированной точки B к переменному концу D хорды AD. Возьмем радиус-вектор AE, равный по длине BD' и по направлению совпадающий с хордой AD или противоположный ей. Геометрическое место точек E, построенных таким образом, будет эллипсоид, который будет проходить через точку B и иметь центр в точке A.

жения $-\rho\kappa\rho^{-1}$ и относительно пути, подобного предыдущему, которым это выражение может быть представлено в вычислениях.

Поэтому обозначим через σ вектор из C и D (каким бы он ни был); здесь C означает центр сферы. Поставим целью найти выражение для этого искомого вектора σ как функцию ρ и κ с помощью принципов исчисления кватернионов [17].

40. Для этого мы имеем, во-первых, уравнение между тензорами

$$T\sigma = T\kappa, \tag{11}$$

которое выражает, что два вектора σ и κ имеют равную длину, будучи оба радиусами одной общей вспомогательной сферы, именно сферы, проведенной из центра C через точки D и A. Во-вторых, мы имеем уравнение

$$V.(\sigma - \kappa)\rho = 0, \tag{12}$$

где V – характеристика операции образования вектора кватерниона. Уравнение выражает немедленно, что произведение двух векторов $\sigma - \kappa$ и ρ есть скаляр и, следовательно, что эти два вектора-сомножителя по направлению или одинаковы, или точно противоположны, так как иначе их произведение было бы кватернионом, имеющим векторную часть, хотя скалярная часть этого кватерниона-произведения $(\sigma - \kappa)\rho$ могла бы обращаться в нуль именно для сомножителей, перпендикулярных друг другу.

Таково непосредственное и общее значение уравнения (12); оправдание наших выводов в настоящем вопросе получено из соображений, что радидус-вектор ρ, проведенный из центра A к точке E поверхности эллипсоида, имеет по построению направление либо такое же, как направление ведущей хорды AD вспомогательной сферы, либо точно противоположное (хорда проведена из конца радиуса, обозначенного через κ, к концу радиуса, обозначенного через σ).

В самом деле, хорду, проведенную так, обозначают символом $\sigma - \kappa$ (характеризуя ее длину и направление), что следует из правил сложения и вычитания направленных линий. Действительно, эти правила – сущность, а не странность геометрических приложений кватернионов. Они появились различными путями в нескольких независимых исследованиях, прежде чем были придуманы кватернионы (как произведения или частные прямых линий в пространстве) и прежде чем они получили широкое распространение.

41. Два уравнения (11) и (12), очевидно, удовлетворяются, если предположить $\sigma = \kappa$; но так как точка D, вообще говоря, отлична от A, мы должны попытаться найти другое значение вектора σ, отличное от κ, которое бы удовлетворяло этим же двум уравнениям. Такое выражение для этого искомого вектора σ может быть найдено сразу же, поскольку это относится к уравнению (12). Заметим, что в силу этого последнего уравнения $\sigma - \kappa$ должен иметь некоторое скалярное отношение к ρ или должен равняться этому вектору ρ, умноженному на некоторый скалярный коэффициент x, так что мы можем написать

$$\sigma = \kappa + x\rho. \tag{13}$$

Затем, подставляя это выражение для σ в уравнение (11), мы находим, что x должен удовлетворять условию

$$\mathrm{T}(\kappa + x\rho) = \mathrm{T}\kappa, \tag{14}$$

где предполагается, что искомый коэффициент x отличен от нуля, т.е. другими словами, это некоторое положительное или отрицательное число.

Возводя обе части этого последнего уравнения в квадрат и замечая, что согласно п. 19 квадрат тензора равен квадрату этого вектора, умноженному на –1, мы находим новое уравнение

$$-(\kappa + x\rho)^2 = -\kappa^2. \tag{15}$$

Но вообще если κ и ρ – векторы, а x – скаляр, то справедливо

$$(\kappa + x\rho)^2 = \kappa^2 + x(\kappa\rho + \rho\kappa) + x^2\rho^2;$$

поэтому, прибавляя κ^2 к обеим частям уравнения (15), деля на $-x$ и исключая x с помощью (13), которое позволяет перейти от $\kappa\rho + x\rho^2$ к $\sigma\rho$, мы найдем уравнение

$$\sigma\rho + \rho\kappa = 0 \tag{16}$$

и, наконец,

$$\sigma = -\rho\kappa\rho^{-1}. \tag{17}$$

Так что результат этого анализа представляет собой уже определенное выражение для вектора из точки C в D. На самом деле тензор этого выражения (17) равен Tκ согласно общему правилу для тензора произведения или потому, что

$$(-\rho\kappa\rho^{-1})^2 = \rho\kappa\rho^{-1}\rho\kappa\rho^{-1} = \rho\kappa^2\rho^{-1} = \kappa^2,$$

так как κ^2 – это (отрицательный) скаляр, а произведение $(\sigma - \kappa)\rho$, будучи равно $-(\kappa\rho + \rho\kappa)$, согласно п. 20 равно выражению скалярного вида.

42. Обратно, если мы встречаемся с выражением $-\rho\kappa\rho^{-1}$ (в любом исследовании, производимом на основании изложенных принципов), мы можем думать, что оно означает вектор, квадрат которого равен квадрату κ (как это только что показано), а также что если из этого вектора вычесть κ, то оставшееся выражение дает $x\rho$ (т.е. дает скаляр, умноженный на ρ). Так что если мы обозначаем это выражение через σ или принимаем уравнение (17), то тогда будут удовлетворяться и уравнения (11) и (12) и вектор σ будет иметь ту же длину, что и κ, а направления σ – κ и ρ будут либо точно одинаковы, либо точно противоположны друг другу.

Следовательно, мы можем прийти к тому, чтобы считать два векторных символа σ и κ означающими два радиуса одной общей сферы (по длине и направлению); сфера такова, что линия-хорда σ – κ, связывающая их концы, имеет направление линии ρ или линии, обратной ρ.

Отсюда также с помощью элементарного свойства плоского равнобедренного треугольника мы можем видеть, что при том же самом условии угол между σ и ρ равен углу между κ и –ρ (или – κ и ρ) и что эти углы таковы, что биссектриса внешнего вертикального угла треугольника или биссектриса центрального угла между двумя радиусами сферы σ и –κ является некоторым новым радиусом,

параллельным ρ, так как этот вектор параллелен основанию треугольника ACD или только что упоминавшейся нами хорде AD.

Будем считать, что диаметр сферы параллелен этой хорде или ρ и что $-\kappa$ означает обращенный радиус, который совпадает по положению с радиусом κ, но проведен от точки поверхности к центру (т.е. в недавнем построении – от A к C). Примем, что вектор σ, как и прежде, проведен из центра к поверхности (от C к D). Тогда можно прийти к выводу, что σ или $-\rho\kappa\rho^{-1}$ есть отражение $-\kappa$ относительно диаметра, параллельного ρ, или просто относительно самого ρ, как это было отмечено в п. 38. В самом деле, в этих вычислениях предполагается, что векторные символы ρ, σ и т.д. указывают длины и направления, но не положения прямых линий, для обозначения которых они использованы.

43. Можно получить ту же самую геометрическую интерпретацию символа $-\rho\kappa\rho^{-1}$ несколькими другими путями, из которых мы изложим подробнее следующий. Какими бы ни были длины и направления двух прямых линий, обозначенных через ρ и κ, мы всегда можем мыслить, что последняя линия (рассматриваемая как вектор) разложена (или может быть разложена) на два частичных или составляющих вектора κ' и κ'', один из которых параллелен, а другой перпендикулярен вектору ρ. Так что они удовлетворяют соответственно уравнениям параллельности и перпендикулярности (см. п. 21), и мы имеем, следовательно,

$$\kappa = \kappa' + \kappa'', \quad V.\kappa'\rho = 0, \quad S.\kappa''\rho = 0, \tag{18}$$

где S – характеристика операции выделения скаляра кватерниона. Уравнение параллельности дает $\rho\kappa' = \kappa'\rho$, а уравнение перпендикулярности дает $\rho\kappa'' = -\kappa''\rho$. Отсюда предполагаемое выражение $-\rho\kappa\rho^{-1}$ само раскладывается на две части:

$$-\rho\kappa'\rho^{-1} = -\kappa'\rho\rho^{-1} = -\kappa', \quad -\rho\kappa''\rho^{-1} = +\kappa''\rho\rho^{-1} = +\kappa''. \tag{19}$$

Итак, в целом мы имеем

$$-\rho\kappa\rho^{-1} = -\rho(\kappa' + \kappa'')\rho^{-1} = -\kappa' + \kappa''. \tag{20}$$

Часть $-\kappa'$ этого последнего выражения (которая параллельна вектору ρ) является той же самой, что и соответствующая часть $-\kappa$; но часть $+\kappa''$ (перпендикулярная ρ) такова же, как соответствующая часть $+\kappa$ или противоположна соответствующей части $-\kappa$. Мы можем поэтому и этим процессом прийти к выводу, что выражение (17) означает отражение вектора $-\kappa$ относительно вектора ρ, и мы видим, что направление вектора ρ (или направление $-\rho$) является точно направлением биссектрисы между $-\kappa$ и $-\rho\kappa\rho^{-1}$ (или между направлениями κ и $\rho\kappa\rho^{-1}$).

44. Уравнение эллипсоида (9) из п. 38 или уравнение (4) из п. 37 можно полнее записать так:

$$(\iota\rho + \rho\kappa)(\rho\iota + \kappa\rho) = (\kappa^2 - \iota^2)^2. \tag{21}$$

Чтобы выразить, что мы предлагаем пересечь эту поверхность какой-нибудь диаметральной плоскостью, мы можем написать уравнение

$$\tilde{\omega}\rho + \rho\tilde{\omega} = 0, \tag{22}$$

где $\tilde{\omega}$ означает вектор, которому перпендикулярна секущая плоскость. Таким образом, если, в частности, мы заменяем $\tilde{\omega}$ на κ, мы находим для соответствующей плоскости, проходящей через центр, уравнение

$$\kappa\rho + \rho\kappa = 0. \qquad (23)$$

Комбинируя его с уравнением (21), получаем

$$(\kappa^2 - \iota^2)^2 = (\iota - \kappa)\, \rho \cdot \rho\, (\iota - \kappa) = (\iota - \kappa)\, \rho^2(\iota - \kappa) = (\iota - \kappa)^2\rho^2,$$

т.е.

$$\rho^2 = \left(\frac{\kappa^2 - \iota^2}{\iota - \kappa}\right)^2. \qquad (24)$$

Но это уравнение сферы, концентрической с эллипсоидом, поэтому диаметральная плоскость (23) пересекает эллипсоид по *кругу*, или сама плоскость является *циклической плоскостью*. Мы видим также, что вектор κ (как перпендикулярный этой плоскости (23)) есть одна из циклических нормалей или нормаль к плоскости кругового сечения, что согласуется с построением, так как мы видели (в п. 36), что вспомогательная или диацентрическая сфера с центром *C* касается одной циклической плоскости в центре *A* эллипсоида. То же самое построение показывает, что другая циклическая плоскость должна бы быть перпендикулярной вектору ι, и соответственно эту вторую циклическую плоскость представляет уравнение

$$\iota\rho + \rho\iota = 0. \qquad (25)$$

Ибо когда мы рассматриваем уравнение (25) совместно с уравнением (21) эллипсоида, то приходим к уравнению

$$(\kappa^2 - \iota^2)^2 = \rho(\kappa - \iota) \cdot (\kappa - \iota)\, \rho = \rho(\kappa - \iota)^2\rho = (\kappa - \iota)^2\rho^2,$$

а поэтому и к тому же самому уравнению (24) концентрической сферы, что и раньше.

Мы видим, что на этой сфере (24) лежит кривая пересечения эллипсоида (21) с плоскостью (25), а также кривая пересечения эллипсоида с плоскостью (23). Если мы используем форму (9), мы замечаем, что изменяем ли мы $\rho\kappa$ на $-\kappa\rho$ или $\iota\rho$ на $-\rho\iota$, мы приходим в каждом случае к следующему выражению для длины радиуса-вектора эллипсоида, которое согласуется с уравнением (24):

$$\mathrm{T}\rho = \frac{\kappa^2 - \iota^2}{\mathrm{T}(\iota - \kappa)}. \qquad (26)$$

С помощью легких вычислений с кватернионами или с более геометричной аргументацией (на что отчасти был намек в п. 36), так как $\kappa^2 - \iota^2$ означает квадрат касательной, проведенной к вспомогательной сфере из внешней точки *B*, а $\mathrm{T}(\iota-\kappa)$ означает длину стороны *AB* производящего треугольника, мы видим, что общий радиус двух диаметральных круговых сечений эллипсоида равен прямой линии, оканчивающейся на поверхности вспомогательной сферы (ранее эта линия обозначалась *BG* и имела направление *BA*); так что эти две линии *BA* и *BG* связаны с этой сферой и друг с другом, как вся секущая и внешняя часть (в таком или противоположном порядке).

В самом деле, так как точка D в нашем построении приближается по какому-нибудь направлению к точке A на поверхности вспомогательной сферы, то точка D' приближается к точке G, а BD' и также AE стремятся стать равными по длине BG. Направление AE (будучи тем же, что и направление AD, или противоположным ему) стремится стать касательным к сфере, или ортогональным к AC. Линия BG поэтому равна радиусу этого диаметрального и кругового сечения эллипсоида, которое образовано плоскостью, касающейся вспомогательной сферы в точке A. Кроме того, если мы представим точку D' вращающейся на поверхности сферы от G снова к G (в плоскости, перпендикулярной BC), то линии AD и AE будут одновременно вращаться в другой плоскости, параллельной только что упомянутой и также перпендикулярной BC, а длина AE будет оставаться равной длине той же постоянной линии BG, что и прежде (эта линия поэтому равна общему радиусу диаметральных круговых сечений эллипсоида независимо от того, определяется он геометрическим построением, предлагаемым исчислением кватернионов, или непосредственно – с помощью этого самого исчисления).

45. Мы можем написать уравнение эллипсоида (21) так:

$$f(\rho) = 1, \tag{27}$$

если ввести скалярную функцию f переменного вектора ρ, определяемую следующим образом:

$$(\kappa^2 - \iota^2)^2 f(\rho) = (\iota\rho + \rho\kappa)(\rho\iota + \kappa\rho) = \iota\rho^2\iota + \iota\rho\kappa\rho + \rho\kappa\rho\iota + \rho\kappa^2\rho,$$

или в силу п. 20

$$(\kappa^2 - \iota^2)^2 f(\rho) = (\iota^2 + \kappa^2)\,\rho^2 + 2S.\,\iota\rho\kappa\rho. \tag{28}$$

Пусть $\rho + \tau$ обозначает другой вектор, проведенный из центра сферы к точке поверхности эллипсоида. Будем иметь аналогично

$$f(\rho + \tau) = 1, \tag{29}$$

где

$$f(\rho + \tau) = f(\rho) + 2S.\,\nu\tau + f(\tau). \tag{30}$$

Здесь введен новый векторный символ ν, определяемый уравнением

$$(\kappa^2 - \iota^2)^2 \nu = (\iota^2 + \kappa^2)\,\rho + \iota\rho\kappa + \kappa\rho\iota. \tag{31}$$

Уравнения справедливы, потому что, вообще говоря, для любых двух векторов ρ и τ имеет место

$$(\rho + \tau)^2 = \rho^2 + 2S.\,\rho\tau + \tau^2 \tag{32}$$

и для любых четырех векторов ι, κ, ρ, τ

$$S.\,\iota\tau\kappa\rho = S.\,\tau\kappa\rho\iota = S.\,\kappa\rho\iota\tau = S.\,\rho\iota\tau\kappa. \tag{33}$$

Это последнее правило (относительно определенной перестановки векторных символов как сомножителей под знаком S.), будучи скомбинировано с уравнениями (27), (28) и (31), доказывает, что мы имеем такое простое соотношение

$$S.\,\nu\rho = 1. \qquad (34)$$

Вычитая (27) из (29), принимая во внимание (30), а также заменяя τ на $T.\tau\,.\,U\tau$ и разделив на $T\tau$, мы находим

$$\frac{f(\rho+t)-f(\rho)}{T\tau} = 2S.\nu U\tau + T\tau\cdot f(U\tau) = 0. \qquad (35)$$

Здесь U, как и в п. 19, – характеристика операции образования верзора кватерниона (или вектора).

Это строгое уравнение, связывающее длину или тензор $T\tau$ какой-нибудь хорды τ эллипсоида (проведенной из конца полудиаметра ρ) с направлением этой хорды τ или с верзором $U\tau$. Поэтому это уравнение является только новой формой уравнения самого эллипсоида с началом векторов, перенесенным из центра в точку на поверхности. Если мы теперь представим хорду τ уменьшающейся по длине, то член $T\tau.f(U\tau)$ правой части уравнения (35) стремится к нулю из-за множителя $T\tau$. И поэтому другой член $2S.\nu U\tau$ той же части уравнения должен стремиться к тому же пределу (к нулю). Этим путем мы легко приходим к уравнению, выражающему основной закон направлений исчезающе малых хорд эллипсоида, проведенных в конце любого данного или воображаемого полудиаметра ρ. Этот закон выражается уравнением $2S.\nu U\tau = 0$, или просто

$$S.\,\nu\tau = 0, \qquad (36)$$

если τ – касательный вектор. Вектор ν поэтому перпендикулярен ко всем таким касательным или инфинитезимальным хордам эллипсоида в конце полудиаметра ρ; и, следовательно, он имеет направление нормали к этой поверхности в конце этого полудиаметра. Касательная плоскость этой поверхности в этой точке выражается уравнением (34), если рассматривать в нем нормальный вектор ν как константу, а символ ρ (в этом же уравнении (34)) как означающий переменный вектор, проведенный из центра эллипсоида в любую точку этой касательной плоскости. Это уравнение касательной плоскости (34) может быть записано следующим образом:

$$S.\,\nu(\rho - \nu^{-1}) = 0. \qquad (37)$$

В этой форме легко видеть, что символ ν^{-1} представляет (по длине и направлению) перпендикуляр, опущенный из начала векторов ρ (т.е. из центра эллипсоида) на плоскость, которая представлена уравнением (34) или (37); так что сам вектор ν, как определяемый уравнением (31), может быть назван вектором близости[6] до центра от касательной плоскости эллипсоида или элемента этой поверхности в конце того полудиаметра ρ, для которого выведен ν.

---

[6] Это название (vector of proximity) подсказано автору фразеологией сэра Джона Гершеля. Уравнение (31) из п. 45, которое определяет этот вектор для эллипсоида, было одним из немногих уравнений, которое предполагалось доложить Британской ассоциации на ее собрании в 1846 г., однако в силу случайных обстоятельств доклад не состоялся.

46. Представим теперь, что в конце инфинитезимальной хорды $d\rho$ или τ мы провели другую нормаль к эллипсоиду. Выражение для какой-нибудь произвольной точки первой нормали, т.е. символ для вектора этой точки, проведенного из центра к точке эллипсоида (или из начала векторов ρ), имеет вид $\rho + n\nu$, где n – произвольный скаляр. Подобным образом соответствующее выражение для произвольной точки второй бесконечно близкой нормали (или для ее вектора из того же центра эллипсоида) есть

$$\rho + d\rho + (n + dn)\,(\nu + d\nu),$$

где dn – произвольный бесконечно малый скаляр, а $d\nu$ – дифференциал вектора близости ν, который можно найти как функцию дифференциала $d\rho$ с помощью дифференцирования уравнения (31), связывающего сами векторы ν и ρ. Таким образом, мы найдем из (31)

$$(\kappa^2 - \iota^2)^2 d\nu = (\iota^2 + \kappa^2)\, d\rho + \iota d\rho\kappa + \kappa\, d\rho\iota. \qquad (38)$$

Условие для пересечения двух близких нормалей или для существования точки, общей им обеим, выражается формулой

$$\rho + d\rho + (n + dn)(\nu + d\nu) = \rho + n\nu, \qquad (39)$$

которая может быть записана короче как

$$d\rho + d.n\nu = 0 \qquad (40)$$

или так:

$$d\rho + nd\nu + dn\nu = 0. \qquad (41)$$

Мы можем исключить два скалярных коэффициента n и dn из этого последнего уравнения согласно правилам исчисления кватернионов с помощью действия характеристики $S.\,\nu d\nu$, так как вообще

$$S.\,\nu\mu^2 = 0,\quad S.\,\nu\mu\nu = 0,$$

какими бы ни были векторы μ и ν. Так что здесь

$$S.\,\nu d\nu n d\nu = 0,\quad S.\,\nu d\nu dn\nu = 0.$$

Таким способом мы находим из (41) следующую очень простую формулу:

$$S.\,\nu d\nu d\rho = 0, \qquad (42)$$

которая, как легко видеть, справедлива как кватернионная форма дифференциального уравнения линий кривизны на кривой поверхности вообще; если ν – вектор близости поверхностного элемента искривленной поверхности до начала векторов ρ, этот вектор ν определяется общим условием

$$S.\,\nu d\rho = 0, \qquad (43)$$

взятым вместе с уравнением (34):

$$S.\,\nu\rho = 1,$$

или просто удовлетворяющий одному условию (43), если ν – нормальный вектор.

Подставляя поэтому в случае эллипсоида выражение для $d\nu$, данное условием (38), и замечая, что S. $\nu d\rho^2 = 0$, находим, что можно написать уравнение линий кривизны для этой конкретной поверхности в следующем виде:

$$\text{S.}\ \nu(\iota d\rho\kappa + \kappa d\rho\iota)\, d\rho = 0. \tag{44}$$

Это уравнение, используемое по правилам настоящего исчисления, поддается символическим преобразованиям его многими путями, а также с незначительными трудностями может быть переведено на язык геометрических формулировок.

47. Таким образом, если мы замечаем согласно п. 20, что $\iota\tau\kappa - \kappa\tau\iota$ есть скалярная форма, какие бы три вектора ни были обозначены через ι, κ, τ, и если мы обращаемся к уравнению (43), которое выражает, что нормаль ν перпендикулярна линейному элементу (или инфинитезимальной хорде $d\rho$), мы понимаем, что для каждого направления этого элемента будет справедливо следующее уравнение:

$$\text{S.}\ \nu(\iota d\rho\kappa - \kappa d\rho\iota)\, d\rho = 0. \tag{45}$$

Поэтому для тех особых направлений, которые имеют линии кривизны, мы имеем с учетом (44) следующее упрощенное уравнение:

$$\text{S.}\ \nu\iota d\rho\kappa d\rho = 0, \tag{46}$$

которое можно еще немного сократить, написав вместо $d\rho$ символ τ вектора касательной, введенный уже в (36). Отсюда получаем формулу

$$\text{S.}\ \nu\iota\tau\kappa\tau = 0. \tag{47}$$

Мы можем также заметить, что, согласно тому же п. 20, $\iota\tau\kappa + \kappa\tau\iota$ (а потому и $\iota d\rho\kappa + \kappa d\rho\iota$) есть векторная форма и что, согласно п. 26, три вектора-сомножителя под знаком характеристики S. можно переставлять любым способом, причем самое большее, что может измениться, – это знак результата, из чего должно бы последовать рассуждением, точно аналогичным предшествующему, что уравнение (14) для линий кривизны на эллипсоиде может быть записано таким образом:

$$\text{S.}\ \nu d\rho\iota d\rho\kappa = 0, \tag{48}$$

или, подставляя вместо линейного элемента $d\rho$ касательный вектор τ:

$$\text{S.}\ \nu\tau\iota\tau\kappa = 0, \tag{49}$$

или, наконец, согласно правилам того же п. 20

$$\nu\tau\iota\tau\kappa - \kappa\tau\iota\tau\nu = 0. \tag{50}$$

48. Уравнение, записанное в этой последней форме, было одним из немногих уравнений, отобранных в сентябре 1846 г. для доклада математической секции Британской ассоциации в Саутгемптоне. Однако случилось так, что статья, содержащая это уравнение, не выполнила своего предназначения в то время.

Уравнения, занумерованные здесь (49) и (50), были, однако, опубликованы до истечения года, в котором было проведено это собрание, как резюме сообщения, сделанного Королевской ирландской академией наук летом этого года. Довольно

описательный характер настоящей серии сообщений о кватернионах и желание автора представить эту теорию до некоторой степени завершенной или, по крайней мере, понятной тем читателям-математикам журнала "Philosophical Magazine", которые распространят свое расположение настолько, чтобы потратить свое внимание в той степени, какую потребуют новизна понятий и метода, вынуждают автора повторять иногда обширные рассуждения. Нежелание отсылать таких читателей к другим публикациям автора также побуждает его повторять здесь несколько других уравнений из той краткой и до сих пор неопубликованной саутгемптонской статьи и присоединять к ним другие формулы, которые можно найти в уже названных "Proceedings", так же как и более пространные формулы (новые, как полагает автор).

49. В статье, на которую он ссылался выше, автор дает уравнение эллипсоида (21) из п. 44

$$(\iota\rho + \rho\kappa)\,(\rho\iota + \kappa\rho) = (\kappa^2 - \iota^2)^2,$$

выражение для вектора близости поверхности к ее центру (31) из п. 45 (выведенное из уравнения эллипсоида)

$$(\kappa^2 - \iota^2)^2\nu = (\iota^2 + \kappa^2)\,\rho + \iota\rho\kappa + \kappa\rho\iota,$$

уравнение линий кривизны эллипсоида (50) из п. 47

$$\nu\tau\iota\tau\kappa\; - \;\kappa\tau\iota\tau\nu\; = 0$$

и уравнение

$$\nu\tau + \tau\nu = 0,$$

которое является другой формой соотношения S. $\nu\tau = 0$, т.е. уравнения (36) из п. 45 настоящей серии сообщений.

Кроме этих уравнений, там приведено следующее символическое преобразование для хорошо известной характеристики операции:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d}{dz}\right)^2,$$

которое (как кажется) открывает широкое и новое поле аналитических научных исследований, связанных с очень важным и трудным отделом математического изучения природы.

КВАТЕРНИОН, *рассматриваемый символически*, является (согласно взгляду, первоначально предложенному автором в 1843 г.) алгебраической четырехчленной формой $w + ix + jy + kz$, где w, x, y, z – четыре действительных числа (положительных, отрицательных или нуль), а i, j, k – три координатные мнимые единицы, подчиняющиеся фундаментальным законам комбинаций (см. п. 2):

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\;\; ij = k,\;\; jk = i,\;\; ki = j,\;\; ji = -k,\;\; kj = -i,\;\; ik = -j. \qquad (1)$$

Введем новую характеристику операции $\lhd$, определенную соотношением, содержащим эти три символа i, j, k и хорошо известные операции частных произ-

водных по трем независимым действительным переменным x, y, z, следующим образом:

$$\triangleleft = i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz}. \tag{2}$$

Из определений, или законов символических комбинаций (1), следует, что эта новая характеристика $\triangleleft$ будет иметь отрицательный символический квадрат, выраженный следующей формулой:

$$-\triangleleft^2 = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d}{dz}\right)^2. \tag{3}$$

Ясно, что ее приложения к аналитической физике должны быть в высшей степени широкими. В статье[7], предназначенной для Саутгемптона, было отмечено в качестве иллюстрации, что этот результат позволяет нам привести известное теплофизическое уравнение

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} + a\frac{dv}{dt} = 0$$

к новой символической форме

$$\left(\triangleleft^2 - a\frac{d}{dt}\right)v = 0. \tag{4}$$

Здесь $\triangleleft v$ означает (по величине и направлению) поток тепла в момент t в точке x, y, z.

50. В "Proceedings of the Royal Irish Academy" за июль 1846 г. можно найти указание, что эта новая характеристика $\triangleleft$ дает и другое общее преобразование, возможно не менее замечательное, которое представляется в виде кватерниона

$$\triangleleft(it + ju + kv) = -\left(\frac{dt}{dx} + \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dz}\right) +$$

$$i\left(\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dz}\right) + j\left(\frac{dt}{dz} - \frac{dv}{dx}\right) + k\left(\frac{du}{dx} - \frac{dt}{dy}\right). \tag{5}$$

В самом деле, уравнения (1) дают, вообще говоря (см. п. 21 настоящей статьи),

$$(ix + jy + kz)(it + ju + kv) = -(xt + yu + zv) + i(yv - zu) + j(zt - xv) + k(xu - yt), \tag{6}$$

если x, y, z, t, u, v означают любые шесть действительных чисел. Вычисления, с помощью которых это доказано, показывают еще более общим образом, что это

[7] В самой этой статье характеристика была написана как ∇; но этот знак столь часто используется в других смыслах, что кажется желательным воздержаться от присвоения ему еще одного, предложенного здесь.

же преобразование справедливо, если каждый из трех символов i, j, k (подчиняющихся уравнениям (1)) коммутативен in arrengement как символический сомножитель с тремя другими символами x, y, z, даже если эти последние символы (подобно первым) некоммутативны между собой и даже если они означают символические множители (а не числовые). Предполагается, что они имеют дистрибутивный характер.

Мы можем поэтому заменить три символа x, y, z соответственно тремя характеристиками частных производных $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}$, таким образом формула (5) окажется включенной в формулу (6). Если затем мы заменим таким же образом символы t, u, v, рассматриваемые как сомножители, символами $\frac{d}{dx'}, \frac{d}{dy'}, \frac{d}{dz'}$; т.е. характеристиками трех частных производных, которые берутся по трем независимым переменным x', y', z', мы тем самым заменим $\frac{dt}{dx}$ на $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx'}$ и таким образом получим формулу

$$\left(i\frac{d}{dx}+j\frac{d}{dy}+k\frac{d}{dz}\right)\left(i\frac{d}{dx'}+j\frac{d}{dy'}+k\frac{d}{dz'}\right)=$$

$$=-\left(\frac{d}{dx}\frac{d}{dx'}+\frac{d}{dy}\frac{d}{dy'}+\frac{d}{dz}\frac{d}{dz'}\right)+$$

$$+i\left(\frac{d}{dy}\frac{d}{dz'}-\frac{d}{dz}\frac{d}{dy'}\right)+j\left(\frac{d}{dz}\frac{d}{dx'}-\frac{d}{dx}\frac{d}{dz'}\right)+k\left(\frac{d}{dx}\frac{d}{dy'}-\frac{d}{dy}\frac{d}{dx'}\right), \qquad (7)$$

которая включает формулу (3) и которая впервые публикуется здесь.

Формула (7), однако, кажется легким и непосредственным следствием уравнений, приведенных автором в 1843 г., или соотношений (1) предыдущего пункта, которые кратко можно объединить в следующей цепочке последовательных уравнений:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1. \qquad (8)$$

Геометрическая интерпретация уравнения

$$S.\, \nu\tau\iota\tau\kappa = 0$$

линий кривизны на эллипсоиде вместе с некоторыми другими приложениями кватернионов к этой важной поверхности нужно отложить до будущих пунктов настоящей серии, некоторые из которых, вероятно, появятся в ближайшем номере "Philosophical Magazine".

ПРЕДИСЛОВИЕ К "ЛЕКЦИЯМ О КВАТЕРНИОНАХ"*

1. Том, предлагаемый вниманию общественности, адресован как помощь тем лицам, кто расположен изучать и использовать некоторый новый математический метод, который в течение нескольких прошедших лет приковывал мое собственное внимание и для которого я рискнул предложить название "Метод или Исчисление Кватернионов". Хотя работе будет предшествовать обширный список в виде оглавления, кажется все же полезным предложить здесь и некоторые общие предварительные замечания, особенно в том, что касается концепций, из которых развился весь метод, и мотивов для терминов, не используемых ранее.

2. Трудности, которых так много встречается в доктрине Отрицательных и Мнимых Величин в Алгебре, привлекли мое внимание много лет назад. Раньше я был несколько знаком с различными взглядами или допущениями выдающихся авторов, имеющими целью обойти или исключить эти трудности, такие, как теория прямых и обратных величин и коррелятивных фигур, метод построения мнимых с помощью линий, проведенных на плоскости из одной точки в различных направлениях, и взгляд, который приписывает все простой комбинации алгебраических операторов и свойствам символического языка. Но все-таки мне представлялось, что весь предмет в целом требует дополнительного исследования. Несмотря на мое согласие с теми, кто оспаривает взгляд, что отрицательные и мнимые величины, собственно, не являются величинами, я все-таки чувствовал неудовлетворенность тем, что с самого начала не было дано ясной интерпретации и значения для квадратного корня из отрицательного числа, и хотел, чтобы это было сделано без тех специально геометрических рассмотрений, которые включают понятие угла.

3. Уже вначале мне казалось, что этих целей можно достичь допущением рассматривать АЛГЕБРУ не как искусство, не как язык, не (самое главное) как Науку о Величинах, но скорее как Науку о Порядке в Последовательности. Однако частью этой концепции было то, что упомянутая здесь последовательность предполагалась непрерывной и одномерной, простирающейся вперед и назад, но не в боковом направлении. И хотя последовательные положения в непрерывной последовательности можно (без сомнения) представить точками на прямой, все-таки я думал, что их простую последовательность было бы лучше сравнивать с моментами времени, однако без каких-либо ссылок на причину и следствие. Так что "время" можно рассматривать здесь, так сказать, в абстрактном идеальном или чистом виде, подобно "пространству" как объекту геометрии. Таким образом я пришел много лет тому назад к рассмотрению Алгебры как НАУКИ О ЧИСТОМ ВРЕМЕНИ; мои взгляды изложены в очерке [1] (Essay, 1835)[2].

---

* Preface "Lectures on quaternions": Containing a systematic statement of a new mathematical method. Dublin: Hodges and Smith, 1853 [H. 3. P. 117–155]. Перевод Н.В. Александровой.

[1] Theory of conjugate functions, or algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time // Trans. Roy. Irish Acad. 1837. Vol. 17, pt 2. P. 293–422.

[2] Меня вдохновляли писать и публиковать работу с такой точкой зрения воспоминания о некоторых пассажах "Критики чистого разума" Канта, которые, кажется, оправдывают надежды, что должно быть

Если я теперь воспроизвожу несколько мыслей, изложенных в этом раннем "Essay", то это просто потому, что они могут помочь читателю самому стать на такую точку зрения, так рассматривать первые элементы алгебры. Отсюда мною был сделан постепенный переход к сравнительно геометрической концепции. Раскрытие ее является целью настоящего тома. Что же касается чего-нибудь необычного в интерпретациях, предложенных таким образом для некоторых простых и элементарных понятий, то я не хочу настаивать на них как на совершенно необходимых (чтобы быть понятым)[3], они скорее нужны как подготовка к изучению кватернионов (по крайней мере в одном аспекте последних) и как согласование между всеми понятиями.

4. Согласно недавно изложенному взгляду буквы A и B используются как отметки, чтобы обозначить любые два момента времени, которые можно различать или не различать; случай совпадения или тождества этих двух моментов, или эквивалентности этих двух отметок, выражается уравнением

$$B = A.$$

Это символическое утверждение было, таким образом, интерпретировано не как содержащее какие-либо изначальные упоминания величин, но как выражающее результат какого-либо сравнения двух измеренных длительностей. Оно соответствует концепции одновременности или синхронности, или, более простыми словами, оно выражает мысль о настоящем во времени. Из всех возможных ответов на общий вопрос "когда" – наипростейший ответ "сейчас"; и это заложено в складе ума, дающего этот ответ, который (в этой системе) мог бы ответить *уравнением*, символически написанным выше. Аналогично две формулы *не*эквивалентности

$$B > A, \quad B < A$$

интерпретируются без первичных ссылок на величину, а как обозначающие два

возможным построение à priori НАУКИ о Времени так же, как и Науки о Пространстве. Например, в своей "Трансцендентальной эстетике" Кант замечает: "Zeit und Raum sind demnach zwey Erkenntnissquellen, aus denen *á priori* verschiedene synthetische Erkenntnisse geschöpft werden können, wie vornehmlich die reine Mathematik in Ansehung der Erkenntnisse vom Raume und dessen Verhältnissen ein glänzendes Beyspiel gibt. Sie sind nämlich beide zusammengenommen reine Formen aller sinnlichen Anschauung, und machen dadurch synthetische Sätze á *priori* möglich" (Critik der reinen Vernunft. Leipzig, 1828. S. 41). Это можно перевести приблизительно так: "Таким образом, пространство и время суть два источника познания, из которых можно á priori почерпнуть различные синтетические знания; блестящим примером этого служит чистая математика, когда дело касается знания о пространстве и его отношениях. Пространство и время, вместе взятые, суть чистые формы всякого чувственного созерцания, именно благодаря этому возможны априорные синтетические положения"[[18]].

[3] Например, обычное тождество $(B - A) + A = B$, которое в прежнем "Essay" интерпретировалось со ссылкой на время, как в п. 8 этого "Предисловия", где буквы A и B обозначают моменты, в настоящей работе (Лекция 1) интерпретируется (по аналогии с плоскостью, конечно) со ссылкой на пространство и буквы означают точки. Постоянно будет ощущаться тесная связь между двумя подходами: в каждом из них *шаг*, будучи приложенным к точке последовательности, порождает новое положение. И вообще, я думаю, очень полезно сравнить интерпретации, набросок которых дается в настоящем "Предисловии", с предложениями в основной части этого труда.

противоположных отношения последующего и предшествующего, которые соответствуют будущему и прошедшему во времени. Проще, первое выражает, что момент В мыслится как более поздний, чем А, а второе, что В более ранний, чем А. До сих пор даже не вводится *понятия об измерении*, чтобы определить, на сколько позже или раньше один момент времени имеет место нежели другой.

5. Итак, предложено, какие первичные значения приписать трем элементарным знакам =, >, <, затем было предложено, в каком смысле использовать впервые знак "–"; при построении *науки о чистом времени* можно полагать, что сложный символ В–А образован, чтобы обозначать разность между двумя моментами или упорядоченное отношение момента В к моменту А независимо от того, будут ли эти моменты совпадающими или разными, а в последнем случае – будет ли В предшествовать А или следовать за ним и как скоро. Только здесь, когда мы обращаем внимание на то, "как скоро", возникает концепция длительности как величины во времени, полный смысл символа В–А в частных приложениях неизвестен, пока мы не знаем насколько позже В наступает после А (или насколько В раньше чем А). Но очевидно, что понятие некоторого качества этой разницы, или интервала, входит в эту концепцию *разности между моментами* по крайней мере с той же полнотой и тогда же, что и понятие количества (quantity) или длительности. Противоречие между Будущим и Прошлым кажется даже более ранним и более фундаментальным в человеческой мысли, чем между Большим и Малым.

6. После *сравнения моментов* легко было перейти к *сравнению отношений* и, принимая во внимание недавнее обобщение знака равенства п. 4, использовать его для обозначения аналогии во времени или, точнее, чтобы выразить эквивалентность двух обычных соотношений между двумя парами моментов. Таким образом, формула

$$D - C = B - A$$

может быть интерпретирована как обозначение эквивалентности двух интервалов времени или как выражение того факта, что момент D соотносится к моменту C так же, как B и A, что же до тождества и различия, т.е. количества и качества такого различия (если оно существует), то они оба здесь учтены. Формула такого вида показывает допустимые инверсии и альтернативы ($C-D = A-B$, $D-B = C-A$).

Вообще можно совершать преобразования или рекомбинации уравнений, которые допустимы с точки зрения этой интерпретации и которые согласуются во всех отношениях с общепринятыми правилами алгебры. По той же схеме две противоположные формулы или неравенства между разностями

$$D-C > B-A, \quad D-C < B-A$$

интерпретируются соответственно как означающие, что D было позднее относительно C, чем B относительно A (и что D было относительно раньше).

7. Переходя к знаку "+", я использовал этот знак первоначально как знак комбинации символа шага во времени, обозначенного маленькими латинскими такими буквами, как a, и символа момента, *от* которого этот шаг мыслится сделанным, обозначенного такими буквами, как A; так образован сложный символ a + A; согласно этой концепции перехода символ a + A обозначает момент (допустим, B), *к* которому (предполагается) приведет шаг. Шаг или переход, о котором здесь говорится, рассматривается как мысленный акт, он, как легко предположить, может вести назад и вперед во времени или даже может быть нулевым шагом, обозначаемым через O, и не производить никакого эффекта (O + + A = A). Таким образом, с этим смыслом знаков обозначение B = a + A означает: момент B может быть достигнут (или мысленно получен) выполнением (в мыслях) шага a от момента A. Мне кажется, не переставая рассматривать символ B–A как означающий упорядоченное соотношение между двумя моментами (принимая во внимание п. 5), мы можем также использовать его в другом, связанном с этим смысле – для обозначения шага от одного момента к другому: этот смысл позволяет нам (как в обыкновенной алгебре) написать

B–A = a

(с выполнением всех введенных предположений). Здесь обе части нового уравнения – символы одного и того же шага.

8. Здесь появляется обычное тождество

(B–A) + A = B

с тем, чтобы быть проинтерпретированным: оно означает первоначально (в Науке о Чистом Времени) некоторую мыслимую связь между операцией, определяющей разность между двумя моментами как соотношение между моментами, и операцией, рассматривающей эту разность как шаг. И два других, известных и связанных ⟨с первым⟩ тождества

C–A = (C–B) + (B–A), C–B = (C–A) – (B–A)

трактуются в той схеме как первоначально означающие композиции и разложения упорядоченных отношений или шагов во времени. Был предложен специальный символ для противопоставления двух любых таких соотношений или шагов; но затем замечено, что можно использовать обычные обозначения "+" и "–" для самого шага (a) и для противоположного ему шага в полном соответствии с общим взглядом, если трактовать эти символы как сокращения более сложных символов 0 + a, 0 – a. Последнее обозначение не представляет здесь трудностей для интерпретации и не требует никаких попыток придумать вычитание величины из ничего, это просто разложение нулевого шага на два противоположных шага. Но операции над шагами, проведенные по этой схеме, согласованы во всех отношениях с обычными правилами алгебры, если рассматривать их как Сложение или Вычитание.

9. Временно́й шаг (*time-step*) b сравнивался с другим (a) с помощью алгебраического соотношения, теперь нужно подойти к понятию некоторого сложного отношения (или частного), которое определяется отчасти их относительной величиной (*relative largeness*), а отчасти – их относительным направлением, одинаковым или противоположным. Нужно подойти также к тесно связанному ⟨с этим⟩ понятию алгебраического числа (или множителя), который был бы общим коэффициентом и для величины, и для направления шага a, так что сразу и по величине, и по направлению получается (или мысленно производится) другой шаг b.

Обычное тождество $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} \times \mathrm{a} = \mathrm{b}$ или $\mathrm{b} = a \times \mathrm{a}$, если $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} = a$, получает интерпретацию комбинацией этих двух понятий. Множитель *a* будет положительным или контраположительным (что чаще называется "отрицательным") числом соответственно тому, сохраняет он или изменяет (обращает) направление шага, на который действует множитель. Четыре первоначальных операции, комбинирующие любые два таких отношения или числа, или множителя *a* и *b* между собой, определяются четырьмя уравнениями, которые можно написать и которые действительно отобраны из обычных формул алгебры, но использованы с новой *интерпретацией*:

$$(b + a) \times \mathrm{a} = (b \times \mathrm{a}) + (a \times \mathrm{a}), \qquad (b - a) \times \mathrm{a} = (b \times \mathrm{a}) - (a \times \mathrm{a}),$$

$$(b \times a) \times \mathrm{a} = b \times (a \times \mathrm{a}), \qquad b : a = (b \times \mathrm{a}) : (a \times \mathrm{a}).$$

10. Операции над алгебраическими числами (положительными или контраположительными) таким образом (мысленно) поставлены в зависимость от операций с теми же названиями над шагами, которые определены через моменты времени. Такие понятия гарантируют получение результатов, согласующихся с результатами, получаемыми обычным путем в алгебре, по крайней мере если 0 трактовался как символ и числа нуль, и нулевого шага (п. 7) и если символы $0 + a$, $0 - a$ были сокращены до $+a$ и $-a$. Если принять это во внимание, то нет никаких трудностей в интерпретации произведения двух отрицательных чисел, равного положительного числу: результат выражает просто, что два последовательных обращения восстанавливают направление шага. И другие трудности относительно правила знаков оказываются преодоленными аналогичным образом, более совершенным (как мне кажется), чем любой другой в алгебре, когда первоначальным фундаментальным понятием является понятие количества (или величины).

11. Эта теория алгебраических чисел как отношения шагов во времени приложима, таким образом, ко всей алгебре, включая результаты о степенях, корнях и логарифмах. Но сейчас главное – обратить внимание на то, что по установленной только что причине квадрат каждого числа положителен и не существует никакого числа (положительного или отрицательного), которое могло бы быть квадратным корнем из отрицательного числа, здесь – более чем в любом другом взгляде алгебры. По меньшей мере несомненно, что ни одно число (рассмотренных выше видов) не может быть таким корнем; но я думаю, что, не выходя из этого же самого общего класса интерпретаций и особенно не переставая сводить

все к понятию времени, объясняя и контролируя все, как выше, можно мыслить о парах моментов и сравнивать их, а также ввести понятие пары шагов (во времени) и на этом понятии можно основать теорию пар чисел, которая сама по себе не представляет трудностей и в которой не будет трудностей с извлечением корня квадратного из отрицательного числа.

12. С этой более широкой точки зрения, символы A_1 и A_2 используются, чтобы обозначить два момента такой пары или двойки (pair, coupl), а B_1, B_2 – два момента другой пары. Закономерно приходим к формуле

$$(B_1, B_2) - (A, A_2) = (B_1 - A_1, B_2 - A_2)$$

и к тому, чтобы объяснить ее как выражение того факта, что этот комплекс упорядоченного соотношения между одной парой моментов (B_1, B_2) и другой парой моментов (A_1, A_2) может рассматриваться как пара соотношений, т.е. как система двух упорядоченных соотношений $B_1–A_1$ и $B_2–A_2$ между соответствующими моментами двух пар моментов: первый момент B_1 одной пары сравнивается с первым моментом A_1 другой пары и таким же образом второй момент B_2 сравнивается со вторым моментом A_2. Но вместо этого (аналитического) сравнения момента с моментом, а отсюда и пары с парой я полагал, что можно также мыслить (синтетический) вывод (п. 7) одной пары моментов из другой, если приложить пару шагов (п. 11) или операцию, которую можно назвать сложением (снова см. п. 7) пары шагов и пары моментов. И тогда интерпретация может быть дана тождеством

$$(B_1, B_2) = \{(B_1, B_2) - (A_1, A_2)\} + (A_1, A_2).$$

Подобным же образом на соответствующие рассмотрения сложных соотношений и сложных шагов распространяются и другие результаты относительно сложения и разложения отдельных упорядоченных соотношений или отдельных шагов во времени, такие, как рассмотрены в п. 8 этого "Предисловия".

13. Не было никаких трудностей в интерпретации (по этой схеме) таких формул умножения и деления, как

$$a \times (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2) = (a\mathrm{a}_1, a\mathrm{a}_2), \quad (a\mathrm{a}_1, a\mathrm{a}_2) : (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2) = a,$$

где символы a_1, a_2 означают два шага во времени, а a – любое число, положительное или отрицательное. Но вопрос становится не столь простым, когда требуется интерпретировать символ вида

$$(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2) : (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2),$$

где b_1, b_2 означают два шага, которые не могут быть получены из двух шагов a_1, a_2 умножением на некоторое одно число, такое, как a. Чтобы рассмотреть этот случай (который в действительности является общим случаем в этой теории), я должен ввести понятие (п. 11) числовых пар или пары чисел, например (a_1, a_2), и рассматривать каждое простое число (a) как вырожденную форму такой числовой пары, а именно $(a, 0)$. Так что формула для умножения пары шагов на число может

быть написана следующим образом:

$$(a_1, 0)\,(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2) = (a_1\mathrm{a}_1, a_1\mathrm{a}_2).$$

Ясно также, что нужно установить следующую формулу для умножения простого шага на произвольную числовую пару:

$$(a_1, a_2)\,(\mathrm{a}_1, 0) = (a_1\mathrm{a}_1, a_2\mathrm{a}_1)$$

и что нужно рассматривать каждую такую числовую пару как сумму двух других, а именно чисто первую и чисто вторую, как, например, в следующей записи:

$$(a_1, a_2) = (a_1, 0) + (0, a_2)$$

совершенно аналогично уже установленному разложению пары шагов.

14. Трудности общего умножения пары шагов на числовую пару, таким образом, сводятся к тому, чтобы получить произведение чистого второго шага на чистое второе число. Дух всей этой теории пар подвел меня к выводу, что для такого произведения следовало бы иметь выражение вида

$$(0, a_2)\,(0, \mathrm{a}_2) = (\gamma_1 a_2\mathrm{a}_2, \gamma_2 a_2\mathrm{a}_2).$$

Здесь коэффициенты γ_1 и γ_2 – некоторые постоянные числа, не зависящие от шага a_2 и от числа a_2; эти два коэффициента я предлагаю назвать константами умножения. Эти константы можно задать по-разному; но были причины остановиться на следующем выборе[4] значений в качестве основы для всех последующих операций:

$$\gamma_1 = -1, \quad \gamma_2 = 0.$$

Таким путем был найден искомый закон операции умножения общей числовой пары (как множителя) на общую пару шагов (как множимого). С этим выбором констант он выражается формулой

$$(a_1, a_2)\,(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2) = (a_1\mathrm{a}_1 - a_2\mathrm{a}_2, a_2\mathrm{a}_1 + a_1\mathrm{a}_2).$$

При наличии этой формулы легко интерпретировать частное (п. 13) двух пар шагов, как всегда равное числовой паре, которая может быть однозначно определена, если даны отношения четыре простых шагов.

15. Эти понятия и обозначения позволяют написать следующие уравнения:

$$(1, 0)\,(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = (\mathrm{a}, \mathrm{b}); \quad (0, 1)\,(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = (-\mathrm{b}, \mathrm{a}).$$

Я думаю, что эти два множителя (1, 0) и (0, 1), используемые таким образом, могут быть названы соответственно первой и второй единицами числа. Я предпочел установить по определению несколько правил для главных операций с числовыми парами. Эти правила казались мне естественным обобщением правил, уже установленных для соответствующих операций (п. 9) над простыми числами. Так как

---

[4] В некоторых моих неопубликованных исследованиях использованы другие значения этих констант.

$(0, 1)(-b, a) = (-a, -b) = (-1, 0)(a, b)$,

то видно, что (как следствие тех правил или понятий, на которые они наводят, ср. п. 33) некоторой абстракцией оператора от операнда можно установить формулу

$(0, 1)^2 = (-1, 0) = -1.$

Таким образом, дается новая и (как я надеюсь) ясная интерпретация для хорошо известного в алгебре квадратного корня из отрицательной единицы: можно написать согласно изложенной выше схеме

$$(0,\ 1) = (-1,\ 0)^{1/2} = (-1)^{1/2} = \sqrt{-1}$$

без чего-либо неясного, невозможного, или мнимого.

16. Словом, после обращения направления второго из любых двух шагов мы затем переставляем их, делая таким образом прежний второй шаг (но обращенный по направлению) первым в новой паре шагов и делая в то же время прежний и необращенный первый шаг вторым в этой же новой паре. Если мы повторим этот сложный процесс обращения и перестановки, то будем иметь восстановленные прежние два шага, но при этом изменится направление каждого. Итак, этот оператор процесса перехода от одной пары шагов к другой в рассматриваемой системе был обозначен знаменитым символом $\sqrt{-1}$, часто называемым МНИМЫМ.

Очевидно, что процесс, описанный таким образом, не имеет специального отношения к понятию пространства, хотя имеет отношение к понятию ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ. Символ –1 обозначал, что ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ ЕДИНИЦА или число в качестве множителя изменяет простой шаг (+a) на противоположный ему шаг (–a); поэтому *два* таких обращения восстанавливают направление, отсюда (см. п. 10) обычное алгебраическое уравнение $(-1)^2 = +1$ сохраняет справедливость и в *этой* системе, как и в любой другой. Но символ $\sqrt{-1}$ является здесь не менее реальным, чем другие символы, такие, как –1 или +1: действуя на различные объекты, например на пару шагов (a, b), он превращает ее в новую пару, именно в (–b, a). Этот хорошо известный символ $\sqrt{-1}$ я предварительно записывал в форме (0, 1) и называл (см. п. 15) ВТОРОЙ ЕДИНИЦЕЙ числа – название и обозначение оправданы тем, что при его применении дважды обращался каждый шаг пары.

17. Более общее выражение алгебры $a_1 + \sqrt{-1}a_2$ для любого (так называемого) мнимого корня квадратного или иного уравнения интерпретировалось в этой схеме как символ числовой пары, которую я обозначал через (a_1, a_2) и для которой закон действия ее на пару шагов уже задан (п. 14). Аналогичный закон, выводимый отсюда[5], – закон умножения одной числовой пары на другую, именно закон

$(b_1, b_2)(a_1, a_2) = (b_1a_1 - b_2a_2, b_2a_1 + b_1a_2)$ [19].

[5] На принципы такого происхождения намекает "Essay" 1835 г., но, возможно, было достаточно очевидным, что они зависят от "отделения символов" или абстрагирования общего подоператорного выражения (ср. п. 15, 33 наст. "Предисловия").

При этом, вместо того чтобы сказать, что обычное квадратное уравнение $x^2 + ax + b = 0$ (где a и b – два числа, положительные или отрицательные) вообще имеет два корня, действительных или мнимых, можно было бы сказать, что этому же самому уравнению в другой форме $(x, y)^2 + (a, 0)(x, y) + (b, 0) = (0, 0)$ всего (вообще) удовлетворяют *две* (действительные) числовые пары, в которых второе число (y) может быть нулем или отличным от нуля в зависимости от значений a и b. Уравнение этого вида можно назвать уравнением в парах (couple - equation) и рассматривать как эквивалент системы[6] двух уравнений для чисел, например, приведенное выше квадратное уравнение для пары разбивается на два следующих отдельных уравнения, которые всегда допускают действительные числовые решения независимо от того, является ли $\frac{1}{4}a^2 - b$ положительным или отрицательным числом. Разница состоит только в том, что в первом случае мы принимаем равным нулю множитель второго уравнения системы $x^2 - y^2 + ax + b = 0$, $2xy + ay = 0$, тогда как в другом случае мы берем второй множитель этого уравнения и полагаем $2x + a = 0$. Аналогичные замечания можно сделать относительно уравнений более высоких порядков: все понятия чего-либо мнимого, нереального и невозможного совершенно исключаются из рассмотрения.

18. Эти же самые взгляды были продолжены так, чтобы охватить теорию степеней, корней и логарифмов числовых пар и в особенности чтобы подтвердить замечательное заключение, которое мой друг Джон Т. Грэйвс сообщил мне (а я полагаю, и другим) в 1826 г. и опубликовал в “Philosophical Transactions” за 1829 г. [20], а именно: общее символическое выражение для логарифма должно рассматриваться как содержащее два произвольных и независимых целых числа[7]; общий логарифм единицы по неперову основанию имеет, например, допустимую форму

$$\log 1 = \frac{2\omega'\pi}{2\omega\pi - \sqrt{-1}},$$

где ω, ω' означают два произвольных целых числа, положительных, отрицательных или равных нулю. В самом деле, я пришел к эквивалентному выражению в моей теории числовых пар, получив следующую формулу:

$$\log^{\omega'}_{\omega(e,0)}(1,0) = \frac{(0, 2\omega'\pi)}{(1, 2\omega\pi)},$$

и вообще выражение для логарифмической пары (logarithm - couple) порядка ω и

---

[6] Г-н Коши в своем “Cours d’analyse” (Paris, 1821. P. 176) делает замечание: “Все мнимые уравнения – только символические представления двух уравнений между действительными величинами”. Этот ценный труд Коши был известен мне раньше, но надо отметить, что я пришел к взгляду на предмет алгебры в целом, по крайней мере на ее метафизическую часть, исходя из некоторой другой точки зрения. Что касается слова “число”, то надо смотреть примеч. 15, п. 33.

[7] Нужно, собственно, упомянуть, что существенно те же результаты (относительно двух произвольных целых чисел в общей форме логарифма) получены Омом во втором томе его ценной работы, озаглавленной “Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik, vom Professor Dr. Martin Ohm” (2. Aufg. Berlin, 1829. S. 440) [21] (первого издания я не видел). За другими деталями по истории таких исследований об общих логарифмах я имею удовольствие отослать к статье м-ра Грэйвса [22], напечатанной в “Proceedings of the Sections of the British Association” за 1834 г. С. 523–531.

ранга ω' любой предложенной числовой пары (y_1, y_2) по произвольному основанию (b_1, b_2), будучи получено таким путем, подтверждает результаты м-ра Грэйвса[8].

19. После замечания, что это именно он предложил названия "порядок и ранг логарифма" и что мой собственный, более ранний "Essay" содержит сокращенное описание (хотя, может быть, и утомительное), следует заключение: "Тогда как м-р Грэйвс использовал в своих доказательствах обычные принципы Мнимых Величин и был удовлетворен доказательством символической необходимости соотношений между символами без показа интерпретации или внутреннего смысла его формул, настоящая Теория Пар опубликована, чтобы сделать очевидным это скрытое значение: показать, что выражения, которые по общим воззрениям кажутся символическими и не допускающими совершенно никакой интерпретации, можно ввести в мир мыслей, придать реальность и смысл, если не рассматривать больше Алгебру как Искусство или Язык, а считать ее Наукой о Чистом Времени[9]. Автор надеется

---

[8] Другое подтверждение тех же результатов, выведенное из особой теории сопряженных функций, было сообщено мною Британской ассоциации в Эдинбурге в 1834 г., доклад можно найти в "Proceedings of the Sections" за этот год (с. 519–523 в томе, цитированном выше). Здесь приведены уравнения в частных производных – "уравнения сопряжения", выведенные (как я позднее узнал) и другими авторами. "Essay" о "сопряженных функциях или алгебраических парах", упоминавшийся здесь, был существенно изменен перед публикацией его в 1835 г. в "Transactions of the Royal Irish Academy".

[9] Возможно, я должен был бы извиниться за воспроизведение взгляда, столь мало поддержанного научным авторитетом (хотя и воспроизведения только исторического и как бы отмечающего развитие моих собственных мыслей). Я верю, что я могу не слишком заботиться о символическом характере Алгебры как Языка или организованной системы знаков и (относительно) много заботиться о том, что я привык считать ее научным характером, т.е. доктриной, аналогичной Геометрии, благодаря Кантианскому параллелизму между интуитивными представлениями Времени и Пространства (хотя и используя алгебру в вычислениях). Это, собственно, не есть возможность поиска оправдания во мнении других (или в моем собственном) по столь тонкому предмету: особенно в настоящей работе я полагал, что удобно принять повсюду геометрический базис для экспозиции теории и вычислений Исчисления Кватернионов. Все же я хочу заявить, что я не теряю надежды на то, что я буду в состоянии показать позднее, что мои собственные прежние взгляды на Алгебру, возможно, с модификацией последовательности мышления и изложения (в некоторых отношениях), не являются совершенно и непримиримо противоположными учениям авторов, которых я так уважаю – д-ров Ома и Пикока. "Versuch" первого из них я уже цитировал, и едва ли необходимо говорить (по крайней мере читателям нашей страны), что мои ссылки относятся к книгам преподобного Джорджа Пикока "Algebra" (Cambridge, 1830) и к "Report on certain branches of Analysis", напечатанному третьим изданием British Association for Advancement of Science (London, 1834), и "Symbolical algebra" (Cambridge, 1845) [23].

Нет нужды обсуждать возможность построения, последовательность и полезность системы алгебраических вычислений, начиная с понятия целого числа, раскрывая это понятие в необходимых следствиях, выражая следствия с помощью символов, общих по форме, хотя вначале предполагалось, что они будут иметь ограниченное значение или величину, а затем ограничения (которые были наложены на исходные понятия) снимаются определением ради общности символов. Таким образом, положение, справедливость которого доказана только для некоторого второстепенного и ограниченного случая, распространяют на совершенно общий случай. Такой, по крайней мере частично, кажется точка зрения каждого из этих двух писателей, вообще говоря, оригинальных и полных мыслей. Хотя, кажется, Ом подробно останавливается на изучении соотношений между основными операциями, а Пикок – на постоянстве эквивалентных форм. Но я признаю, что я не в состоянии сформулировать отчетливо концепцию числа без некоторой ссылки на идею времени, хотя эта ссылка, может быть, несколько абстрактного и трансцендентного вида. Я не могу представить себе непрерывным любое множество вещей без предварительного упорядочения их и без того, чтобы считать их следующими друг за другом (однако эта предполагаемая последовательность может быть произвольной и мысленной или

опубликовать в будущем много других приложений этой точки зрения, особенно к Уравнениям и Интегралам, а также к теории Триплетов и Совокупностей Моментов, Шагов и Чисел, которые включат и Теорию Пар"[10].

20. Теория триплетов и совокупностей (sets) [[25]], названных так в заключении "Essay" (1835), фактически представляет собой предмет различных неопубликованных исследований, некоторые из которых сохранились. Краткое извещение о них здесь, возможно, может быть полезно, особенно в том, что относится к триплетам[11], так как это поможет пролить свет на природу перехода от пар к кватернионам, который я постепенно сделал.

Даже и не основываясь на самом общем взгляде на алгебру как на науку о чистом времени, можно видеть, что не существуют какие-нибудь ограничения на

субъективной) и без соглашения начать с абстрактного понятия (или чистой интуиции) ВРЕМЕНИ как основы экспозиции тех аксиом и выводов, которые выражаются символами алгебры (хотя я допускаю, что для целей элементарного обучения, может быть, удобнее начать с более знакомой концепции целого числа). Мне кажется, что достигается преимущество: с помощью этого была бы значительно отсрочена необходимость любого только символического распространения формул. В самом деле (как частично было показано), тогда отрицательные числа сами будут представляться так же легко и естественно, как и положительные, через основное противопоставление идей прошлого и будущего, которые используются здесь не как иллюстрация результата, полученного другим способом, символически, но как основа аргументации. Обычные мнимости алгебры могли бы быть объяснены парами (как выше); но тогда для удобства вычислений можно обозначить их одной-единственной буквой и подчинить этот символ всем обычным правилам, которые следуют (в этой схеме) из комбинации различных концепций и определений, и не приведут к результату, который не был бы полностью и легко понятен в строгом соответствии с обычной идеей времени (или интуиции), из которой развита вся теория. Доктрина, что уравнение n-й степени (например) должно иметь n корней, таким образом исключает какие-либо нападки и приобретает (я полагаю) новую ясность как по форме, так и по многозначительности без какой-либо помощи со стороны геометрии.

Кватернионы, как я показал в другом месте (Trans. Roy. Irish Acad. 1848. Vol. 21, pt 2), и даже бикватернионы, как я надеюсь показать позднее, можно объяснить их законами и интерпретировать их символические результаты, сопоставив им совокупности моментов и операции с совокупностями шагов во времени.

Таким образом, во фразеологии д-ра Пикока мы имеем очень широкую "науку предположений" (или, скорее, предположительную науку) в качестве базиса, на котором впоследствии строится некоторая новая структура чисто символического обобщения, если будет принята наука о времени вместо просто Арифметики или целого числа как исходной доктрины. Я вполне допускаю, что практические вычисления (при этой или любой другой точке зрения) должны выполняться согласно некоторым фиксированным законам комбинации символов, таким, как пытался вывести профессор де Морган для обычной алгебры с наименьшими возможными отклонениями в своей Второй Статье об Основаниях Алгебры (Cambridge Philos Trans. Vol. 7, pt. 3) [[24]] и в работе, озаглавленной "Trigonometry and double algebra" (London, 1849). Я допускаю также, что в следующем ниже можно ожидать (как символическое следствие таких законов) появление результатов, не интерпретируемых или по крайней мере еще не проинтерпретированных.

В настоящем томе (как уже отмечено) я полагал целесообразным представить кватернионы в геометрическом аспекте, как аспекте, который, возможно, более легок и интересен для понимания и более пригоден для немедленных приложений геометрического и физического характера. Те, кто окажет мне честь, читая эту книгу, заметят очень тесную аналогию с методами Ома и Пикока в переходе от кватернионов, рассматриваемых как действительные (или интерпретируемые геометрически), к бикватернионам, рассматриваемым как мнимые (или геометрически неинтерпретированные), вводимым как символическое обобщение кватернионной формулы (лекция VII).

[10] Trans. Roy. Irish Acad. 1837. Vol. 17, pt 2. P. 422.

[11] Эти замечания о триплетах публикуются здесь *впервые*.

пары моментов, шагов и чисел. Таким образом, вместо того чтобы сравнивать, как в п. 12, два момента B_1 и B_2 с двумя другими моментами A_1 и A_2, можно сравнивать три момента B_1, B_2, B_3 с тремя другими моментами A_1, A_2, A_3, т.е., если сказать подробнее, сравнивать (или мыслить как сравниваемые) однородные моменты этих двух троек: первый с первым, второй со вторым и третий с третьим, и получить определенную систему или тройку упорядоченных соотношений, или тройку шагов во времени, которая может быть обозначена (ср. п. 5, 7, 12) левой или правой частью следующего уравнения:

$$(B_1, B_2, B_3) - (A_1, A_2, A_3) = (B_1 - A_1, B_2 - A_2, B_3 - A_3).$$

По той же схеме (ср. п. 7, 8, 12), если обозначить три шага-конституенты такой тройки следующим образом:

$$B_1 - A_1 = a_1,\ B_2 - A_2 = a_2,\ B_3 - A_3 = a_3,$$

то можно записать $(B_1, B_2, B_3) = (a_1, a_2, a_3) + (A_1, A_2, A_3)$.

Таким образом, тройка шагов, будучи (символически) сложена с тройкой моментов, приводит (мысленно) к другой тройке моментов. Кажется удобным установить следующую формулу для сложения троек шагов:

$$(b_1, b_2, b_3) + (a_1, a_2, a_3) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2, b_3 + a_3),$$

означающую некоторую композицию двух таких троек шагов, отвечающую такому последовательному приложению их к любой заданной тройке моментов (A_1, A_2, A_3), которое приводит в конечном счете к третьей тройке моментов, именно к тройке (C_1, C_2, C_3), если

$$C_1 - B_1 = b_1,\ C_2 - B_2 = b_2,\ C_3 - B_3 = b_3.$$

Вычитание одной тройки шагов из другой объяснялось как соответствующее аналогичному разложению данной тройки шагов в систему трех разложений – на три простых шага, в каждом из которых только один отличен от нуля (см. снова п. 8). Разность выражается формулой

$$(c_1, c_2, c_3) - (a_1, a_2, a_3) = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3).$$

Обычные правила алгебры остаются справедливыми для таких операций сложения и вычитания троек.

21. Умножение тройки шагов на положительное или отрицательное число (a) было легким: оно заключалось просто в умножении каждого шага-конституенты на это число; так что я имел уравнение

$$a(a_1, a_2, a_3) = (aa_1, aa_2, aa_3).$$

И обратно, естественно было установить (ср. п. 13) следующую формулу для определенного случая деления троек шагов:

$$(aa_1, aa_2, aa_3) : (a_1, a_2, a_3) = a.$$

Но в более общем случае (снова ср. п. 13), когда шаги b_1, b_2, b_3 одной тройки не

были пропорциональны шагам a_1, a_2, a_3, мне казалось, что частное этих двух троек шагов (будучи интерпретировано по той же схеме) должно быть равно некоторой триаде чисел или триплету a_1, a_2, a_3. Так что нужно полагать, что вообще существуют два уравнения вида

$$(b_1, b_2, b_3) : (a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2, a_3),$$

$$(b_1, b_2, b_3) = (a_1, a_2, a_3)(a_1, a_2, a_3).$$

Три конституенты (положительныне или отрицательные) этого числового триплета (a_1, a_2, a_3) зависят по некоторым определенным законам от отношений шести шагов a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3.

22. Полезно ввести в рассмотрение три различных и независимых единичных шага, которые я обозначил символами 1_1, 1_2, 1_3, а также три числа-единицы – первая, вторая и третья, каждая из которых может действовать как некоторый вид множителя на каждый из этих трех шагов или на систему их, что я обозначаю следующими тремя символами:

$$x_1, x_2, x_3,$$

а иногда подробнее таким образом:

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1).$$

Тройка шагов принимает тогда вид

$$r1_1 + s1_2 + t1_3,$$

где r, s, t – три числовых коэффициента (положительных или отрицательных), а 1_1, 1_2, 1_3 означают три шага во времени. Любой множитель-триплет, такой, как (m, n, p), на который была бы умножена эта тройка шагов или который бы действовал на тройку шагов, может быть записан в аналогичном виде

$$mx_1 + nx_2 + px_3.$$

Принимая затем дистрибутивное свойство умножения, было бы необходимо только фиксировать значения девяти произведений, или комбинаций, когда каждая из трех числовых единиц действует отдельно на каждый из трех единичных шагов: каждое такое произведение, или результат, в этой теории само мыслится, вообще говоря, как тройка шагов, в которой, однако, некоторые шаги-конституенты могут обращаться в нуль. Отсюда, написав

$$x_1 1_1 = 1_{1,1},\ x_1 1_2 = 1_{2,1}, \ldots, x_3 1_2 = 1_{2,3},\ x_3 1_3 = 1_{3,3},$$

я пришел к разложению этих девяти троек шагов в девять триномиальных выражений вида

$$1_{f,g} = 1_{f,g,1} 1_1 + 1_{f,g,2} 1_2 + 1_{f,g,3} 1_3,$$

где двадцать семь символов вида $1_{f,g,h}$ представляют некоторые фиксированные числовые коэффициенты или константы умножения, аналогичные тем константам,

которые были обозначены через γ_1 и γ_2 в п. 14, и, подобно им, требуется задать предварительные их значения перед выполнением умножения, если требовать, чтобы в результате действия данного триплета чисел на данную тройку шагов производилась совершенно определенная тройка шагов.

23. Обратно, как только эти числовые константы заданы, уравнение умножения

$$(m\text{x}_1 + n\text{x}_2 + p\text{x}_3)(r\text{l}_1 + s\text{l}_2 + t\text{l}_3) = x\text{l}_1 + y\text{l}_2 + z\text{l}_3$$

(вследствие предположенной взаимной независимости трех единичных шагов) должно само рассматриваться как распадающееся на три обыкновенных алгебраических уравнения между девятью числами $m, n, p, r, s, t, x, y, z$, а именно между коэффициентами множителя, множимого и произведения. Эти три уравнения линейны относительно m, n, p (так же как и относительно r, s, t и $x, y\ z$). Поэтому отсюда немедленно получаются выражения для коэффициентов x, y, z произведения, которые и решали, таким образом, проблему умножения. Эти выражения давали мне возможность с помощью простой системы трех линейных уравнений решить также и обратную задачу п. 21 – деления одной тройки шагов на другую или определить числа m, n, p следующего частного двух таких троек:

$$m\text{x}_1 + n\text{x}_2 + p\text{x}_3 = (x\text{l}_1 + y\text{l}_2 + z\text{l}_3) : (r\text{l}_1 + s\text{l}_2 + t\text{l}_3).$$

24. Таковы были наиболее существенные элементы той общей теории триплетов, которая явилась мне в 1834 и 1835 гг. Но ясно, что в ее приложениях все зависело от выбора двадцати семи констант умножения, которые все могли быть заданы произвольно до выполнения операции, но затем должны считаться фиксированными. Было естественно, в самом деле, рассматривать первую числовую единицу x_1 как не производящую никаких изменений в шаге или тройке, на которую она действует, и было желательно определить константы так, чтобы удовлетворялось условие $\text{x}_3\text{x}_2 = \text{x}_2\text{x}_3$ ради соответствующей аналогии в алгебре. Согласно этому в одной из нескольких триплетных систем, которые я испытывал, постоянные были выбраны так, чтобы удовлетворять этим условиям. Итак, по предположению

$$\begin{array}{lll}
\text{x}_1\text{l}_1 = \text{l}_1, & \text{x}_1\text{l}_2 = \text{l}_2, & \text{x}_1\text{l}_3 = \text{l}_3,\\
\text{x}_2\text{l}_1 = \text{l}_2, & \text{x}_2\text{l}_2 = \text{l}_1 + (b - b^{-1})\text{l}_2, & \text{x}_2\text{l}_3 = b\text{l}_3,\\
\text{x}_3\text{l}_1 = \text{l}_3, & \text{x}_3\text{l}_2 = b\text{l}_3, & \text{x}_3\text{l}_3 = \text{l}_1 + b\text{l}_2 + c\text{l}_3.
\end{array}$$

Эти соотношения еще включали числовые константы b и c, и комбинацией последовательных операций, примененных к любой тройке шагов (например, $r\text{l}_1 + s\text{l}_2 + t\text{l}_3$, где эта подоператорная тройка может иметь произвольные коэффициенты r, s, t), давали следующие символические уравнения[12], выражающие свойства предлагаемых операторов x_2, x_3 и законы их взаимных комбинаций:

$$\text{x}_2^2 = (b - b^{-1})\text{x}_2 + 1,\ \ \text{x}_2\text{x}_3 = \text{x}_3\text{x}_2 = b\text{x}_3,\ \ \text{x}_3^2 = c\text{x}_3 + b\text{x}_2 + 1.$$

[12] Эти символические уравнения переписаны из рукописи от февраля 1835 г.

Множитель x_1 в этой системе просто эквивалентен множителю 1 или обычной единице арифметики, а символ x_2 появляется через посредство квадратного уравнения (с двумя действительными корнями b и $-b^{-1}$); я знал, что нельзя путать операцию этого специального символа x_2 с любым из двух этих чисел – корней символического квадратного уравнения, рассматриваемого как обыкновенный множитель.

Так же ни одна отдельная операция из двух: $x_2 - b$ и $x_2 + b^{-1}$, будучи примененной к общей тройке шагов, не переводит эту тройку в нулевую (0, 0, 0), но комбинация этих двух операций, выполненных последовательно в любом порядке, осуществит это преобразование.

25. В этой же частной системе триплетов три общие уравнения п. 23 между девятью числовыми коэффициентами множителя, множимого и произведения стали следующими:

$$x = mr + ns + pt, \quad y = ms + nr + (b - b^{-1})ns + bpt, \quad z = mt + pr + b(nt + ps) + cpt.$$

Отсюда возможно, вообще говоря, определить коэффициенты m, n, p частного двух любых троек шагов. Было найдено, что эти же три уравнения имеют место, когда числовой триплет (x, y, z) рассматривался как символическое произведение двух числовых триплетов (m, n, p) и (r, s, t). Это произведение получено отделением (или разделением) символов операторов от их общего операнда, а именно от произвольной тройки шагов. Другими словами, те же самые алгебраические уравнения между девятью числовыми коэффициентами xyz, mnp, rst выражали также условия, заключающиеся в формуле символического умножения

$$(x, y, z) = (m, n, p)(r, s, t),$$

рассматриваемой как сокращение следующей более полной формулы:

$$(x, y, z)(a_1, a_2, a_3) = (m, n, p)(r, s, t)(a_1, a_2, a_3),$$

где a_1, a_2, a_3 могут означать любые три шага во времени. Они могут быть названы условиями правильности другого символического уравнения

$$xx_1 + yx_2 + zx_3 = (mx_1 + nx_2 + px_3)(rx_1 + sx_2 + tx_3),$$

интерпретируемого по той же схеме, что и символы x_2^2, x_2x_3, x_3x_2, x_3^2 в п. 24.

26. Все особые свойства недавно упомянутой системы триплетов можно рассматривать как содержащиеся в трех обыкновенных алгебраических уравнениях п. 25, которые связывают девять коэффициентов друг с другом (а также и с двумя произвольными постоянными). Я знал, что эти уравнения допускают три следующие комбинации при обычных алгебраических преобразованиях:

$$x - b^{-1}y = (m - b^{-1}n)(r - b^{-1}s);$$

$$x + by + a z = (m + bn + ap)(r + bs + at); \quad x + by + a'z = (m + bn + a'p)(r + bs + a't),$$

где a и a' – два действительных неравных корня обыкновенного квадратного уравнения $a^2 = ca + b^2 + 1$. Затем возникало требование, появлявшееся и в любой другой системе триплетов, которую я испытывал, именно что произведение двух

триплетов может обращаться в нуль без того, чтобы один из сомножителей обращался бы в нуль. Кажется, в самом деле, оно является общим и необходимым следствием кубического уравнения определенной формы, полученного из трех упомянутых уравнений п. 23, по крайней мере если мы полагаем (что естественно) $x_1 = 1$. Так, если мы полагаем (как один из вариантов получения этого результата)

$$n = bm, \quad r = -bs, \quad t = 0,$$

то приведенные выше соотношения дадут

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

так что величинам m, p, s можно придать любые значения, и будем иметь в этой системе формулу

$$(m, bm, p)(-bs, s, 0) = (0, 0, 0).$$

По этой же причине имеются неопределенные случаи в операции деления триплетов; например, если бы требовалось найти коэффициенты m, n, p частного из уравнения

$$(m, n, p)(-bs, s, 0) = (x, y, z),$$

мы должны были бы уметь определить функцию $m - b^{-1}n$, но не сами числа m и n, тогда как p оставалось бы полностью неопределенным, по крайней мере, если каждое из чисел $x + by$ и z было бы равно нулю; с другой стороны, можно ввести в игру бесконечное значение.

27. Предыдущая аргументация относительно систем триплетов совершенно не зависела от любого вида геометрической интерпретации. Все же было бы естественно интерпретировать результаты, и я сделал это, положив, что три совокупности коэффициентов (m, n, p), (r, s, t), (x, y, z) (которые соответствуют трем триплетам, участвующим в умножении) являются координатными проекциями на три перпендикулярные оси трех прямых линий, проведенных из общего начала. Я думал, что эти линии можно назвать соответственно (в этой системе интерпретации): линия-множитель, линия-множимое и линия-произведение.

Затем в частной системе триплетов, описанной выше, формула из п. 26 легко дает правило для построения (по этой схеме) произведения двух линий в пространстве. Насколько я видел, если три фиксированные перпендикулярные линии A, B, C, отличающиеся от выбранных осей, были определены тремя следующими парами обыкновенных уравнений в координатах:

$$x + by = 0,\ z = 0 \quad \text{для линии } A,$$
$$y - bx = 0,\ z - ax = 0 \quad \text{для линии } B,$$
$$y - bx = 0,\ z - a'x = 0 \quad \text{для линии } C,$$

то мы можем сформулировать такую теорему[13]:

---

[13] Эта теорема из рукописи от февраля 1835 г. упоминалась в предыдущих пунктах.

"Если линия L'' является произведением двух других линий L, L' и мы проектируем два множителя L, L' на любую из трех ортогональных линий A, B, C, то произведение (в обычном смысле) двух проекций равно произведению проекций (на те же оси) линий L'' и U, где U – первая единичная линия (1, 0, 0)".

28. Я видел, что из этой теоремы (или скорее из уравнений, приведенных в п. 26, из которых получается сама теорема) следует, что если мы рассматривали три ортогональные плоскости A', B', C', соответственно перпендикулярные трем линиям A, B, C или имеющие уравнения

$$y - bx = 0\ (A'),\quad x + by + az = 0\ (B'),\quad x + by + a'z = 0\ (C'),$$

то каждая линия в любой из этих трех фиксированных плоскостей дает произведение, равное нулю, если она умножается на линию, перпендикулярную этой плоскости; например, если линию A умножить на любую линию в плоскости A', то в качестве произведения будет получена нулевая линия. По этой же причине (ср. п. 26), хотя деление одной линии на другую дает, вообще говоря, некоторую определенную линию-частное, но если линия-делитель расположена в одной из плоскостей A', B', C', то линия-частное становится неопределенной.

Результаты такого же общего характера, хотя и не все столь же простые, как предыдущий, возникли в моих исследованиях различных других систем триплетов: среди тех, которые я испытывал, имеется по крайней мере одна система линий и плоскостей, аналогичных A и A', но не всегда ортогональных друг другу и не всегда трех (действительных) систем.

29. Эти рассуждения интересовали меня в течение некоторого времени и некоторые из результатов казались вполне элегантными в целом. Но я не был удовлетворен отклонением от обыкновенных аналогий с алгеброй, заключающимся в том, что произведения двух таких триплетов (или двух линий) обращаются в нуль в определенных случаях, когда ни один из сомножителей не равен нулю (п. 26–28), а также в неопределенности частного (в тех же случаях), когда делитель отличен от нуля. Мне также казалось, что слишком много возможностей для произвольного выбора констант и что основания для окончательного предпочтения одной системы триплетов всем другим недостаточно убедительны. В самом деле, имея в символическом уравнении п. 24 предположение $x_1 = 1$, которое кажется удобно и естественно, хотя не существенно для теории, мы определяем немедленно значения девяти констант умножения (из двадцати семи); шесть других были получены из предположения, которое также кажется удобным (хотя в некоторых из моих исследований последнее не было сделано):

$$x_2 1_1 = 1_2,\qquad x_3 1_1 = 1_3.$$

Предположенная обратимость порядка двух операций x_2 и x_3 (см. снова п. 24) доставляла следующие три условия:

$$x_3 x_2 1_1 = x_2 x_3 1_1,\qquad x_3 x_2 1_2 = x_2 x_3 1_2,\qquad x_3 x_2 1_3 = x_2 x_3 1_3.$$

Здесь первое условие было замечено сразу же, чтобы установить *три* соотношения между шестью оставшимися коэффициентами умножения (из двенадцати), а именно (если для краткости опустить запятую в индексах):

$$1_{231} = 1_{321}, \quad 1_{232} = 1_{322}, \quad 1_{233} = 1_{323}.$$

Два других уравнения между тройками шагов дают приведенные условия обратимости, распадающиеся на шесть уравнений между коэффициентами, которые здесь, однако, мыслятся как зависящие друг от друга, будучи фактически связаны тем, что они удовлетворяют трем следующим условиям:

$$1_{321} = 1_{223}1_{332} - 1_{233}1_{322},$$

$$1_{221} = 1_{233}(1_{233} - 1_{222}) + 1_{223}(1_{322} - 1_{333}),$$

$$1_{331} = 1_{332}(1_{233} - 1_{222}) + 1_{322}(1_{322} - 1_{333}).$$

Здесь два первых сами представлялись мне в несколько более простой форме, так как ради осуществления последовательного перехода от пар к триплетам или для того, чтобы избежать в произведении тройных членов, я полагал значение $1_{223} = 0$. Все еще оставались *пять* произвольных коэффициентов

$$1_{222}, \quad 1_{322}, \quad 1_{323}, \quad 1_{332}, \quad 1_{333},$$

которые, кажется, можно выбрать по желанию. Но разложение определенных кубических функций от *r, s, t* п. 26 на множители, связанное с геометрическими рассмотрениями, привело меня (ради сохранения действительности и ортогональности некоторой системы линий и плоскостей) к предположению ⟨справедливости⟩ трех следующих соотношений между этими коэффициентами:

$$1_{222} = 1_{323} - 1_{323}^{-1}, \quad 1_{322} = 0, \quad 1_{332} = 1_{323},$$

которые доставляют, таким образом, значения

$$1_{221} = 1, \quad 1_{321} = 0, \quad 1_{331} = 1.$$

Но два постоянных коэффициента 1_{332} и 1_{333}, кажется, все еще оставались совершенно произвольными[14] и были теми неопределенными элементами, обозначенными через b и c, которые входили в формулы умножения триплетов п. 25, уже цитированные в этом “Предисловии”.

30. Я видел, однако (как я уже намекал в п. 19 и 20), что общая точка зрения на алгебру как на науку о чистом времени допускает легкое (по крайней мере мысленное) распространение всей этой теории не только с пар на триплеты, но и с триплетов на совокупности моментов, шагов и чисел. Вместо двух или даже трех моментов (как в п. 12 или 20) можно без труда мыслить систему или совокупность n таких моментов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и предполагать их сравнимыми с другой равно-

[14] Может заслуживать внимания система констант $b = 1$, $c = 1$, но мне не случалось рассматривать ее. В некоторых старых исследованиях о триплетах символ $\sqrt{1}$ сам входил как коэффициент, но это показалось мне в то время неудовлетворительным и я не знал, как его интерпретировать в такой связи.

численной совокупностью моментов $B_1, \ldots, B_n$ и таким образом привести к новым комплексам упорядоченных соотношений или к совокупности шагов, обозначаемой формулой

$$(B_1, B_2, \ldots, B_n) - (A_1, A_2, \ldots, A_n) = (B_1 - A_1, B_2 - A_2, \ldots, B_n - A_n).$$

Такие совокупности шагов можно складывать или вычитать (ср. п. 20) путем сложения или вычитания соответствующих составляющих их шагов, на что указывает формула

$$(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n) \pm (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n) = (\mathfrak{b}_1 \pm \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_2 \pm \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n \pm \mathfrak{a}_n).$$

Совокупность шагов можно умножить на число (a) или разделить на другую совокупность шагов при условии, что составляющие шаги одной пропорциональны шагам другой (ср. п. 13, 21), по формулам

$$a(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n) = (a\mathfrak{a}_1, a\mathfrak{a}_2, \ldots, a\mathfrak{a}_n),$$

$$(a\mathfrak{a}_1, a\mathfrak{a}_2, \ldots, a\mathfrak{a}_n) : (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n) = a.$$

31. Если же требуется разделить одну совокупность шагов на другую в более общем случае (ср. п. 13, 14, 21), когда конституенты или составляющие шаги $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ одной совокупности не пропорциональны соответствующим компонентам $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n$ другой совокупности, вновь возникали трудности, которые я предполагал разрешить по той же самой общей схеме, что и раньше. А именно положим, что числовая совокупность или система чисел может действовать на одну совокупность шагов образом, аналогичным умножению, так чтобы порождать или производить другую данную совокупность шагов в качестве результата, который должен быть аналогичен произведению. Вместо трех различных и независимых единичных шагов, как в п. 22, я теперь допускал существование n таких единичных шагов, которые можно обозначить символами

$$\mathfrak{1}_1, \mathfrak{1}_2, \ldots, \mathfrak{1}_n.$$

И вместо трех числовых единиц (снова см. п. 22) я мыслил n таких единичных операторов, которые в прежних ранних рассмотрениях я обозначал $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ и о которых думал, что каждый может действовать на каждый единичный шаг как особый множитель или сомножитель так, чтобы производить в качестве результата новую совокупность шагов. Таким образом, приходится мыслить n^2 таких результирующих совокупностей шагов, обозначенных по схеме п. 22 символами вида

$$\mathrm{x}_g \mathfrak{1}_f = 1_{f,g,1}\mathfrak{1}_1 + 1_{f,g,2}\mathfrak{1}_2 + \ldots + 1_{f,g,n}\mathfrak{1}_n,$$

где n^3 символов вида $1_{f,g,h}$ означают столько же числовых коэффициентов или констант умножения (вида, рассмотренного предварительно в теории пар п. 13, и триплетов, п. 22), которые все требуют предварительного задания их значений *до* выполнения умножения совокупности шагов на совокупность чисел, чтобы эта операция могла вообще приводить в результате к определенной совокупности шагов.

32. Обратно, по схеме п. 23 когда n^3 числовых значений этих коэффициентов или констант $1_{f,g,h}$ однажды зафиксированы, я знал, что тогда мы можем определенно интерпретировать произведение вида

$$(m_1\mathrm{x}_1 + \ldots + m_g\mathrm{x}_g + \ldots + m_n\mathrm{x}_n)(r_1 1_1 + \ldots + r_f 1_f + \ldots + r_n 1_n)$$

(где $m_1,\ldots, m_g,\ldots, m_n$ и $r_1,\ldots, r_f,\ldots, r_n$ – любые $2n$ данных числа) как эквивалентное определенной новой или полученной совокупности шагов вида

$$x_1 1_1 + \ldots + x_h 1_h + \ldots x_n 1_n,$$

где $x_1,\ldots, x_h,\ldots, x_n$ – новые или производные числа, определенные посредством n выражений, таких, как следующие:

$$x_h = \sum m_g r_f 1_{f,g,h};$$

суммирование распространено на все n^2 комбинаций значений индексов f и g. И так как эти выражения можно рассматривать вообще как систему n линейных уравнений относительно n коэффициентов m_g совокупности-множителя, я думал, что деление одной совокупности шагов на другую (ср. п. 14, 23), таким образом, вообще может быть определено или по крайней мере мыслимо и интерпретируемо как процесс, обратный умножению, т.е. это определение совокупности чисел, которая производит совокупность шагов (делимое), действуя на совокупность шагов (делитель), что можно поэтому обозначить следующим образом:

$$m_1\mathrm{x}_1 + \ldots + m_g\mathrm{x}_g + \ldots + m_n\mathrm{x}_n = (x_1 1_1 + \ldots + x_h 1_h + \ldots + x_n 1_n) :$$

$$: (r_1 1_1 + \ldots + r_f 1_f + \ldots + r_n 1_n),$$

или короче

$$\sum m_g\mathrm{x}_g = \sum x_h 1_h : \sum r_f 1_f.$$

Тогда совокупность чисел, найденную таким образом, можно назвать частным двух совокупностей шагов.

33. Можно вспомнить, что даже на столь ранней стадии, как интерпретация символа $b \times a$ для алгебраических произведений двух положительных или отрицательных *чисел*[15], предполагалось основываться на понятии *шага* (a), на который действовали бы последовательно два числа, абстрагируясь от шага, затем интерпретировать произведение чисел, что выражается элементарной формулой п. 9

$$(b \times a) \times \mathrm{a} = b \times (a \times \mathrm{a}).$$

Таким образом, чтобы интерпретировать произведение (–2) × (–3) = +6, я представлял, что некоторый шаг во времени (a) был вначале утроен (по длине) и

[15] Это слово "число" использовалось всюду в настоящем "Предисловии" и книге как противоположное не дробям (исключая случаи, когда оно сопровождалось словом "целое") или иррациональностям, но скорее как противоположное шагам (во времени или по какой-нибудь оси). Короче, когда где-нибудь в этой работе встречается наименование scalars, то речь идет просто о тех числах (положительных или отрицательных), отложенных на шкале (scale) от – ∞ до + ∞, которые обычно называют в алгебре действительными (или действительными величинами).

обращен (по направлению); затем этот новый шаг (–3a) был удвоен и обращен; и наконец, последний результирующий шаг (+6a) сравнивался с исходным шагом (a) путем алгебраического отношения п. 9, откуда и приходим к результату, который не зависит от первоначального шага. Все это до сих пор было, несомненно, предельно просто; нетрудно было также распространить этот способ интерпретации на случай умножения двух пар чисел п. 17 и интерпретировать произведение двух таких пар как удовлетворяющее условию

$$(b_1, b_2)(a_1, a_2) \times (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2) = (b_1, b_2) \times (a_1, a_2)(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2),$$

т.е. вначале действуют на произвольную пару шагов (a_1, a_2), а затем абстрагируются от нее. Подобным же образом в теории триплетов найдена возможность абстрагироваться от подоператорной тройки шагов (п. 24, 25) и таким образом получить формулу для символического умножения второй и третьей числовых единиц x_2, x_3 и (в общем случае) самых произвольных числовых триплетов. Но при попытке распространить этот подход на более общее умножение числовых совокупностей возникли новые трудности из-за особой сложности предмета, которой я могу здесь коснуться лишь вскользь[16].

34. Подействовав на произвольную совокупность шагов $\Sigma r_f 1_f$ совокупностью чисел $\Sigma m_g \mathrm{x}_g$ и получив таким образом, согласно п. 32, другую совокупность шагов $\Sigma x_h 1_h$, мы можем действовать по той же общей схеме с теми же частными значениями констант умножения на эту новую совокупность шагов некоторой новой совокупностью чисел, такой, как $\Sigma m'_{g'}$, $\mathrm{x}_{g'}$, и получить третью совокупность шагов, например $\Sigma x'_{h'} 1_{h'}$. Затем можно предположить, что деление ее на исходную совокупность шагов $\Sigma r_f 1_f$ (снова см. п. 32) приводит к частному, которое будет новой совокупностью чисел вида $\Sigma m''_{g''} \mathrm{x}_{g''}$. При этих условиях мы можем написать

$$\Sigma m'_{g'},\ \mathrm{x}_{g'}(\Sigma m_g \mathrm{x}_g \cdot \Sigma r_f 1_f) = \Sigma m''_{g''} \mathrm{x}_{g''} \cdot \Sigma r_f 1_f.$$

Но чтобы оправдать последующее отделение от подоператорной совокупности шагов или сокращение (ср. п. 25) этой формулы последовательных операций до следующей:

$$\Sigma m'_{g'},\ \mathrm{x}_{g'} \cdot \Sigma m_g \mathrm{x}_g = \Sigma m''_{g''} \mathrm{x}_{g''},$$

которую можно назвать формулой для (символического) умножения двух числовых совокупностей, должны удовлетворяться некоторые условия отделения; их можно исследовать, как показано далее.

---

[16] Более полный обзор этой теории совокупностей, с несколько отличными обозначениями (были использованы, например, символы $C_{r,s,t}$ и $n_{r,r',r''}$, чтобы обозначить коэффициенты, которые здесь имеют вид $1_{t,r,s}$ и $1'_{r,r',r''}$) и со специальным приложением к теории кватернионов, можно найти в "Essay", озаглавленном "Researches respecting quaternions. First Series" (Trans. Roy. Irish Acad. 1848. Vol. 21, pt 2. P. 199–296) [[26]].

Этот "Essay" не был полностью опубликован до 1847 г., но несколько экземпляров его были распространены в этом году, в частности, на втором Оксфордском собрании Британской ассоциации. Обсуждение той части предмета, о которой здесь идет речь, содержится главным образом на с. 225–231 цитированного выше тома.

35. Будем думать, что искомое отделение символов возможно и что это справедливо при обобщении процесса для триплетов в п. 24. Тогда система n^2 символических уравнений имеет вид

$$x_{g'}x_g = \sum 1'_{g,g',g''} x_{g''},$$

где $1'_{g,g',g''}$ – один из новой системы n^3 числовых коэффициентов, а сумма содержит n членов, отвечающих n различным значениям индекса g''. При тех же условиях приведенная выше формула для умножения совокупностей чисел разбивается на n уравнений вида

$$m''g'' = \sum m_g m'_{g'} 1_{g,g',g''}.$$

Здесь суммирование распространено на n^2 членов, возникающих при комбинациях значений индексов g и g'. Для всех таких комбинаций и для каждого из n значений f мы должны иметь (если требуемое отделение возможно) следующее уравнение для совокупностей шагов:

$$x_{g'} \,.\, x_g 1_f = x_{g'} x_g \,.\, 1_f.$$

И обратно, если мы можем удовлетворить эти n^3 уравнений для совокупностей шагов, то отсюда будут удовлетворяться и условия отделения п. 34, которые мы имели в виду. Но каждое из этих n^3 уравнений для совокупностей, вообще, само распадается на n уравнений для чисел. И, таким образом, вообще возникает не менее чем n^4 числовых уравнений в качестве обсуждаемых условий, которые можно представить формулой[17]

$$\sum 1_{f,g,h} 1_{h,g',h'} = \sum 1'_{g,g',h} 1_{f,h,h'};$$

здесь допустимы все комбинации значений индексов f, g, g', h' (от 1 до n для каждого); и в левой и в правой частях суммирование проведено по всем h. Чтобы удовлетворить этим n^4 уравнениям условий, могут быть использованы только $2n^3$ коэффициентов или, вернее, их отношений. И хотя теория пар и теория триплетов уже служили примером возможности выполнения требуемого отделения (по крайней мере в определенных случаях), но все же не было очевидно, что такое общее рассуждение[18] можно представить подобным образом, как это требуется в более общей теории СОВОКУПНОСТЕЙ.

Думаю, что отклонения от общей схемы и трудности, существование которых я предвидел в этой очень общей теории, удержали меня от дальнейшего продолжения ее (в то время, о котором я упоминал выше).

36. Была, однако, причина, которая побуждала меня придавать особую важность рассмотрению триплетов в отличие от более общих совокупностей, чему уже было дано некоторое объяснение. Это было желание связать некоторым новым и полезным (или по крайней мере интересным) способом исчисление с геометрией с

---

[17] Формулу, эквивалентную этой, но в несколько иных обозначениях, можно найти на с. 231 "Essay" в томе, на который есть ссылки выше [27].

[18] Некоторые замечания о таких общих редукциях можно найти на с. 251 цитированного выше "Essay".

помощью некоторых неоткрытых обобщений на пространство трех измерений метода построения или представления операций над прямыми линиями в плоскости (п. 2), который с успехом использован м-ром Уорреном[19] (а на самом деле и другими авторами, о сочинениях которых я тогда не слышал[20]); этот метод давал раз-

---

[19] *Warren J.* Treatise on the geometrical representation of the square roots of negative quantities. Cambridge, 1828 [[28]]. Я с большим удовольствием признаю, что многим обязан положениям этого трактата, хотя интерпретация символа $\sqrt{-1}$, используемая в нем, совершенно отлична от той, которую я принял в геометрических приложениях кватернионов.

[20] Несколько важных частностей относительно таких авторов собраны в уже цитировавшемся "Report on certain branches of analysis" (особенно с. 228–235) д-ра Пикока, замечания которого об их сочинениях и его собственные исследования по этому предмету заслуживают право на внимание. Что же до метода, описанного выше (в п. 36 этого "Предисловия"), то если умножение (так же как и деление) направленных линий в плоскости рассматривать как существенный элемент теории – как, я думаю, и должно быть, я рискну утверждать здесь, что истинным изобретателем был Арган [[29]], по крайней мере он был первым, определенно обнародовав этот метод в 1806 г. Хотя его "Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires", который был опубликован в Париже, известен мне только по упоминанию Пикока в его "Report" и по очерку об этом же "Essai", данному в ходе последовавшей переписки, или из серии сообщений между Франсэ [[30]], Сервуа [[31]], Жергонном [[32]]и самим Арганом (об этом тоже было замечание в этом "Report", и вследствие этого несколько лет назад мне была дана консультация). Эта серия статей была опубликована в "Annales des mathématiques" Жергонна в 1813 г. или около того. Мои рассуждения об этой переписке позволили установить полностью приоритет Аргана перед Франсэ относительно метода умножения направленных линий в плоскости (п. 36), который кратко описан выше и который впоследствии независимо изобретен Уорреном в 1828 г. и в том же году Муреем [[33]] в работе, озаглавленной "La vrai théorie des quantités négatives, et des quantités prétendues imaginaires" (Paris, 1828).

Если продолжить список таких независимых первооткрывателей этого важного и современного метода представления линий и конструирования произведения двух направленных линий плоскости (от которого, нужно заметить мимоходом, совершенно отличен мой собственный способ представления кватернионом произведения двух направленных линий в пространстве), то он будет включать (как я узнал позднее) прославленное имя Гаусса [[34]] в связи с его "Теорией биквадратичных вычетов" (Геттинген, 1832). С другой стороны, я не могу увидеть какое-нибудь предвидение этого метода умножения прямых линий в неясной, но оригинальной часто цитируемой статье Бюэ [[35]], озаглавленной "Mémoire sur les quantités imaginaires", которая появилась в "Philosophical Transactions" (London, 1806; статья прочитана в июне 1805 г.). Остроумный автор этой статьи, несомненно, образовал понятие представления направлений линий алгебраическими символами: он даже использовал (в № 35 своего "Мемуара" такие выражения, как $\sqrt{2}(\cos 45^\circ \pm \sin 45^\circ \sqrt{-1})$ для обозначения двух направленных диагоналей квадрата. Высокий авторитет Пикока (Report. P. 228) способствовал тому, что распространилось мнение, что геометрическая интерпретация символа $\sqrt{-1}$ для обозначения перпендикулярности была впервые утверждена Бюэ, хотя не однажды предлагалась другими авторами. В № 43 своей статьи Бюэ строит с большой элегантностью с помощью ломаной линии *AKE* или с помощью наклонной линии *AE* (где *KE* – перпендикуляр, равный $^1/_2\, a$, восстановленный в средней точке *K* данной линии *AB* или *a*) мнимый корень (*x*) квадратного уравнения $x(a-x) = {}^1/_2\, a^2$, что предлагал Карно (на с. 54 своей "Géometrie de position". Paris, 1804) [[36]] . Но когда он переходит к объяснению (в № 46 своей статьи), в каком смысле он рассматривает две линии *AE* и *EB*, или два построенных корня квадратного уравнения, имеющие произведение, равное данному значению $^1/_2\, a^2$ или $^1/_2\, \overline{AB}^2$, Бюэ специально ограничивает значение этого произведения, полученного умножением арифметических значений, и специально исключает рассмотрение положения линий-сомножителей из своей концепции умножения линий. Тогда, как мне кажется, само существо метода Аргана и других (п. 36) и вообще систем геометрической интерпретации основано на том, что проф. де Морган удачно, назвал "двойной алгеброй", чтобы принять в расчет положения (или направления) тех линий, которые перемножаются. Как я уже намекнул и как полнее проявится в ходе этой работы, моя собственная концепция произведения двух направленных линий в

новидность геометрической интерпретации обычному и хорошо известному мнимому символу алгебры.

В этом методе сложение линий выполнялось согласно тем же правилам, что и композиция движений или сил, – проведением диагонали параллелограмма. Умножение двух линий (в данной плоскости) соответствовало построению некоторой четвертой пропорциональной, которая должна быть линией в той же плоскости и являться четвертой пропорциональной к трем: выбранной положительной единице и двум линиям-сомножителям. Таким образом, четвертая пропорциональная, или произведение линий, наклонена к одной из линий (множителю) под тем же углом (отсчитываемым в том же направлении), с каким другая линия-сомножитель наклонена к выбранной единичной линии, а ее длина должна быть четвертой пропорциональной (в старом обычном значении слова) к длинам единичной линии и двух линий-сомножителей. Вычитание, деление, возведение в степень и извлечение корней объяснялись и строились по тем же принципам и с помощью рассуждений того же общего характера, которые можно легко развить из беглого наброска, данного только что и известного к этому времени довольно широкому кругу читателей.

Таким образом, благодаря операциям над прямыми линиями в одной плоскости символ $\sqrt{-1}$ получил совершенно ясную интерпретацию, как означающий вторую единичную линию, проведенную под прямым углом[21] к той линии, которая выбрана

пространстве как КВАТЕРНИОНА совершенно отлична от чисто арифметического произведения числовых величин Бюэ и от произведения мнимых чисел (или третьей компланарной линии) метода Аргана. Все-таки я думал, что нужно представить на рассмотрение предыдущее замечание об открытии этого последнего метода на суд лиц, более сведущих в истории науки, чем я. Несколько дополнительных замечаний и ссылок по этому поводу можно найти в следующем примечании.

[21] Кроме того, что уже было сказано по поводу интерпретации символа $\sqrt{-1}$ аббатом Бюэ, м-р Бенджамен Гомпертц [[37]] в своем очень остроумном трактате "The principles and applications of imaginary quantities. Book II, derived from a particular case of functional projections" (London, 1818), выяснил, что знаменитый д-р Уоллис [[38]] из Оксфорда в своем "Treatise of algebra" (London, 1685) предложил интерпретировать мнимые корни квадратного уравнения перпендикулярной линией, на которой корни откладывались бы как реальные. Таким образом, Уоллис (в своей гл. LXVII) заметил: "Так что, тогда как в случае отрицательных корней мы говорим: точка B не может находиться на AC Впереди, но она может быть Позади на той же линии, мы должны здесь сказать: в случае Отрицательного Квадрата точка B не может находиться, как это предположено, на линии AC, но Выше этой линии в той же самой плоскости она может быть. Это я объясняю более подробно, потому что это понятие ново (как я думаю). И настоящим я заявляю, что я надеюсь объяснить то, что мы обычно называем Мнимыми Корнями Квадратных Уравнений".

И снова (гл. LXVIII, с. 269) Уоллис предлагает строить такие корни уравнения $aa \mp ba + œ = 0$: "На $ACa = b$, делящейся в точке C пополам, восстановить перпендикуляр $CP = \sqrt{œ}$. Взяв $PB = {}^1/_2\, b$, построить PBC – прямоугольный треугольник (с той стороны CP, где Вам нравится). Его прямой угол будет, поэтому или в C или в B в зависимости от того, что больше PB или PC. В зависимости от этого BC будет синусом или тангенсом (при радиусе PB), оканчивающимся в PC. Прямые линии AB, Ba являются двумя значениями a. Оба положительны, если в уравнении фигурирует $-ba$. Оба отрицательны, если $+ba$. Эти значения будут (как мы говорим) Действительными, если прямой угол в точке C, и Мнимыми, если в точке B". Эти пассажи должны всегда представлять исторический интерес (я думаю), поскольку они служат примером способа, каким в семнадцатом веке человек, столь выдающийся своей способностью интерпретации аналитических выражений, как д-р Уоллис, пытался приложить эти способности к геометрической конструкции мнимых корней уравнения, и по его решению такие корни были столь же ясно интерпретированы, как и те, "которые мы называем действительными" величинами.

в качестве положительной единицы. Но когда было предложено покинуть плоскость и строить систему, которая имела бы некоторую общую аналогию с известной, описанной системой, но была бы распространена на случай пространства[22], тогда возникли трудности нового характера, в попытке преодолеть которые я был ободрен моим другом, упоминавшимся уже Джоном Т. Грэйвсом. Он имел желание преодолеть их тем или иным путем и наметил проект в то же время, что и я, или возможно, раньше.

37. Предположение относительно такого распространения правила умножения линий с плоскости на пространство, которое давно приходило мне на ум (в 1831 г.), можно кратко изложить здесь как иллюстрацию общего характера тех старых рассуждений. Пусть A означает точку, лежащую по предположению на поверхности фиксированной сферы, описанной около начала координат радиусом, равным единице длины. И пусть эта точка A называется единичной точкой. Пусть также предполагается, что B и C – две точки-сомножители на той же поверхности, представляющие направления OB, OC двух линий-сомножителей в пространстве, для которых нужно выполнить (или интерпретировать) умножение, т.е. определить (по некоторому заданному правилу) точку-произведение D или направление OD линии-произведения. Тогда кажется, что аналогия операциям в плоскости будет неплохой, если мыслить D взятой на круге ABC; *дуги* AB, CD этого (вообще го-

---

Его особая интерпретация этих мнимых корней квадратного уравнения кажется мне менее изящной, чем предложенная много позднее Бюэ. Но можно отметить, что была ли его точка *B на* линии *ACa* или *вне* ее, Уоллис (подобно Бюэ и многим более современным авторам) рассматривал эту прямую линию как сумму в некотором смысле (или по крайней мере аналог суммы) двух последовательных линий *AB*, *Ba*, которую две последние проведенные линии образуют как целое – линию от начальной точки *A* к конечной точке *a*. Соответственно этому он строит два корня квадратного уравнения, алгебраическая сумма которых равна *b*. В самом деле, Уоллис замечает (на той же с. 269), что когда эти два корня являются алгебраически мнимыми или геометрически построены с помощью точки *B*, которая лежит выше линии *ACa*, тогда эта прямая линия не равна комбинации *AB* + *Ba*. Но кажется, это не более чем мера предосторожности: он утверждает, что две стороны треугольника могут быть по *длине* равны третьей.

В гл. LXIX, с. 272, он резюмирует: “Мы находим следовательно, что в Уравнениях либо Lateral, либо Quadratick, которые в строгом смысле первой точки зрения кажутся Невозможными, допустимы некоторые ослабления, делающие уравнения Возможными, и в такой смягченной интерпретации они могут быть даже полезными”.

Для Lateral-уравнений (уравнений первой степени) смягчения, о которых здесь говорилось, состоят просто в обычной интерпретации отрицательных корней с помощью линий, проведенных в обратную сторону от точки, от которой они ⟨линии⟩ вначале мыслились проведенными вперед. Для квадратных уравнений с мнимыми корнями Уоллис “ослабляет” проблему, заменяя наклонную линию *ABa* такой прямой линией *ACa*, которая представляет данную алгебраическую сумму (*b*) двух корней уравнения или частей ломаной линии *AB*, *Ba*. Надо заметить, что он (кажется) рассматривал алгебраическую полуразность этих двух корней *AB*, *Ba*, представляя ее во всех случаях линией *BC*, проведенной в средней точке *C* линии *Aa*, что опять-таки согласуется со многими современными системами. Таким образом, Уоллис, кажется, в 1685 г. обладал (по крайней мере в зародыше) некоторыми элементами современных методов Сложения и Вычитания направленных линий (я не претендую на то, чтобы утверждать, что он обладал ими полностью и последовательно). Но основной пункт – умножение прямых на плоскости – не появляется у Уоллиса; Уоллис предвосхитил метод Аргана не более, чем Бюэ (см. предыдущую сноску).

[22] Гораздо позднее я узнал, что и другие пытались осуществить некоторое такое распространение на пространство, но путями, отличными от моего.

воря) малого круга сферы, будучи равными по длине и отложенными в одном направлении, имеют поэтому две параллельные *хорды* AD, BC; тогда сохраняется старое правило умножения длин, а сложение линий интерпретируется, как и прежде. Но оказалось, что в этой системе в выражения координат произведения[23] входят радикалы и дроби. И хотя квадрат линии (или случай произведения равных сомножителей) можно определить, если условиться брать большой круг AB, где точка C совпадает с B, все же, кажется, остается существенная неопределенность в построении *обратной* линии. Согласно рассмотренному здесь определению, достаточно взять хорду BC, параллельную касательной плоскости к сфере в единичной точке, чтобы сделать точку-произведение D совпадающей с точкой A. Существовало большое и (как я думал) фатальное возражение против этого метода построения произведения – не соблюдался дистрибутивный принцип умножения; в этом методе произведение суммы не равнялось сумме произведений: я отказался от предположения в целом.

38. Другая конструкция для произведения двух линий в пространстве, аналогичная кое в чем предыдущей (по характеру и предположениям), появилась у меня в 1835 г. и независимо ⟨от меня⟩ в 1836 г. у м-ра Дж.Т. Грэйвса; в этом году он писал мне по данному вопросу. Можно кратко охарактеризовать ее, сказав, что вместо рассмотрения малого круга ABC и проведения хорды AD из единичной точки к точке-произведению, параллельной хорде BC, соединяющей две точки-сомножители (как это было в последней системе), теперь была взята дуга AD большого круга на сфере, такая, что она разрезала пополам дугу BC другого большого круга и поэтому сама делилась пополам. Или, как позднее мне сформулировал это правило м-р Грэйвс: "Разделить угол между линиями-сомножителями, а затем увеличить в два раза угол между единичной линией и делящей линией". Предполагается также, что выполняется правило умножения длин.

М-р Грэйвс сделал несколько тонких замечаний о следствиях этих конструкций и предложил несколько дополнительных правил, чтобы устранить поризматический характер некоторых из них. Он заметил, что с этими интерпретациями корень из отрицательной единицы линии, или триплет $(-1, 0, 0)^{1/2}$, остается неопределенностью вида $(0, \cos\theta, \sin\theta)$, где θ произвольно, тогда как могут возникать случаи, в которых "незначительнейшая перемена" линии-сомножителя вызвала бы "значительное изменение" в положении линии-произведения. Он полагал, что этот результат приведет к "нарушению основного свойства умножения" – его действия на сумму. Он оставил мне исследование общих выражений для "координатных конституент" результирующего "триплета" или линии-произведения, выраженных через конституенты сомножителей. А фактически я уже получил такие выражения и

[23] Прямоугольные координаты (или проекции) двух линий-сомножителей и линии-произведения обозначены через $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$; если мы напишем для краткости $r = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$, $r' = \sqrt{(z'^2+y'^2+z'^2)}$, $p = xx'+yy'+zz'$, то выражения, которые я нашел для x'', y'', z'', можно кратко представить уравнениями

$$\frac{x''-rr'}{rx'-r'x} = \frac{y''}{ry'-r'y} = \frac{z''}{rz'-r'z} = \frac{rx'-r'x}{p-rr'}.$$

нашел, что они включают радикалы и дроби и нарушают дистрибутивный принцип, как в только что описанной системе п. 37, с которой, в самом деле, упомянутая здесь имеет очень тесную аналитическую связь, на мой взгляд[24].

39. М-р Дж.Т. Грэйвс, однако, сообщил мне в то же самое время другой метод, который, как он сказал, он предпочитал всем применяемым им способам "представления линий в пространстве и перемножения таких линий". Этот метод состоял в рассмотрении таких линий как разновидности "составной пары" (compound couple) или как определенной двумя парами: одна – в плоскости xy, а другая – в перпендикулярной к этой плоскости. Легко понять, что правила, предложенные мной для сложения и умножения пар (п. 17), согласуются во всех аспектах с предварительно известным методом п. 36 представления операций (с теми же названиями) над линиями в одной плоскости. Из этой концепции составных пар м-р Грэйвс вывел "общее правило для умножения триплетов", которое я здесь переписываю[25], сократив только обозначения и записывая ρ и ρ_1 вместо радикалов $\sqrt{x^2+y^2}$ и $\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ (или проекций линий-сомножителей на плоскость xy):

«$(x, y, z)(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2)$,

где

$$x_2 = (\rho\rho_1 - zz_1)\frac{xx_1 - yy_1}{\rho\rho_1}, \quad y_2 = (\rho\rho_1 - zz_1)\frac{xy_1 + yx_1}{\rho\rho_1}, \quad z_2 = z_1\rho + z\rho_1».$$

Эта специфическая система выражений ни ему не казалась имеющей дальнейшее развитие, ни мое собственное внимание не привлекла в то время. Но я думаю, что она заслуживает быть принятой к сведению здесь, особенно в силу замечательного совпадения: к ней пришел независимо и другим путем второй член той же семьи через 10 лет и тоже сообщил мне[26]. И, возможно, меня можно извинить, если я оставлю здесь хронологический порядок, чтобы дать краткий отчет о ходе мыслей,

---

[24] В использованных недавно обозначениях выражения, найденные мной для координат произведения в случае системы п. 38, заключались в уравнениях

$$\frac{x'' + rr'}{rx' + r'x} = \frac{y''}{ry' + r'y} = \frac{z''}{rz' + r'z} = \frac{rx' + r'x}{p + rr'}.$$

Они отличаются от найденных ранее (п. 37) только знаком в радикале r' (или r), которые представляют собой длины линий-сомножителей. Условия, чтобы обе системы содержались в этих уравнениях, таковы

$$xx'' + yy'' + zz'' = r^2x', \quad x'x'' + y'y'' + z'z'' = r'^2x, \quad x''^2 + y''^2 + z''^2 = r^2r'^2$$

и квадратное уравнение относительно x'', получаемое исключением y'' и z'', само разделяется на два отдельных множителя, каждый из которых линеен относительно x'', а именно:

$$(p - rr')(x'' - rr') - (rx' - r'x)^2 = 0, \quad (p + rr')(x'' + rr') - (rx' + r'x)^2 = 0.$$

Первое соответствует системе п. 37, второе – системе п. 38.

[25] Из письма м-ра Грэйвса от 8 августа 1836 г.

[26] Чарлз Грэйвс – профессор математики в университете в Дублине; письмо от 14 ноября 1846 г.

благодаря которому его брат, преподобный Чарлз Грэйвс, пришел в 1846 г. к точно тем же соотношениям между конституентами трех триплетов.

40. Профессор Грэйвс использовал систему двух новых мнимостей i и j, о которых он думал, что i вызывает вращение (вообще говоря, коническое) на 90° вокруг оси z, тогда как j заставляет линию вращаться на равный же угол в ее собственной вертикальной плоскости (т.е. в плоскости этой линии и оси z). Затем он предложил перемножать два триплета $x + iy + jz$ и $x' + iy' + jz'$ специальным образом и получить третий триплет $x'' + iy'' + jz''$. Полученные таким образом соотношения между координатами, или конституентами, были идентичными (как оказалось) тем самым, которые его брат нашел раньше. Каждый из этих символов i и j был сортом корня четвертой степени из единицы, и первый (но *не* второй!) имел свойство действовать на сумму, действуя на каждую из ее частей отдельно [39].

Таким образом, как заметил профессор Грэйвс, умножение триплетов (по этой схеме) не было дистрибутивной операцией, хотя коммутативным оно являлось. Метод привел его к элегантному экспоненциальному выражению для линии в пространстве, а именно $r\varepsilon^{il}\varepsilon^{j\lambda}$, где r – радиус-вектор, а l, λ могли быть названы долготой и широтой линии, так что проекции их в координатах таковы:

$$x = r\cos l \cdot \cos\lambda, \quad y = r\sin l \cdot \cos\lambda, \quad z = r\sin\lambda$$

(эти названия оправданы естественной связью понятий с линиями). Тогда правило для умножения двух линий можно выразить очень простой формулой:

$$r\varepsilon^{il}\varepsilon^{j\lambda} \cdot r'\varepsilon^{il'}\varepsilon^{j\lambda'} = rr'\varepsilon^{i(l+l')}\varepsilon^{j(\lambda+\lambda')}.$$

Таким образом, линии перемножаются (как и в других системах, упомянутых выше), а долготы и широты соответственно складываются. Фактически это было правило, выраженное координатной формулой м-ра Грэйвса (п. 39).

41. Я надеюсь, что мои собственные заслуги в этом вопросе будут рассматриваться не как претензия, но как цепь догадок, которые могут помочь иллюстрировать это исследование, если я отважусь упомянуть здесь, что первое предположение относительно геометрических триплетов, которое я нашел среди моих бумаг, относится ко времени до 1830 г. Оно состояло в том, что линии в пространстве можно складывать по тому же правилу, что и в плоскости, а при перемножении умножаются их длины и складываются их полярные углы. В методе п. 36, известном мне тогда как метод Уоррена, если мы пишем $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, мы имеем для умножения в плоскости уравнения, которые можно записать так: $r'' = rr'$, $\theta'' = \theta + \theta'$. Отсюда мне казалось, что если использовать для пространства преобразование прямоугольных координат в полярные:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \cdot \cos\varphi, \quad z = r\sin\theta \cdot \sin\varphi,$$

то, может быть, естественно определить умножение линий в пространстве аналогичными формулами $r'' = rr'$, $\theta'' = \theta + \theta'$, $\varphi'' = \varphi + \varphi'$. Однако эти формулы приводят к радикалам, как, например, в выражении

$$x'' = xx' - (y^2 + z^2)^{1/2}(y'^2 + z'^2)^{1/2},$$

тогда как для случая плоскости значения для прямоугольных координат произведения были рациональными, именно (ср. п. 17)

$$x'' = xx' - yy', \quad y'' = xy' + yx'.$$

Но это мое старое (и неопубликованное) предположение, несовместимое с дистрибутивным принципом, хотя и обладает некоторым сходством с рассмотренными выше результатами п. 39, 40 Джона и Чарлза Грэйвсов, не может рассматриваться как предвосхищение их мысли. Все мы согласны относительно сложения долгот двух сомножителей (в упомянутом выше смысле), но они складывали и широты, в то время как я имел менее удачную мысль о сложении дополнений до широт (colatitudes) или угловых расстояний от некоторой линии (x) вместо расстояний от плоскости (xy). И эта разница в схемах вызывает очень важную разницу в результатах. И в самом деле, две системы совершенно различны, хотя и существует некоторая аналогия между ними.

42. Я упомяну здесь еще об одной системе, о которой мне сообщил[27] в 1840 г. старший из двух братьев и которая включала метод представления обыкновенных мнимых величин алгебры с помощью соответствующей единственной точки на поверхности сферы, описанной около начала радиусом, равным единице (как в п. 37). Отсюда следовало, что обычное мнимое выражение $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ может быть обозначено триплетом (x, y, z) при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и что правила, полученные таким образом для умножения таких триплетов, возможно, допускают некоторую аналогию с правилами для более общего случая, когда конституенты x, y, z совершенно независимы друг от друга[28].

"Способ сферического представления величин" м-ра Грэйвса выражен им в следующих словах: "Все положительные величины r могут быть представлены точками на заданной полуокружности, если взять конец дуги $\mathrm{arc}2\mathrm{tg}^{-1}r$ (отсчитываемой от конца полуокружности А) за представление r. Затем рассмотрим нашу сферу как порожденную вращением полуокружности[29] ABC вокруг оси AC (в одном или в другом направлении, по соглашению). Пусть положение точки на окружности обозначается через $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$, когда полуокружность сместилась на угол θ, если в начальном положении это была точка r". Я совершаю очень незначительное преобразование этого утверждения, когда представляю его так: построим все величины, действительные или мнимые, по известному методу, уже описанному в п. 36, проведя прямые линии из заданной точки (A) единичной сферы в касательной плоскости. Удвоим все линии, проведенные таким образом, и будем считать концы удвоенных линий стереографическими проекциями точек на сферу. Бесконечность,

[27] Дж.Т. Грэйвс в письме от 17 октября 1840 г.

[28] М-р Грэйвс, кажется, на самом деле не развил такие правила, по крайней мере он не сообщил мне их. Возможно, он следовал плану, описанному в п. 42: умножаются (как прежде) длины и складываются (как прежде) долготы; но чтобы получить тангенсы половины широты произведения, нужно перемножить тангенсы половинных широт сомножителей.

[29] Письмо м-ра Грэйвса сопровождал чертеж, который, кажется, необязательно воспроизводить здесь.

таким образом, представляется в описанной здесь частной системе м-ра Грэйвса точкой, диаметрально противоположной точке A.

В моей попытке – "с совершенным почтением" – зарегистрировать каждое обстоятельство, даже отдаленный намек на родственный путь мыслей, которые могли послужить даже *непрямым* стимулятором для *меня*, я не должен опускать следующее признание м-ра Дж.Т. Грэйвса: «Именно пассаж в письме от де Моргана привел меня к этому. Он выразил желание представить "круговую зависимость величин", чтобы объяснить переход от положительного к отрицательному через бесконечность»[30].

43. Предыдущие примеры могут служить образцами попыток, которые в значительном числе были предприняты много лет назад м-ром Грэйвсом и мною, с одной стороны, чтобы распространить на пространство геометрическую конструкцию для умножения линий, которая нам была известна из работы м-ра Уоррена, а с другой – более полно представить определение моей концепции алгебраических триплетов.

Я не буду здесь надоедать моим читателям дополнительным отчетом о предположениях по этому предмету, которые являлись ему или мне в разные времена до того, как я пришел к кватернионам путем, который я и объясняю в настоящее время. Но я хочу упомянуть, во-первых, что среди обстоятельств, которые помогли мне избежать потери из поля зрения основного вопроса, а также попытки возврата к моим ранним рассуждениям о триплетах и совокупностях, была публикация первой статьи "Об основаниях алгебры" профессора де Моргана, экземпляр которой он прислал мне в 1841 г.[31]. В этой статье, кроме обсуждения других и более важных предметов, была рецензия на мой "Опыт чистого времени" в свободном и дружеском тоне. И по вопросу о триплетах, например, было сказано следующее: «В этой ветви алгебры логики (это относится к п. 36 настоящего "Предисловия") эти линии должны лежать в одной плоскости или по крайней мере быть полученными одним только изменением направления. Та ветвь, которая будет приложена к линии, проведенной в некотором направлении из точки, или определенная двумя различными направлениями, должна быть найдена... Распространение на геометрию трех измерений[32] неосуществимо до тех пор, пока мы не можем задать два

[30] Август де Морган, эсквайр, профессор математики в университетском колледже в Лондоне.

[31] В "Cambridge Philosophical Transactions" (Vol. 7, pt. 2. С. 173–187).

[32] Профессор де Морган выдвинул в то же время замечательное предположение, которое он мог считать полезным впоследствии при иллюстрации и систематизировании с помощью его теории кубических корней из отрицательной единицы; эти корни он использовал как геометрические операторы в своей статье о "Тройной алгебре" (Triple algebra // Cambridge Philos. Trans. Vol. 8, pt. 3). А именно, что "распространение на три измерения" может "требовать решения уравнения $\varphi^2 x = -x$". Я очень сожалею, что мой план не позволит мне попытаться дать в этом "Предисловии" какой-нибудь обзор этой весьма оригинальной статьи профессора де Моргана, первый намек на которую он захотел приписать публикации моих собственных замечаний о кватернионах в "Philosophical Magazine" за июль 1844 г. Такие же сожаления относятся к независимым, но несколько более поздним исследованиям м-ров Джона и Чарлза Грэйвсов (в том же году) относительно других систем триплетов, которые включали кубические корни из положительной единицы и о которых сохранился отчет в "Proceedings of the Royal Irish Academy".

символа Ω и ω, так чтобы из $a + b\Omega + c\omega = a_1 + b_1\Omega + c_1\omega$ следовало бы $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$, и определенного символа обычной алгебры, удовлетворяющего этому условию, нет".

Мои символы x_2, x_3 (от 1834–1835 гг.) не были тогда известны ему ни из публикаций, ни каким-нибудь частным образом; а они были введены именно, чтобы удовлетворять предыдущим условиям. Но я сам не был удовлетворен ими, так как не считал их достаточно "определенными" (ср. п. 29).

44. В ранних номерах "Cambridge Mathematical Journal" появилось несколько остроумных и оригинальных статей покойного м-ра Грегори [[40]] и других способных аналистов о знаках "+" и "–", о степенях знака "+", о ветвях кривых в разных плоскостях и о других, связанных с этими предметами. Я надеюсь, не будет непочтительностью, если я признаюсь, что не помню, чтобы они имели много влияния на мой ход мыслей. Возможно, я не был достаточно подготовлен (или предрасположен) взглянуть вообще на алгебру и ее приложения к геометрии с той же точки зрения и поэтому не изучал всех этих статей с должным вниманием. По крайней мере если в моих собственных взглядах будет найдено что-либо, несовместимое с тем, что выдвигается в упоминаемых статьях, то я хотел бы, чтобы это рассматривалось как попытка, сделанная со всем уважением, а не из духа противоречия. И если сейчас я опускаю всякие другие упоминания об этом, то это отчасти потому, что без глубокого изучения можно оказаться несправедливым к ним, а отчасти потому, что у меня нет претензии писать здесь историю науки и даже одного раздела математических рассуждений или давать нечто большее, чем отчет о развитии моих собственных мыслей в одном классе вопросов. По этим причинам я упускаю некоторые другие исследования, имеющие отношение к мнимым символам алгебры[33], которые не помогли мне в моих исследованиях, и перехожу сразу к кватернионам.

---

[33] Однако я не хочу оставить без упоминания здесь замечательное использование символа $\sqrt{-1}$, которое принадлежит покойному профессору Мак-Куллаху из Дублина. Его большой и оригинальный талант должен всегда вспоминаться с восхищением в математической и физической науке. Этот ум был связан с исследованием общего отражения света, кажется с 1843 г. (Proc. Roy. Irish Acad. 1845). Использование мнимых величин основывалось на теореме об эллипсе; она была выражена следующим образом в вопросе, предложенном на экзамене для выбора Junior Fellows в 1842 г. (см. экзаменационные статьи Дублинского университета за тот год, опубликованные в 1843 г., с. LXXXIV): "В пространстве дан эллипс, центром которого является начало координат. Точки (x, y, z) и (x', y', z') эллипса – концы сопряженного диаметра. Существуют мнимые величины $\frac{y+y'\sqrt{-1}}{x+x'\sqrt{-1}}$, $\frac{z+z'\sqrt{-1}}{x+x'\sqrt{-1}}$, которые являются константами для любых сопряженных диаметров". Эта элегантная теорема Мак-Куллаха может быть доказана без обычных принципов для символа $\sqrt{-1}$, если заметить, что следующие выражения для шести координат, о которых идет речь в теореме:

$$x = a\cos v + a'\sin v,\quad y = b\cos v + b'\sin v,\quad z = c\cos v + c'\sin v,$$

$$x' = a'\cos v - a\sin v,\quad y' = b'\cos v - b\sin v,\quad z' = c'\cos v - c\sin v$$

дают

$$\frac{x+x'\sqrt{-1}}{a+a'\sqrt{-1}} = \frac{y+y'\sqrt{-1}}{b+b'\sqrt{-1}} = \frac{z+z'\sqrt{-1}}{c+c'\sqrt{-1}} = \cos v - \sin v\sqrt{-1}.$$

45. После таких подготовительных рассмотрений, как я здесь описал, я возобновил (в 1843 г.) попытки применить общую концепцию триплетов к умножению линий в пространстве, с тем чтобы умножение допускало сохранение дистрибутивного принципа, с которым несовместимы некоторые ранее предложенные системы. Сначала я предполагал, что смогу сохранить также и коммутативный принцип или обращение множителей, т.е. изменение их порядка (п. 24, 29). Вместо моих старых символов x_1, x_2, x_3 (см. п. 22) я написал коротко 1, i, j; так что числовой триплет принял вид $x + iy + jz$, где я предполагал интерпретировать x, y, z как три прямоугольные координаты, а сам триплет – как линию в пространстве. Из аналогии с парами я предположил $i^2 = -1$ и попробовал положить также $j^2 = -1$, что я интерпретировал как вращение на два прямых угла в плоскости xz, так же как $i^2 = -1$ соответствовало такому вращению в плоскости xy. И так как я вначале предположил, что ij и ji равны, как при обычных вычислениях в алгебре, то произведение двух триплетов, казалось, приняло форму

$$(a + ib + jc)(x + iy + jz) = (ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx) + ij(bz + cy).$$

Сразу же я не знал, что делать с произведением ij. Теория триплетов, казалось, требовала, чтобы оно само было триплетом вида

$$ij = \alpha + i\beta + j\gamma,$$

где коэффициенты α, β, γ – некоторые постоянные числа. Но возникал вопрос, каким образом должны быть определены эти числа, чтобы наилучшим образом приспособить полученную формулу умножения к некоторым основным геометрическим аналогиям.

46. Чтобы помочь себе в приложении таких аналогий, я рассмотрел случай, где координаты b, c были пропорциональны y, z, так что две линии-сомножители были в одной общей плоскости, содержащей единичную линию или ось x. В этом частном случае было известно значение произведения линий, рассматриваемого как четвертая пропорциональная к единичной линии (на упомянутой только что оси) и к двум компланарным линиям-сомножителям. Я нашел без труда, что координаты проекций такой четвертой пропорциональной здесь:

$$ax - by - cz, \quad ay + bx, \quad az + cx.$$

Это, так сказать, коэффициенты при 1, i, j в недавно написанном выражении для произведения трех триплетов, которые представляют линии-сомножители. На самом деле, если мы предполагаем $y = \lambda b$, $z = \lambda c$, где λ – любой коэффициент, мы имеем два идентичных уравнения [41]

$$(ax - \lambda b^2 - \lambda c^2)^2 + (\lambda a + x)^2(b^2 + c^2) = (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + \lambda^2 b^2 + \lambda^2 c^2),$$

$$\mathrm{tg}^{-1}\frac{(\lambda a + x)(b^2 + c^2)^{1/2}}{ax - \lambda(b^2 + c^2)} = \mathrm{tg}^{-1}\frac{(b^2 + c^2)^{1/2}}{a} + \mathrm{tg}^{-1}\frac{\lambda(b^2 + c^2)^{1/2}}{x},$$

которые выражают требуемые геометрические условия. Затем в данном частном случае компланарности было допущено условие $bz - cy = 0$, чтобы иметь триплет

$$(ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx)$$

в качестве произведения, полученного при перемножении двух линий, соответствующих триплетам $a + ib + jc$ и $x + iy + jz$.

Здесь четвертый член $ij(bz + cy)$ кажется просто лишним. На момент это навело меня на мысль, что, возможно, произведение ij нужно считать равным нулю. Но я увидел, что этот член (или часть) произведения получался при вычислении как сумма двух следующих: $ib.jz$, $jc.iy$ и что эта сумма исчезала, если мы делали менее жесткое предположение, как мне казалось, а именно при $bz = cy$ и $ij = -ji$ или, что то же, $ij = +k$, $ji = -k$, где значение произведения k еще оставалось неопределенным.

47. Таким способом, *без* нового предположения $bz - cy = 0$ я имел для произведения двух триплетов выражение четырехчленной формы

$$(a + ib + jc)(x + iy + jz) = (ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx) + k(bz - cy).$$

Я видел, что хотя произведение суммы квадратов конституент двух множителей не может быть разложено на три квадрата рациональных функций от них, но все-таки оно *может* быть представлено, вообще говоря, как сумма *четырех* таких квадратов, а именно квадратов четырех коэффициентов при 1, i, j, k только что выведенного выражения. Итак, без каких-либо предположений о соотношениях между a, b, c, x, y, z существовало тождество

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax - by - cz)^2 + (ay + bx)^2 + (az + cx)^2 + (bz - cy)^2.$$

Это привело меня к мысли, что, возможно, вместо того чтобы пытаться ограничить сами триплеты $a + ib + jc$ или (a, b, c), следует рассматривать их только как вырожденную форму КВАТЕРНИОНОВ, таких, как $a + ib + jc + kd$ или (a, b, c, d), где символ k означает некоторый новый вид единичного оператора. И, таким образом, моя старая концепция совокупностей п. 30 может получить новое и полезное приложение. Но для ясного оперирования с такими кватернионами необходимо было фиксировать значение квадрата k^2 этого нового символа k, а также значения произведений ik, jk, ki, kj. Кажется естественным (после того как выше положено $i^2 = j^2 = -1$ и $ij = k, ji = -k$) предположить также, что $ki = -ik = -i^2j = +j$ и $kj = -jk = j^2i = -i$. Предположение, которое надо сделать относительно k^2, было менее очевидно. Некоторое время я склонен был считать этот квадрат равным положительной единице, так как $i^2j^2 = +1$. Но более подходящим показалось предположить в соответствии с предыдущими выражениями для произведений i, j, k, что

$$k^2 = ijij = -iijj = -(-1)(-1) = -1.$$

48. Таким образом, все фундаментальные предположения для умножения двух кватернионов были завершены и заключались в формулах

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j,$$

которые дали мне уравнение

$$(a, b, c, d)(a', b', c', d') = (a'', b'', c'', d'')$$

или

$$(a + ib + jc + kd)(a' + ib' + jc' + kd') = a'' + ib'' + jc'' + kd'',$$

когда и только когда удовлетворяются четыре отдельные уравнения для конституент этих трех кватернионов:

$$a'' = aa' - bb' - cc' - dd', \quad b'' = (ab' + ba') + (cd' - dc'),$$

$$c'' = (ac' + ca') + (db' - bd'), \quad d'' = (ad' + da') + (bc' - cb').$$

Так как мне не была известна теорема Эйлера относительно суммы четырех квадратов (с помощью которой я мог бы предвосхитить результат), то я проверял эти выражения для a'', b'', c'', d'' через свойство модулей:

$$a''^2 + b''^2 + c''^2 + d''^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2).$$

Я видел, что если вместо представления линии триплетом вида $x + iy + jz$ мы договоримся представлять его другой трехчленной формой $ix + jy + kz$, то мы сможем выразить искомое произведение двух линий в пространстве КВАТЕРНИОНОМ, конституенты которого имеют очень простые геометрические значения, именно по следующему правилу:

$$(ix + jy + kz)(ix' + jy' + kz') = w'' + ix'' + jy'' + kz'',$$

где

$$w'' = -xx' - yy' - zz', \; x'' = yz' - y'z, \; y'' = zx' - xz', \; z'' = xy' - x'y.$$

Так что часть w'', не зависящая от i, j, k, в этом выражении для произведения представляет произведение длин двух линий-сомножителей, умноженное на косинус угла, дополнительного к углу, образуемому ими. Оставшаяся часть $ix'' + jy'' + kz''$ этого произведения двух триномиальных выражений представляет собой линию, которая по длине есть произведение тех же самых двух длин, умноженное на синус угла между ними, тогда как по направлению – это перпендикуляр к плоскости линий-сомножителей и такой, что вращение вокруг линии-множителя от линии-множимого к линии-произведению (или к линии-части всего кватерниона-произведения) имеет тот же правый (или левый) характер, что и вращение вокруг положительной полуоси k (или полуоси z) от положительной полуоси i (или x) к j (или y).

49. Когда понятия, описанные выше, развернулись и укрепились в моем сознании, я почувствовал, что новый инструмент для приложения исчисления к геометрии, о котором я так долго думал, теперь получен, по крайней мере частично. И хотя я не сообщал несколько предложений относительно триплетов в течение многих лет даже друзьям (за исключением названий), все же я сразу предложил доложить эти результаты относительно кватернионов Королевской ирландской

академии (на собрании Совета[34] в октябре 1843 г. и на генеральном собрании[35], последовавшем вскоре), введя связь теории со сферической тригонометрией, несколько очерков появились несколько месяцев спустя в Лондоне (Philos. Mag. 1844. Vol. 2, Jule).

Нет необходимости подробно останавливаться на этой связи кватернионов со сферической тригонометрией и вообще со сферической геометрией, так как она достаточно объясняется в заключительных главах этой книги. Но, может быть, правильно дать здесь краткий отчет о немного более позднем, но до сих пор не опубликованном рассуждении частично геометрического и частично метафизического (или априорного) характера. Этими рассуждениями я пытался объяснить и подтвердить некоторые результаты, которые с первого взгляда могут показаться странными по сравнению с теми, к которым привел меня мой анализ относительно квадриномиальных форм и некоммутативного свойства произведения двух направленных линий в пространстве.

50. Пусть затем ПРОИЗВЕДЕНИЕ двух линий с совпадающим началом или, что то же, двух векторов, исходящих из общего начала, рассматривается как нечто, что имеет ВЕЛИЧИНУ в том смысле, что оно удваивается, утраивается и т.д. при удвоении, утроении и т.д. любого сомножителя.

Пусть оно также мыслится имеющим в некотором смысле КАЧЕСТВО, аналогичное направлению, которое некоторым образом однозначно связано с направлением двух линий-сомножителей. В частности, будем думать (чтобы сохранить аналогию с алгебраическим умножением), что его направление обращено (во всех отношениях), если обращено одно из направлений сомножителей, и, следовательно, оно восстанавливается, если оба из них обращены. С другой стороны, из соображений симметрии пространства пусть считается, что это направление произведения (поскольку оно может быть представлено любой линией в пространстве) не изменяется относительно направлений сомножителей, если вся эта система будет каким-нибудь образом повернута в пространстве. Его собственное направление, как линии, будет в это время поворачиваться вместе с ними, как будто это одна целая жесткая система.

А числовой элемент этого же произведения (если он имеется) не претерпевает никакого изменения при таком вращении. Пусть произведение, о котором идет речь, полностью определено, если определены сомножители. Если допустить также, что произведение – дистрибутивная функция этих двух сомножителей, а также,

---

[34] Протоколы Совета Королевской ирландской академии от 16 октября 1843 г. зарегистрировали: "Президенту дано разрешение прочесть статью о новом виде мнимых величин, связанных с теорией кватернионов". Может быть, надо заметить в объяснение, что кресло председателя, которое с тех пор так успешно занимали мои друзья д-р Ллойд и д-р Робинсон, в то время занимал я.

[35] В собрании 13 ноября 1843 г., как отмечено в "Proceedings" от этого числа, были даны основные формулы и интерпретации символов i, j, k. Два письма по этому вопросу, которые были опубликованы с тех пор, были также написаны в октябре 1843 г. к моему другу м-ру Дж.Т. Грэйвсу, так часто упоминаемому в этом "Предисловии". Главные результаты были также сообщены и его брату преподобному Чарлзу Грэйвсу до публичного выступления в ноябре 1843 г. Эти обстоятельства (или некоторые из них) уже объявлены в другом месте, но кажется правильным, хотя бы кратко заметить о них здесь в связи с датой изобретения кватернионов и публикации о них.

что суммирование линий выполняется по тем же правилам, что и композиции движений, то при выполнении всех этих различных условий правила умножений линий приближаются к обычным правилам умножения чисел в алгебре настолько, насколько это возможно.

51. Квадрат данной линии не должен быть какой-нибудь линией, проходящей под углом к данной линии; так как,даже если мы выберем какой-нибудь фиксированный угол наклона, нужны будут еще данные, чтобы определить плоскость, и, таким образом, квадрат будет неопределенным, если только мы не выделили одного направления в пространстве как особенное, чего мы старались избежать.

Квадрат данной линии не может быть линией того же направления, он не может быть и линией противоположного направления. Так как если бы было выбрано одно из этих направлений *по определению*, то это определение обязывало бы нас считать, что квадрат обращается по направлению, когда обращается линия, квадратом которой он является. Тогда как (по принятым выше соглашениям) при одновременном изменении знака обоих сомножителей направление произведения всегда сохраняется или, вернее, восстанавливается. Следовательно, мы должны рассматривать КВАДРАТ ЛИНИИ как не имеющий направления в пространстве и поэтому не являющийся (собственно) линией. Но ничто не мешает нам рассматривать квадрат как ЧИСЛО, которое имеет раз навсегда определенный знак (еще неизвестный) и равно квадрату длины линии, которая возводится в квадрат.

Если затем длина линии α содержит a раз единицу длины, мы должны рассматривать $\alpha\alpha$ или α^2 как символ, эквивалентный $l\alpha^2$, где l – некоторый числовой коэффициент, положительный или отрицательный, пока еще неизвестный, но постоянный для всех линий в пространстве или имеющий одно общее значение для всех линий. И следовательно, если α, β – две любые линии с любым общим направлением и с длинами, обозначенными числами a и b, то мы приходим к тому, чтобы рассматривать произведение $\alpha\beta$ как равное числу lab, где l – тот же коэффициент, что и раньше. Но если направление β точно противоположно направлению α, а их длины – все те же a и b, то тогда их произведение равно числу с противоположным знаком: $-lab$.

Такое же общее заключение, возможно, могло бы быть выведено проще, если бы мы начали с рассмотрения произведения двух линий, равной длины и противоположных направлений; так как тогда, возможно, легче было бы увидеть, что вследствие симметрии пространства, ни одну линию нельзя предпочесть другой в качестве направления произведения.

52. Затем рассмотрим произведение $\alpha\beta$ двух взаимно перпендикулярных линий α и β, каждая из которых имеет длину, равную единице. Пусть α', β' – линии, соответственно равные первым по длине, но соответственно противоположные по направлениям. Тогда

$$\alpha'\beta = -\alpha\beta = \alpha\beta', \quad \alpha'\beta' = \alpha\beta.$$

Если бы искомое произведение $\alpha\beta$ было равно некоторому числу или даже если бы оно содержало число как часть своего выражения, то при нашем изменении

множителя α на противоположный ему α', это произведение или его часть (по той же причине – вследствие симметрии пространства) должно было бы остаться постоянным (потому что система сомножителей просто повернута в пространстве). А с другой стороны, вследствие $\alpha'\beta = -\alpha\beta$ это же произведение или часть его должны бы изменить знак (так как один сомножитель обращен). Но это сосуществование противоположных результатов было бы абсурдом. Мы проверили, следовательно, допускает ли настоящее условие (перпендикулярность двух сомножителей) предположить, что произведение $\alpha\beta$ есть ЛИНИЯ.

53. Пусть предварительно выбрано положительное вращение – правостороннее или левостороннее – и пусть γ – третья линия, длина которой равна единице и которая лежит в положительной стороне от β, если α – ось вращения. Пусть также γ' – линия, противоположная γ. Тогда любая линия в пространстве может быть представлена в виде $m\alpha + n\beta + p\gamma$. Проверим, можем ли мы положить $\alpha\beta = m\alpha + n\beta + p\gamma$, где m, n, p – некоторые постоянные числа. Если это так, мы должны иметь (по принципу симметрии пространства) $\alpha'\beta = m\alpha' + n\beta + p\gamma'$; и, следовательно (при изменении всех знаков), $\alpha\beta = m\alpha + n\beta' + p\gamma$. Поэтому $n\beta' = n\beta$, и, следовательно, $-n = n$ и, наконец, $n = 0$. Аналогично, так как $\alpha\beta = -\alpha\beta' = -(m\alpha + n\beta' + p\gamma') = m\alpha' + n\beta + p\gamma$ мы должны иметь $m\alpha' = m\alpha$ и поэтому $m = 0$. Но нет возражений такого рода против предположения, что $\alpha\beta = p\gamma$, где p – некоторый числовой коэффициент, постоянный для всех пар ортогональных линий в пространстве. Так как обращение направления сомножителя имеет эффект поворота системы на два прямых угла вокруг другого сомножителя как вокруг оси, то одновременно обращается и направление произведения. Затем если длины этих двух линий α, β не равны единице каждая, а равны соответственно a и b, то их произведение $\alpha\beta$ будет равно $pab\gamma$, т.е. оно будет линией, перпендикулярной обоим сомножителям, с длиной, обозначенной здесь через pab; линия всегда расположена с положительной или всегда с отрицательной стороны от линии-множимого β по отношению к линии-множителю α как оси вращения (в зависимости от того, положительна или отрицательна константа p).

54. Из свойств умножения, алгебраического или геометрического, мы использовали только три принципа: 1) ни одно направление в пространстве не рассматривается как предпочтительное перед другими; 2) умножение какого-нибудь сомножителя на любое число, положительное или отрицательное, означает умножение произведения на это же число; 3) два определенных сомножителя определяют произведение.

Мы пришли к следующим интерпретациям: первая – для произведения двух *коаксиальных* векторов или двух линий, параллельных друг другу или общей оси, и вторая – для произведения двух *перпендикулярных* векторов. Эти интерпретации вводят только *две константы* как все еще неизвестные *числовые коэффициенты* l и p, зависящие, однако, частично от выбранной единицы длины. Мы видим, что для любых двух коаксиальных векторов α, β имеет место уравнение $\alpha\beta - \beta\alpha = 0$, а для произведения двух перпендикулярных векторов $\alpha\beta + \beta\alpha = 0$. *Произведение двух*

перпендикулярных линий, следовательно (как доказывает предыдущее исследование), есть некоммутативная функция их.

55. Итак, мы вынуждены отказаться от коммутативного свойства умножения как общего свойства из-за соображений, которые представляются более важными. Проверим, сохраняется ли дистрибутивное свойство (как предполагалось ранее).

Если так и если линия-множимое β является суммой двух других β_1 и β_2, из которых одна линия (β_1) коаксиальна с линией-множителем α, а другая (β_2) перпендикулярна α, мы должны интерпретировать произведение $\alpha\beta$ как равное сумме двух частичных произведений $\alpha\beta_1$ и $\alpha\beta_2$. Но одно из них есть число, а второе – линия. Следовательно, мы пришли к рассмотрению суммы числа и линии, которые образуют вместе сумму или систему, обозначаемую через $\alpha\beta_1 + \alpha\beta_2$ или, короче, $\alpha\beta$. Такая сумма линии и числа может быть названа GRAMMARITHM[36] – от двух греческих слов: γραμμή – линия и 'αριθμός – число. Граммарифм, таким образом, мыслится полностью определенным, если определены две его части или элементы, т.е. когда его геометрическая (grammic) часть есть известная линия и когда его арифметическая часть есть известное число. Изменение любой частй означает изменение всего граммарифма; таким образом, равенство двух граммарифмов означает, вообще, два равенства: одно – равенство чисел, а другое – линий. Принимая это точку зрения на граммарифм и определяя, что $\alpha\beta = \alpha\beta_1 + \alpha\beta_2$, когда $\beta =$ $= \beta_1 + \beta_2$, $\beta_1 \parallel \alpha$, $\beta_2 \perp \alpha$, мы полностью определим произведение любой определенной линии-множителя и любой определенной линии-множимого, как только выбрана единица длины и числа l и p. Остается посмотреть, могут ли эти числа быть выбраны так, чтобы правила умножения линий были как можно ближе к правилам умножения чисел.

56. Введем общий дистрибутивный принцип, чтобы не вводить нового условия. Мы увидим причину отказа от коммутативного принципа или свойства, как не имеющего места, вообще говоря, в настоящем исследовании. Остается проверить, можем ли мы определить (или связать между собой) два коэффициента l и p так, чтобы удовлетворить ассоциативный принцип или чтобы была справедливой формула $\alpha.\beta\gamma = \alpha\beta.\gamma$. С этой целью мы можем сначала разложить сомножители β, γ на β_1, β_2, γ_1, γ_2, которые будут параллельны или перпендикулярны α (и друг другу); а затем будем требовать, чтобы удовлетворялись шесть условий, которые могут быть сведены к шести следующим:

$$\alpha.\alpha\alpha = \alpha\alpha.\alpha, \quad \alpha.\alpha\alpha' = \alpha\alpha.\alpha', \quad \alpha.\alpha\alpha'' = \alpha\alpha.\alpha'',$$

$$\alpha.\alpha'\alpha = \alpha\alpha'.\alpha, \quad \alpha.\alpha'\alpha' = \alpha\alpha'.\alpha', \quad \alpha.\alpha'\alpha'' = \alpha\alpha'.\alpha'',$$

где α, α', α'' – три взаимно перпендикулярных единичных линии, расположенные

---

[36] Слово "grammarithm" было предложено в сообщении Королевской ирландской академии (Proceedings, 1846. Jule) как термин, который может заменить слово "кватернион", по крайней мере с геометрической точки зрения на вопрос; но не кажется, что достигается какой-нибудь выигрыш благодаря этому изменению, хотя явное предложение другого названия, которое пролило бы немного дополнительного света на теорию в целом, не кажется неприемлемым.

так, что вращение вокруг α от α' к α'' положительно. Затем, согласно уже найденному, будут иметь место следующие соотношения:

$$\alpha\alpha = \alpha'\alpha' = \alpha''\alpha'' = l, \quad \alpha\alpha' = -\alpha'\alpha = p\alpha'',$$

$$\alpha\alpha'' = -\alpha''\alpha = -p\alpha', \quad \alpha'\alpha'' = -\alpha''\alpha' = +p\alpha,$$

и мы приходим к тому, что должны удовлетворяться следующие шесть условий:

$$\alpha \cdot l = l \cdot \alpha, \quad \alpha \cdot p\alpha'' = l \cdot \alpha', \quad \alpha. -p\alpha' = l \cdot \alpha'',$$

$$\alpha. \ -p\alpha'' = p\alpha'' \cdot \alpha, \quad \alpha.l = p\alpha''.\alpha', \quad \alpha \cdot p\alpha = p\alpha''.\alpha''.$$

Первое из них предлагает нам трактовать арифметический сомножитель как коммутативный с линейным (grammic) или рассматривать как эквивалентные произведения "линии на число" и "числа на линию". Четвертое и шестое условия не дают новой информации, а второе, третье и пятое превращаются в

$$-p^2\alpha' = l\alpha', \quad -p^2\alpha'' = l\alpha'', \quad -p^2\alpha = l\alpha.$$

Условия ассоциативности, следовательно, удовлетворяются при значении символов $\alpha l = l\alpha$ и $l = -p^2$, и они не могут быть удовлетворены другим образом. Константа l поэтому благодаря этим условиям необходимо отрицательна; и КАЖДАЯ ЛИНИЯ в трехмерном пространстве имеет (по этой схеме) КВАДРАТ, равный ОТРИЦАТЕЛЬНОМУ ЧИСЛУ, что является одним из наиболее новых, но и наиболее существенных элементов всей кватернионной теории (ср. п. 48, а также п. 85 на с. 81, 82 "Lectures on quaternions"). То, что граммарифм п. 55 может быть, собственно, назван кватернионом, выявляется из рассмотрения того, что линия, которая в нем прибавлена к числу, зависит сама от системы трех чисел или может быть представлена трехчленным выражением, так как она всегда является суммой трех линий, действительных или вырождающихся в нуль, которые параллельны трем фиксированным направлениям (ср. Лекцию III).

Коэффициент p остается еще неопределенным и может быть сделан положительным числом с помощью подходящего выбора единицы длины и направления положительного вращения. Таким путем мы будем иметь, наконец, очень простые значения:

$$p = +1, \quad l = -1,$$

и правила для умножения линий в пространстве станут полностью определенными и будут согласованными со всеми соотношениями п. 48 для символов i, j, k.

57. Другая цепь априорных рассуждений, с помощью которой я раньше думал утверждать или (если бы это было необходимо) корректировать результаты, выраженные теми новыми символами, была (в основном) доложена Королевской ирландской академии[37].

Допуская для направленных компланарных линий понятие пропорции (п. 36) и сохраняя символы i, j, k или, полнее, $+i$, $+j$, $+k$, для обозначения трех перпендикулярных единичных линий, как и выше, а для соответствующих противопо-

[37] "Proceedings" от 11 ноября 1844 г.

ложных линий – обозначения $-i$, $-j$, $-k$, но не предполагая знания никаких законов относительно их умножения, я попытался определить, что нужно принять в качестве ЧЕТВЕРТОЙ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ *и* к трем перпендикулярным направлениям i, j, k[38] в соответствии с известной концепцией п. 36 для направлений в плоскости и с некоторыми общими и ведущими принципами об отношениях и пропорциях.

Эти последние предполагаемые принципы (скорее управляющего, чем определяющего характера) были просто-напросто следующие:

1) отношения, подобные одному и тому же отношению, должны рассматриваться как подобные друг другу;

2) соответственно обратные отношения являются также взаимно подобными;

3) отношения являются подобными, если они подобно составлены из подобных отношений: это подобие композиций предполагается для того, чтобы включить вообще тождество порядка.

Мне кажется, что любое предложенное определением[39] использование слова

---

[38] В резюме, опубликованном в "Proceedings", сначала были использованы слова "юг", "запад", "верх" вместо символов i, j, k и искомая четвертая, пропорциональная к i, j, k, которая здесь обозначена через *u*, была названа "вперед".

[39] Как пример использования первого из этих очень простых принципов, служащего для того, чтобы исключить определение, которое может на момент показаться правдоподобным, возьмем построение п. 38 и исследуем, можно ли, собственно, сказать (как предполагает построение), что четыре направления (или четыре расходящиеся единичные линии) α, β, γ, δ образуют, вообще говоря, пропорцию в пространстве, когда углы $\widehat{\alpha\delta}$, $\widehat{\beta\gamma}$ между внешними и внутренними линиями имеют общую биссектрису (ε). Если так, то когда три направления α, β, γ становятся перпендикулярными, мы должны иметь $\alpha:\beta::\gamma:-\alpha$ и $\gamma:-\alpha::\beta:-\gamma$ [:: применялись для обозначения пропорции. – *Примеч. ред.*]. Но должно быть также $\alpha:\beta::\beta:-\alpha$ и *не* $\gamma:\beta::\beta:-\gamma$, так что оказывается, два отношения $\alpha:\beta$ и $\beta:-\gamma$ должны быть подобны одному общему отношению ($\gamma:-\alpha$) без подобия друг другу, если будет принято по определению предыдущее построение четвертой пропорциональной. И одно это возражение должно бы удержать меня от решения ввести такое определение, а следовательно, от принятия связанного с ним правила, упомянутого в п. 38, даже если бы не существовало никаких других причин (а они на самом деле были) для отказа от этого правила. Хотя это правило для умножения линий в пространстве показалось справедливым в одно и то же время моему другу Дж.Т. Грэйвсу и мне самому. Подобное возражение относится [столь же решительно] и к правилу, упомянутому в п. 37, и к моему раннему предложению. С другой стороны, аналогичный и столь же простой аргумент может служить, чтобы оправдать обозначение D–C = B–A, используемое мной в следующих Лекциях и в других местах, чтобы выразить, что две прямые линии *AB* и *CD* равны по длине и подобно направлены. Возражения сделаны несколько лет назад одним способным автором [[42]] в совершенно искреннем духе (Philos. Mag. 1844, June. P. 410).

Он полагал, что интерпретация более произвольна, чем она казалась мне, и намекал, что те же самые обозначения столь же хорошо могут быть использованы и для обозначения других понятий: например, две равные по длине линии *AB*, *CD*, встречающиеся где-либо на конечном или бесконечном расстоянии. Я не могу принять такое расширенное толкование, так как оно должно было бы привести к заключению, что две линии *AB*, *EF* могут быть равны такой же третьей линии *CD*, не будучи равными друг другу, что было бы (по моему мнению) столь же большим нарушением аналогии, как и использование слова РАВНО или знака "=" интерпретацией, приводящей к путанице. Но я не понимал, что аналогии нарушены одновременным допущением двух противоположных пропорций (см. (3), (4), (5) в п. 57)

$u:i::j:k, \qquad u:j::i:-k,$

так как элементарная теорема, называемая часто "alternando" ('εναλλάξ λόγος, Евклид, V. Опр. 13.

отношение (ratio), которое не согласуется с этими принципами, должно слишком далеко отклониться от известных аналогий (математических или метафизических) и должно бы включать некорректность языка. В то время как, с другой стороны, кажется, что если эти принципы выполняются и наблюдаются другие аналогии, то позволительно распространить использование этого слова "отношение" и связанного с ним "пропорция" не только с величины на направления на плоскости, как это сделано другими авторами[40] в п. 36, но также и с плоскости на пространство[41].

Предложение 16), по своей природе ограничена СЛУЧАЕМ, когда средние члены, которые меняются местами, однородны; тогда как два перпендикулярных направления (как здесь i и j) во всей этой теории рассматриваются как в некотором смысле heterogeneous. Между ними по крайней мере не имеется соотношения, которое можно было бы представить любым частным двух величин, таким, какие рассматривает Евклид. И, следовательно, мы не имеем права надеяться (из аналогий со старыми результатами), что чередование вообще допустимо в пропорции, содержащей такие направления, хотя на плоскости чередование признано допустимым.

[40] С тех пор как была набрана сноска к п. 36, я имел возможность посмотреть четвертый том "Annales de mathèmatiques" и нашел подтверждение моим воспоминаниям относительно признаваемого приоритета Аргана (воспоминаниям, в самом деле согласующимся с цитированной прежде с. 228 восхитительного "Report" д-ра Пикока). Франсэ в самом деле (в 1813 г.) опубликовал в этих "Annales" (Т. 4, с. 61–71) статью, которая содержала теорию "пропорции величины и положения" в связи с теорией умножения (а также и сложения линий на плоскости). Но он ясно и честно заявлял в то же время (с. 70), что он обязан сущностью этих новых идей другому лицу ("основы этих новых идей не принадлежат мне"). Источником идей был "Опыт" Аргана, опубликованный ранее (Париж, 1806 г.), как это вскоре показал Жергонн, чье руководство во всем это деле заслуживает похвалы. Франсэ самым ясным и полным образом признал (с. 225), что действительным автором метода был Арган ("нет ни малейшего сомнения, что новая идея геометрического представления мнимых величин обязана только м-ру Аргану"). Насколько я знаю, с тех пор не появилось ничего более прозрачного, чем собственные формулировки Аргана (см. тот же том, с. 136–138) о фундаментальных принципах теории сложения и умножения компланарных линий (даже в трудах де Моргана о Двойной Алгебре, на которые я ссылался в предыдущих примечаниях). Но Арган не предвосхитил теорию логометров (theory of logometers) де Моргана, и, наоборот, был склонен (с. 144–146) рассматривать символ $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$, несмотря на хорошо известный результат Эйлера, как означающий линию KP, перпендикулярную к плоскости линий 1 и $\sqrt{-1}$, и рассматривать ее как репрезентативный пример величины, которая несводима к виду $p + q\sqrt{-1}$ и (согласно его утверждению) была heterogeneous как относительно $\sqrt{-1}$, так и относительно +1. Слово "modulus" (module), столь хорошо известное по важным трудам г-на Коши, появляется в более поздней статье Аргана в следующем томе "Annales"; оно означает действительную величину $\sqrt{p^2 + q^2}$. Если кажется, что я слишком подробно останавливаюсь на рассуждениях Аргана (из которых не все я принимаю), то это отчасти потому, что его заслуги как оригинального изобретателя все еще недостаточно признаны математиками. Отчасти же потому, что одним из двух существенных звеньев (другим является сложение) между двойной Алгеброй и Кватернионами является главный и фундаментальный принцип Аргана – принцип относительно КОМПЛАНАРНОЙ ПРОПОРЦИИ, выраженный им следующим образом (Annales. Vol. 4. P. 136–137): "Если Ang. AKB = Ang. $A'K'B'$, то имеем $KA{:}KB{::}K'A'{:}K'B'$, не принимая во внимание абсолютные величины.

Здесь это главный принцип теории, в которой мы пытаемся дать первые основы, в сочинении, из которого мы приводим выдержку" (именно напечатанный в 1806 г. "Опыт" Аргана, который Жергонн показал Франсэ после появления первой статьи по этой теме этого последнего автора в 1813 г.). Арган продолжал так: "Этот принцип не имеет в основании ничего более странного, чем тот, на котором основано понятие геометрического отношения между двумя линиями разных знаков, и он является, собственно, только обобщением" (с. 137) – с этим замечанием я совершенно согласен.

[41] Хотя наблюдение в п. 57 относится скорее к пропорциям, чем к мнимостям, все-таки здесь удобно заметить, что Бюэ и даже Уоллис рассуждали до Аргана и Франсэ об интерпретации символа $\sqrt{-1}$,

Предположенная пропорция

$j:i::k:u$ (1)

давала, таким образом, при обращении

$u:k::i:j.$ (2)

В плоскостях *ij, ik* также существовали две пропорции

$i:j::j:-i$ и $k:i::-i:k.$ (3)

Соединяя поэтому, с одной стороны, два отношения $u:k$ и $k:i$, а с другой – два соответственных подобных отношения $j:-i$ и $-i:k$, получаем новую пропорцию

$u:i::j:k,$ (4)

которая отличается от пропорции (2) только циклической перестановкой трех направлений *i, j, k*. Поэтому мы можем сделать другое циклическое изменение того же рода и написать

$u:j::k:i.$ (5)

Легко видеть, что в этом цикле трех перпендикулярных направлений *ijk* правый (или левый) характер вращения вокруг первого направления от второго к третьему не меняется при такой перестановке. Скомбинируем снова два подобных отношения (1) с двумя другими, каждое из которых, очевидно, подобное. Неизвестное направление *u* может быть любым

$i:-i::u:-u.$ (6)

Мы находим и другую пропорцию

$j:-i::k:-u,$ (7)

распространяемой на пространство. Но наибольшее приближение к предвосхищению кватернионов или по крайней мере к предвосхищению триплетов, кажется мне, было достигнуто Сервуа в пассаже, цитированном позднее в томе "Annales" Жергонна, что кажется курьезом и достаточно подходит для цитирования здесь. Сервуа следовал намекам Жергонна относительно представления обыкновенных мнимостей вида $x+y\sqrt{-1}$ (x и y – целые числа) таблицей двойного аргумента (с. 71) и думал (с. 235), что такую таблицу можно рассматривать как только тонкий слой таблицы ТРОЙНОГО аргумента для представления точек или линий в ПРОСТРАНСТВЕ. Таким образом, он продолжает: "Без сомнения Вы дадите каждому члену форму тринома; но какой коэффициент будет у третьего члена? Я не очень вижу его. Аналогия, кажется... будет существовать трином формы $p\cos\alpha + q\cos\beta + r\cos\gamma$, ⟨где⟩ α, β, γ – углы прямой с тремя ортогональными осями и должно быть

$$(p\cos\alpha+q\cos\beta+r\cos\gamma)(p'\cos\alpha+q'\cos\beta+r'\cos\gamma)=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Значения p, q, r, p', q', r', которые будут удовлетворять этому условию будут абсурдными ("не действительные величины" – как он впоследствии называл их)... но будут ли они, эти мнимые, сводиться к общей форме $A + B\sqrt{-1}$? Вот совершенно особый вопрос анализа, который и предлагаю Вам осветить".

Шесть НЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ, которые Сервуа предвидел с замечательной проницательностью, не будучи в силах определить их, можно сейчас идентифицировать с неизвестными тогда символами $+i$, $+j$, $+k$, $-i$, $-j$, $-k$ теории кватернионов. По крайней мере эти последние символы точно выполняют условие, сформулированное им и доставляют ответ на его "особый вопрос". Может быть, надлежит заявить, что моя собственная теория была построена и опубликована задолго до того, как процитированный последний пассаж попался мне на глаза.

и отсюда благодаря (2) и (3)

$$u:k::k:-u. \tag{8}$$

Аналогично

$$u:i::i:-u \quad \text{и} \quad u:j::j:-u, \tag{9}$$

и в любой из этих пропорций у любых двух членов независимо от того, принадлежат ли они одному и тому же отношению или различным, можно одновременно изменить их знаки. Все эти пропорции (2)–(9) следуют из начального предположения (1) вследствие общих принципов, констатированных выше, без определения направления u тем или иным способом.

58. Предположим теперь, что два перпендикулярных направления j и k повернуты вместе (в их общей плоскости) вокруг i как оси, так что они примут два новых положения j_1 и k_1, которые будут удовлетворять пропорции

$$j:k::j_1:k_1 \tag{10}$$

Будем тогда иметь согласно (4)

$$u:i::j_1:k_1 \tag{11}$$

и, следовательно, циклическим изменением этих трех новых перпендикулярных направлений имеем

$$u:j_1::k_1:i::l:i_1, \tag{12}$$

если l и i_1 получены из k_1 и i любым общим поворотом вокруг j_1. Другое циклическое изменение, скомбинированное с вращением вокруг новой линии l, дает окончательно

$$u:l::i_1:j_1::m:n, \tag{13}$$

где l, m, n могут представлять любые три перпендикулярные направления, подчиненные только условию, что вращение вокруг l от m к n будет того же характера, что и вращение вокруг i от j к k. При этом условии, следовательно, первая предполагаемая пропорция (1) может быть заменена более общей

$$n:m::l:u. \tag{14}$$

Тогда вследствие (8) и (9) можно написать с тем же значением символов

$$u:l::l:-u; \quad u:m::m:-u; \quad u:n::n:-u \tag{15}$$

и поэтому $n:m::m:-n$. Мы имеем эти и другие не менее общие пропорции

$$m:-n::l:u; \quad m:n::l:-u. \tag{16}$$

Если существует, как предположено выше, какая-то четвертая пропорциональная u к трем данным перпендикулярным направлениям j, i, k того же направления u или противоположно направленная $-u$, то будет также существовать (в том же смысле) и четвертая пропорциональная к любым другим перпендикулярным трем направлениям n, m, l или m, n, l в зависимости от того, сохраняется или обращается характер некоторого вращения.

59. Этот замечательный результат был использован мной для того, чтобы оправдать рассмотрение направлений, названных здесь $+u$ и $-u$, скорее как числовых (или алгебраических), нежели как линейных единиц (или геометрических). И чтобы сделать *это*, надлежит обозначить их просто символами $+1$ и -1, так чтобы эти направления рассматривались только как некоторая противоположность, а не как что-нибудь иное. Все это геометрическое разнообразие, которое следует из понятия трехмерного пространства, исчезает в исследовании, проведенном, как выше. И в самом деле, недопустимо (по предыдущим принципам) отождествлять направление u с направлением какой бы то ни было линии l: так как в этом случае пропорция (13) должна бы привести к следующему результату: $l{:}l{::}m{:}n$, который должен рассматриваться как абсурд в этой теории – два члена отношения совпадают по направлению, а члены в другом отношении перпендикулярны. Но возражения этого рода против нашего предположения не возникают (как выше) при

$$+u = +1, \quad -u = -1. \tag{17}$$

Тогда пропорции, выведенные из (13), (15),

$$1{:}l{::}m{:}n{::}n{:}-m; \quad 1{:}l{::}l{:}-1 \tag{18}$$

можно удобно и кратко выразить следующими формулами умножения:

$$lm = n; \quad ln = -m; \quad l^2 = -1. \tag{19}$$

60. Этим путем (или путем, несущественно отличающимся) были выведены фундаментальные формулы исчисления кватернионов (п. 48) и представлены Королевской ирландской академии в 1843 г., а именно:

$$i^2 = -1, \quad j^2 = -1, \quad k^2 = -1, \tag{A}$$

$$ij = +k, \quad jk = +i, \quad ki = +j, \tag{B}$$

$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j. \tag{C}$$

В 1844 г. показано, что они совместимы с априорными принципами и с рассмотрениями общей природы. Произведение рассматривается здесь как ЧЕТВЕРТАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНАЯ к некоторой внепространственной единице[42] и к двум направленным линиям-сомножителям в пространстве.

---

[42] Мне казалось (и все еще кажется) естественным связать эту внепространственную (extra-spatial) единицу с концепцией ВРЕМЕНИ (п. 3), рассматриваемого здесь скорее как ось непрерывной и одномерной прогрессии. Но либо мы таким образом рассматриваем совместно время и пространство, либо мыслим вообще любую систему с четырьмя независимыми осями или шкалы прогрессии (u, i, j, k). Я склонен вывести из проведенных выше исследований следующий ЗАКОН ЧЕТЫРЕХ ШКАЛ как закон, который по меньшей мере совместим с аналогией и приемлем как распространение определением фундаментальных уравнений кватернионов: "Формула пропорции между четырьмя независимыми направленными единицами должна рассматриться как остающаяся справедливой, когда любые две из них меняются местами друг с другом (в формуле) при условии, что направление (или знак) одной обращено".

Что бы ни думать об этой выдержке и полуметафизических взглядах, формулы (A), (B), (C) п. 60 являются в любом случае достаточной основой для развития ИСЧИСЛЕНИЯ кватернионов.

Тогда в исследовании п. 50–56 оно рассматривалось скорее как определенная ФУНКЦИЯ тех двух сомножителей, форма этой функции должна быть определена способом, наиболее согласующимся с некоторыми общими и ведущими аналогиями и с концепцией симметрии пространства. Но существовал еще другой взгляд на весь предмет, набросанный немного спустя в другом сообщении Королевской ирландской академии[43], о котором нет необходимости говорить здесь более чем несколько слов, потому что, в сущности, это взгляд, принятый в следующих Лекциях и развитый с некоторой полнотой в них, именно это взгляд, согласно которому КВАТЕРНИОН рассматривается как ЧАСТНОЕ двух направленных линий в трехмерном пространстве.

61. Основное свойство такого геометрического частного[44] b : a в этой теории должно состоять в том, что, действуя как множитель (или, по крайней мере, образом, аналогичным умножению) на линию-делитель a, он производит (или порождает) линию-делимое b; и что такая интерпретация удовлетворяет общей и тождественной формуле (ср. п. 9) (b : a) × a = b.

Аналогия умножению состоит отчасти в операции, существо которой в одновременном преобразовании и длины, и направления линии, как при обычном умножении линии на положительное или отрицательное число или как при известном обобщении (п. 36) такого умножения для линий, лежащих в одной плоскости, которое должно бы называться методом Аргана, по-моему (по причинам, описанным в сносках предыдущего пункта). Отчасти же аналогия именно умножению заключается в том обстоятельстве, что новая операция обладает (подобно старой операции) свойствами дистрибутивности и ассоциативности[45], хотя и *не* обладает (вообще говоря) коммутативностью того, что называется умножением в алгебре[46],

---

[43] "Proceedings" от 10 февраля 1845 г.

[44] Этот взгляд на геометрическое частное был также развит до определенной степени в незавершенной серии статей, которые появились несколько лет тому назад в "Cambridge and Dublin Mathematical Journal" под заголовком "Symbolical geometry". Название призвано отметить, что я пытался в создании этой особой серии допустить более заметное влияние общих законов символического языка, чем в моих предыдущих статьях, и что до этой степени я по этому случаю пытался подражать "Symbolical geometry" д-ра Пикока и воспользовался также замечаниями Грегори и Ома.

[45] Этому ассоциативному принципу, или свойству, умножения я придаю большое значение и прилагаю усилия, чтобы показать (в Лекциях V и VI), что его можно доказать геометрически для кватернионов независимо от дистрибутивного принципа, который можно, однако, в различных изложениях предмета сделать предшествующим и помогающим доказательству свойства ассоциативности, как показано в Лекции VII и кое-где в других местах. Отсутствие ассоциативного принципа кажется мне неудобством в октавах[43] или октаномах м-ров Дж.Т. Грэйвса и Артура Кэли [44].

Таким образом, в предыдущих обозначениях мы должны в самом деле иметь, как в кватернионах, $ij = k$, но, вообще говоря, не $i \cdot j\omega = k \cdot \omega$, если ω представляет некоторую октаву, так как $i \cdot jl = in = -0 = -kl = -ij \cdot l$ [45].

[46] Выражение "алгебра" или "обычная алгебра" время от времени появляется в этих Лекциях как подразумевающее просто тот обыкновенный вид алгебры, в которой уравнение $ab = ba$ трактуется как универсально справедливое. Оно, конечно, не означает любую степень неуважения к тем многочисленным и замечательным авторам, которые до сих пор не допускали в своих вычислениях уравнения $\alpha\beta = -\beta\alpha$ для умножения двух перпендикулярных линий или для других и более абстрактных целей. Нужно заявить здесь, что вид некоммутативного умножения для линий, образующих некоторый угол (внешнее умножение) появился в очень оригинальной и замечательной работе проф. Г. Грассмана

и полностью отлична[47] от нее во многих других важных отношениях.

Мотив для названия такого частного кватернионом или основание для связи этой концепции с ЧИСЛОМ ЧЕТЫРЕ состоит в следующем: ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ДЛИНА двух сравниваемых линий зависит только от одного числа, выражающего их ОТНОШЕНИЕ (обычного вида), тогда как их ОТНОСИТЕЛЬНОЕ НАПРАВЛЕНИЕ зависит от системы трех чисел: одно обозначает угол $(a\hat{,}b)$ между двумя линиями, а два другие служат, чтобы определить точку зрения на ПЛОСКОСТЬ этого угла или направление ОСИ положительного вращения в этой плоскости *от* линии-делителя (a) *к* линии-делимому (b).

62. Для развертывания этого общего взгляда[48] и для вывода из него многих геометрических [49] и некоторых физических[50] следствий я должен отослать к следующим Лекциям, значительная часть которых составлена в более популярном

(Ausdehnungslehre. Leipzig, 1844), с которой я не встречался до тех пор, пока не прошли годы с момента открытия кватернионов и сообщения о них [[46]]. В этой работе я также заметил (когда было слишком поздно узнавать это где-нибудь) использование символа β–α для обозначения направленной линии (Strecke), проведенной из точки α в точку β. Несмотря на это и, возможно, некоторые другие совпадения взглядов, система проф. Грассмана и моя появились совершенно различными путями и независимо друг от друга в их концепциях, методах и результатах. По крайней мере, глубокий и склонный к философии автор "Ausdehnungslehre" во время его публикации не обладал теорией кватернионов, которая годом раньше (1843) была предложена мною как метод или исчисление для сферической тригонометрии. Это кажется ясным из пассажа его "Предисловия" (Vorrede. D. XIV), в котором он утверждает (28 июня 1844), что он тогда не достиг цели в распространении использования мнимых с плоскости на пространство и вообще что он не преодолел трудностей, которые препятствуют попыткам построения (на его принципах) теории углов в пространстве (оказывается невозможно вывести законы для пространства с помощью мнимых величин. Надо указать, что вообще рассмотрение углов в пространстве встречается с трудностями, всестороннее преодоление которых в достаточной степени еще не достигнуто).

Более ранний трактат проф. А.Ф. Мёбиуса (Der barycentrische Calcul. Leipzig, 1827) [[47]], на который ссылается в этом же Предисловии Грассман, представляется трудом, который заслуживает внимания из-за своих концепций, понятий и результатов: это относится также и к другому труду Мёбиуса (Mechanik des Himmels, Leipzig, 1843), на который есть ссылка в настоящих Лекциях (с. 614).

[47] Среди этих отличий метода важно помнить, что ни одна линия (в моей системе) не принимается за направление положительной единицы и что, наоборот, каждая векторная единица рассматривается как один из квадратных корней из отрицательной единицы. Нужно заметить также, что произведение двух наклоненных друг к другу, но не перпендикулярных векторов считается в этой теории не линией, но кватернионом, что будет полностью проиллюстрировано в Лекциях.

[48] Я могу здесь намекнуть, что БИКВАТЕРНИОНЫ (Лекция VII), будучи геометрически интерпретированы (ср. с примеч. к п. 19), допускают рассмотрение каждого как пары частных $\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}\right)$, построенных с помощью троек (TRIRADIAL) (α, β, γ) и умножения на коммутативный сомножитель вида $\sqrt{-1}$ (ср. п. 16), тогда как пара линий (β, γ) изменяется в (–γ, β) или угол $(\beta\hat{,}\gamma)$ переходит в смежный.

[49] Несмотря на некоторые ссылки на работы М. Шаля [[48]] и других выдающихся иностранных геометров, мое знакомство с их трудами было далеко не совершенным, чтобы дать мне какую-либо уверенность в новизне различных теорем Лекции VII и Приложения (тех, которые относятся к построению эллипсоида и вписанных левых полигонов на поверхности второго порядка), кроме той, что была почерпнута из мнений нескольких друзей-геометров.

[50] Некоторые такие физические приложения были подсказаны ранее сэром Дж. Гершелем [[49]].

стиле[51], чем это "Предисловие", так как все в целом было скомпоновано под влиянием искреннего желания представить предмет столь ясным и элементарным, сколь это возможно.

Что бы ни думать о степени успеха в этом деле, которого достигнут мои вольнослушатели, я понимаю, что по меньшей мере они трудолюбивы и настойчивы. Я обязан моей благодарностью друзьям, которые постоянно ободряли меня своей симпатией. Я обязан и товарищам по науке[52], которые в необходимые моменты отрывались от своих собственных исследований, чтобы уделить внимание моим рассуждениям, а иногда и развить эти рассуждения или результаты. Я обязан моим академическим наставникам, которые санкционировали теорию этой книги в качестве предмета публикации и экзаменов в Университете; они в значительной степени несли финансовый риск ее публикации. Но больше всего я обязан Великому Творцу, кто милостиво уделил мне такую меру здоровья и энергии, которая потребовалась для того, чтобы привести к концу это длинное и трудное предприятие.

Обсерватория, Дублин Уильям Роуэн Гамильтон
Июнь 1853

---

[51] Нужно заметить, что эти Лекции будут излагать лишь те детали, которые действительно получены мной в последующие годы в стенах этого университета. Лекция I (опубликованная в 1848 г., как можно видеть из некоторых астрономических ссылок в ее начале) была на самом деле прочитана в том году в форме, очень близкой к той, в какой она появляется сейчас. Но вскоре было сочтено необходимым расширить план построения: очевидно, что следующие Лекции (в том виде, в каком они напечатаны) слишком длинны и что последняя содержит слишком много вычислений, чтобы быть прочитанной в ее настоящем виде, хотя кое-что от стиля действительного чтения и остается здесь. Реальное расчленение работы не таково в самих Лекциях, как в более кратких и многочисленных статьях, на которые даются ссылки. В работе неизбежно вводятся некоторые новые термины и символы, но можно надеяться, что их не сочтут трудными или тяжелыми для запоминания и использования.

[52] В Англии это м-ры Буль[[50]], Кармайкл, Кэли, Кокл, де Морган, Донкин, Чарлз и Джон Грэйвс, Киркмэн [[51]], О'Брайн [[52]], Споттисвуд [[53]], Юнг и, возможно, другие. Некоторые из их исследований и замечаний о предметах, связанных с кватернионами (как, например, триплеты, tessarines, октавы и плюкватернионы), упоминались в других местах. Я очень сожалею о невозможности привести здесь более полный обзор, так же как и рассмотреть теорию алгебраических ключей (как пример теории, содержащейся в теории кватернионов), недавно предложенную одним из наиболее выдающихся аналистов на континенте. Мне кажется, что она фактически содержалась в теории СОВОКУПНОСТЕЙ (объясненной в настоящем "Предисловии"), которая доложена мной в 1835 г. и опубликована в 1848 г. (Trans. Roy. Irish Acad. Vol. 21. P. 229). Символы x_r являются тем, что м-р Коши называет KEYS. Теория СОВОКУПНОСТЕЙ как распространение теории пар, а поэтому также и мнимых, всегда была для меня теорией КВАТЕРНИОНОВ в более частном случае (в их символическом аспекте). Перед публикацией этих совокупностей м-р де Морган пришел в 1844 г. к тесно связанному с ними понятию "algebra of the *n* character", подсказанному (как общепризнанно) кватернионами.

ДОПОЛНЕНИЯ

ИЗ ПИСЬМА У.Р. ГАМИЛЬТОНА ДЖ. ГЕРШЕЛЮ*

...Приступая теперь к динамике, думаю, что Вы не нуждаетесь в напоминании, что $3n$ дифференциальных уравнений движения второго порядка между $3n$ прямоугольными координатами $x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n$ и временем t для системы n притягивающихся или отталкивающихся масс $m_1, ..., m_n$, рассматриваемых как свободные точки, могут быть преобразованы в следующую формулу:

$$\sum m(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z) = \delta \sum m m_1 f(r), \tag{1}$$

где x'', y'', z'' являются составляющими ускорения какой-нибудь массы m, а $f(r)$ – определенной функцией взаимного расстояния r между двумя массами какой-либо пары mm_1, так что производная функция $f'(r)$ выражает закон отталкивания, будучи отрицательной в случае притяжения. Вы также не нуждаетесь в сообщении о том, какими безуспешными оказались попытки математиков точно интегрировать систему $3n$ уравнений второго порядка, так изящно выраженную (вышеуказанной) формулой Лагранжа. Для полной законченности подобного интегрирования было необходимо, как Вы знаете, найти $3n$ соотношений между временем, $3n$ переменными величинами и $6n$ постоянными; но аналитики, насколько мне известно, не нашли и даже не выразили пока ни одного подобного соотношения. Судите сами, выражает ли их все точно следующий метод с помощью одной основной функции и сводит ли, таким образом, проблему динамики к поискам одного центрального соотношения... Таким образом, все свелось к поискам формы функции S; не такой функции, которая формулировала бы, а которая разрешала бы проблему, и не только служила бы подобно лагранжевой пертурбационной функции R для того, чтобы изящно выразить известные дифференциальные уравнения движения, но дала бы посредством своих собственных частных производных доселе неизвестные первые и конечные интегралы этих важных уравнений...

Таковы наиболее существенные черты моего нового метода в динамике. Он не представился мне сразу в такой простой форме. Я употребил, как Вы найдете почти повсюду в моей первой статье, характеристическую функцию V, представляющуюся аналогичной оптической функции, о которой я упоминал в том же письме, и

---

* *Graves R.P.* Life of Sir William Rowan Hamilton, Andrews Professor astronomy in the University Dublin and Royal astronomer of Ireland. Dublin: Univ. press, 1889. Vol. 13. 17.III 1834. Перевод Л.С. Полака.

выражающую, как и в оптике, зависимость величины, называемой "действием", от конечных и начальных координат. Но эта функция в динамике заключает в себе также в виде вспомогательной величины константу H в известном выражении для половины живой силы системы, а исключения, посредством которых я был принужден избавиться от этой вспомогательной константы и ввести взамен ее время, сделали метод более обширным, чем в настоящей его форме, особенно по отношению к вопросам возмущенного движения.

Для вопросов этого рода у меня имеются два совершенно различных процесса, один вытекает более непосредственно из свойств моей главной функции S, а второй, имея сходство с процессами, известными математикам, в сущности, выведен из того же нового аналитического метода или исчисления главной функции.

Согласно первому процессу я варьировал не начальные координаты системы, а лишь начальные компоненты ее скоростей, чтобы вычислить окончательную или возмущенную конфигурацию при помощи правил невозмущенного движения; согласно второму процессу я варьировал одновременно начальные положения и скорости, чтобы вычислить сразу же конечные или возмущенные координаты и скорости нескольких точек системы. Формула обоих процессов представляется мне такой простой, какой можно было ожидать, но при применении второго процесса к Солнечной или другим аналогичным системам я принужден мысленно представить орбиту планеты совсем отличной от принятой в теории, хотя немного отличающейся в действительности от той, которую так прекрасно представил Лагранж. Моя орбита является менее простой с геометрической точки зрения, но зато взамен этого она имеет, возможно, некоторые важные преимущества для вычисления.

Вам хорошо известно, что общий метод варьирования параметров Лагранжа состоит в привлечении интегралов одного уравнения (или группы уравнений) к другому уравнению посредством трактовки постоянных первого уравнения как переменных второго. Рассматривая их таким образом, часто можно выбрать наугад несколько произвольных условий, которые удовлетворят этим новым переменным величинам, особенно в приложениях к динамике, в которых уравнения, интегрируемые первыми, обычно бывают второго порядка, а количество постоянных в их интегралах равно двойному числу зависимых переменных. Принцип, по которому Лагранж выбирал произвольные условия, чтобы удовлетворить своим переменным параметрам, был превосходен и заключался в понижении порядка, так как он вел к возрастанию числа дифференциальных уравнений движения. Я стремился достигнуть и достиг того же преимущества иметь новые дифференциальные уравнения не выше первого порядка, но пришел к иному выбору параметров, ибо исходил из другой группы первоначальных дифференциальных уравнений, каждое из которых само первого порядка...

Вообще дифференциалы всех моих варьированных элементов для Солнечной системы могут быть очень просто выражены частными производными одной пертурбационной функции H_2, взятыми относительно этих элементов, в то время как метод Лагранжа требует дифференцирования одной возмущенной функции для Юпитера, возмущенного Сатурном, и второй подобной функции для Сатурна, возмущенного Юпитером.

Это большое преимущество, как, вероятно, и будет признано, примиряет меня с неудобством вводить новую группу орбит даже с потерей геометрической простоты, на которую я указывал; неудобство заключается в том, что мои орбиты не касаются, а пересекают (хотя под очень маленькими углами) действительные гелиоцентрические орбиты, описанные под действием всех возмущающих сил. Моя новая варьированная орбита любой планеты правильно дает возмущенные гелиоцентрические координаты и вспомогательные величины x', y', z' при помощи правил невозмущенного движения, но если мы не продифференцируем элементов каждой планеты или не сопоставим орбиты всех планет, то они не дадут правильно тех вспомогательных переменных для возмущенного движения, которые употреблял Лагранж, именно компонент гелиоцентрических скоростей. Но алгебраически они были лишь подсказаны формой его первоначальных дифференциальных уравнений, а астрономически они вовсе бесполезны, за исключением тех случаев, когда могут служить для вычисления гелиоцентрических координат; другие вспомогательные переменные, если от них можно было легко избавиться в конце вычисления, одинаково привлекали внимание как алгебраиста, так и астронома; вспомогательные переменные, которые я выбрал, кажутся мне достойными подобного внимания, потому чо служат для упрощения как первоначальных дифференциальных уравнений, так и последующих преобразований, хотя они и предполагают новую группу переменных параметров или элементов. Будучи огорчен потерей прекрасного геометрического свойства касания между действительными и варьированными орбитами, отнесенными к центру Солнца, я все же думаю, что свойство моих новых орбит, заключающееся в том, что они непосредственно дают компоненты скорости каждой планеты относительно центра тяжести всей Солнечной системы, связывает их даже несколько теснее, чем у Лагранжа, с идеей сложной системы, движущейся вокруг своего общего центра тяжести и в каждой части находящейся под влиянием действий всех остальных частей. Исходя из связи указанных орбит с этой идеей и из необходимости принимать в соображение массы и движения всей Солнечной системы, прежде чем новые элементы какой-либо планеты могут быть совершенно точно определены, я почувствовал соблазн дать этим новым эллипсам название систематических планетных орбит. Их вековые изменения следуют тем же законам, что и у обыкновенных орбит. И вообще, если бы этот новый способ приняли, то не было бы необходимости отбрасывать все прежние результаты, ибо обратная величина расстояния между двумя планетами является главным пунктом, который нужно развить, как в функции Лагранжа, так и в моей возмущенной функции, хотя развитие у меня будет, конечно, более симметричным...

17 марта 1834

ПИСЬМО У.Р. ГАМИЛЬТОНА ДЖОНУ Т. ГРЭЙВСУ, ЭСКВАЙРУ*

Обсерватория, 17 октября 1843

Мой дорогой Грэйвс!

Очень любопытная цепь математических размышлений открылась мне вчера, я надеюсь, она окажется интересной и для Вас.

Вы знаете, что я уже давно хотел (и полагаю, что и Вы испытываете то же желание) иметь Теорию Триплетов, подобную моей опубликованной Теории Пар, а также геометрической интерпретации мнимых величин м-ра Уоррена. Я думаю, что я открыл вчера *теорию кватернионов*, которая включает такую теорию *триплетов*.

Ход моих мыслей был таков. Так как $\sqrt{-1}$ является в определенном хорошо известном смысле линией, перпендикулярной к линии 1, то кажется естественным, что должна быть некоторая другая мнимость для выражения линии, перпендикулярной к обеим первым. Вот почему вращение от 1 к ней, будучи удвоенным, также приводит к -1, и она также должна бы быть корнем квадратным из отрицательной единицы, хотя его не должно смешивать с предыдущим. Обозначая старый корень, как это часто делают немцы, через i, а новый – через j, я исследовал, какие законы надо принять для умножения $a + ib + jc$ на $x + iy + jz$. Естественно предположить, что произведение таково:

$$ax - by - cz + i(ay + bx) + j(az + cx) + ij(bz + cy).$$

Но что делать с ij? Будет ли ij иметь форму $\alpha + \beta i + \gamma j$? Его квадрат, кажется, должен быть = 1, так как $i^2 = j^2 = -1$, и это может соблазнить нас принять $ij = 1$ или $ij = -1$. Но ни при каких предположениях мы не будем иметь: сумма квадратов коэффициентов при 1, i, j в произведении = произведению соответствующих сумм квадратов множителей. Возьмем простейший случай произведения, именно случай квадрата: мы имеем

$$a^2 - b^2 - c^2 + 2iab + 2jac + 2ijbc$$

и

$$(a^2 - b^2 - c^2)^2 + (2ab)^2 + (2ac)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

Соответствующее условие относительно *модулей* выполнено, если мы избавимся от члена, содержащего ij, и, что важнее, если $a^2 - b^2 - c^2$, $2ab$, $2ac$ являются точно координатами *точки-квадрата*, так сказать произведенной из точки пространства a, b, c некоторым расширением правила м-ра Уоррена для точек плоскости. (Прошло много времени с тех пор, как я читал эту книгу, но не могу забыть основные особенности его взглядов.)

Действительно, если мы удваиваем вращение (в его собственной плоскости) от

---

* Philos. Mag. 1884. Vol. 25. P. 489–495 [H. 3. P. 106–110]. Перевод Н.В. Александровой.

положительной полуоси x к радиусу-вектору точки a, b, c, мы достигнем направления радиуса-вектора, проведенного в точку $a^2 - b^2 - c^2, 2ab, 2ac$.

Вот поэтому на миг мне явилось искушение принять, что $ij = 0$. Но это казалось излишним и неудобным, и я осознал, что избавления от члена, который был de trop можно достичь предположением, которое показалось мне менее жестким, именно положить $ij = -ij$. Я принял поэтому $ij = k, ji = -k$, сохранив на свое усмотрение ⟨решить⟩, равно нулю k или нет. Для этой цели я умножил затем $a + ib + jc$ как множитель на $x + ib + jc$ как на множимое, все еще рассуждая, как Вы видите, о двух линиях-сомножителях в общей плоскости с единичной линией. Результат был

$$ax - b^2 - c^2 + i(a + x)b + j(a + x)c + k(bc - bc),$$

где коэффициент при k все еще обращался в нуль, $ax - b^2 - c^2$, $(a + x)b$, $(a + x)c$ легко находились ⟨таким образом, чтобы⟩ быть правильными координатами *точки-произведения* в том смысле, что вращение от единичной линии к радиусу-вектору a, b, c, будучи добавлено к вращению от той же единичной линии к радиусу-вектору другой точки-сомножителя x, b, c, приводило бы к радиусу-вектору точки-произведения, упомянутой недавно. И при этом длина этого последнего радиуса-вектора есть произведение длин двух первых.

Итак, утверждается, что $ij = -ji$, но нет никакой информации относительно значения k. Попробуем теперь смело выполнить общее перемножение двух триплетов и попытаться удовлетворить закон модулей, при котором мы избавлялись бы от k. Выполняется ли

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax - by - cz)^2 + (ay + bx)^2 + (az + cx)^2?$$

Нет, левая часть превышает правую на $(bz - cy)^2$. Но это как раз квадрат коэффициента при k, если раскрыть скобки произведения $(a + ib + jc)(x + iy + jz)$ и если мы допускаем, что $ij = k, ji = -k$, как прежде.

И здесь меня вдруг осеняет сознание, что для вычислений с триплетами мы должны допустить в некотором смысле *четвертое измерение* пространства, или, перенося парадокс в алгебру, должны допустить *третий* мнимый символ k, отличный от i и j, не смешивающийся с i или j, но равный произведению первого как множителя и второго как множимого. Поэтому я пришел к введению *кватернионов* таких, как $a + ib + jc + kd$ или (a, b, c, d).

Я обратил внимание, что, вероятно, $ik = -j$, так как $ik = iij$ и $i^2 = -1$, и что таким же образом мы можем ожидать найти $kj = ijj = -i$, откуда, я думал аналогично же, $ki = j, jk = i$, потому что кажется похожим, что если $ji = -ij$, то мы должны иметь также и $kj = -jk, ik = -ki$. И, так как *порядок умножения этих мнимых не безразличен*, мы не можем заключить, что k^2 или $ijij$ есть +1, потому что $i^2 \times j^2 = -1 \times -1 = +1$. Более правдоподобно, что $k^2 = ijij = -iijj = -1$. И действительно, это последнее предположение необходимо, когда мы согласуем умножение кватернионов с законом умножения модулей. Для умножения $a + ib + jc + kd$ как множителя на $a' + ib' + jc' + kd'$ как на множимое, принимая, что k^2 – действительная величина, мы находим действительную часть произведения: $aa' - bb' - cc' -$

$-dd'$ и коэффициент при k: $ad' + da'$ + члены, возникающие из перемножения i и j. Затем, для того чтобы $2aa'dd'$ могло исчезнуть из выражения квадрата модуля произведения, будучи сложенным с $2k^2aa'dd'$, необходимо, чтобы мы имели $k^2 = -1$.

Мои предположения теперь были полными, именно

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j, \qquad \text{(A)}$$

и вместе с тем я должен был предположить: если

$$(a, b, c, d)(a', b', c', d') = (a'', b'', c'', d''),$$

то имеют место четыре следующие уравнения умножения:

$$a'' = aa' - bb' - cc' - dd', \qquad \text{(B)}$$

$$b'' = ab' + ba' + cd' - dc',$$

$$c'' = ac' + ca' + db' - bd',$$

$$d'' = ad' + da' + bc' - cb'.$$

Но я считал существенным проверить, совместимы ли эти уравнения с законом модулей, именно

$$a''^2 + b''^2 + c''^2 + d''^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2),$$

без удостоверения этой согласованности я рассматривал бы все эти рассуждения как провал.

Судите же о моем удовольствии, когда после тщательной проверки я нашел, что все двадцать четыре произведения в разложении суммы квадратов четырех четырехчленов (B), не содержащих квадратов, взаимно уничтожились и что шестнадцать произведений, содержащих квадраты, были как раз те же самые, которые возникали другим образом – из перемножения $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ и $a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2$.

Мы имеем, следовательно, этот первый закон *умножения двух кватернионов*: модуль произведения равен произведению модулей множителей.

Деление кватернионов легко. Уравнения умножения (B) дают

$$a' = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{-1}(aa'' + bb'' + cc'' + dd''), \qquad \text{(C)}$$

$$b' = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{-1}(-ba'' + ab'' + dc'' - cd''),$$

$$c' = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{-1}(-ca'' + ac'' + bd'' - db''),$$

$$d' = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{-1}(-da'' + ad'' + cb'' - bc'').$$

Модуль частного есть частное модулей; при делении кватерниона на себя самого получим в качестве частного $(1, 0, 0, 0) = 1$.

Сложение и вычитание не требуют пояснений.

Приняв

$$a = \mu\cos\rho, \quad b = \mu\sin\rho\cos\varphi, \qquad \text{(D)}$$

$$c = \mu\sin\rho\sin\varphi\cos\psi, \quad d = \mu\sin\rho\sin\varphi\sin\psi,$$

я назвал ρ *амплитудой* кватерниона, φ – его *широтой* и ψ – его долготой; μ есть модуль. Представляя три коэффициента b, c, d мнимого триплета $ib + jc + kd$ прямоугольными координатами точки пространства, будем иметь, что $\mu\sin\rho$ – радиус-вектор этой точки, его можно назвать *радиусом* или, может быть, длиной кватерниона. Мы можем говорить о *наклоне* одного кватерниона к другому, его косинус есть

$$\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\cos(\psi' - \psi) = \frac{bb' + cc' + dd'}{\mu\mu'\sin\rho\sin\rho'}.$$

Если мы построим сферический треугольник, сторонами которого являются два любых множителя и их произведение (пусть их амплитуды равны соответственно ρ, ρ', ρ''), угол, противолежащий амплитуде произведения, будет дополнительным к наклонению множителей друг к другу; а угол, противолежащий амплитуде какого-либо множителя, будет наклонением другого множителя к произведению.

Эта *теорема сферического треугольника*, скомбинированная с *законом модулей*, требует, кроме того, еще следующее *правило вращения*, чтобы решить, с какой стороны от плоскости двух линий-сомножителей лежит линия-произведение; оно завершает геометрическую конструкцию уравнений умножения кватернионов (B): в каком направлении (налево или направо) должна вращаться положительная полуось i вокруг k, чтобы совпасть с j, в том же направлении должна вращаться линия-множимое вокруг линии-множителя до совпадения с линией-произведением (или с плоскостью, содержащей линию-произведение и линию-множитель).

Если линии-множители совпадают друг с другом по направлению, линия-произведение совпадает с каждым из них[1], ее амплитуда есть сумма их амплитуд, так как сферический треугольник вырождается в одну дугу, два угла обращаются в нуль, а третий становится равным двум прямым углам. Если амплитуды множителей являются дополнительными друг к другу, амплитуда произведения есть π и синус ее равен нулю; поэтому произведение в таком случае *не имеет длины*, или радиуса, но становится *чисто действительной и отрицательной величиной*, так как $\mu''\sin\rho'' = 0$, $\mu''\cos\rho'' = -\mu''$. Множители в этом случае имеют вид

$$(\mu\cos\rho,\ \mu\sin\rho\cos\varphi,\ \mu\sin\rho\sin\varphi\cos\psi,\ \mu\sin\rho\sin\varphi\sin\psi),$$

$$(-\mu'\cos\rho,\ \mu'\sin\rho\cos\varphi,\ \mu'\sin\rho\sin\varphi\cos\psi,\ \mu'\sin\rho\sin\varphi\sin\psi)$$

и их произведение есть

$$(-\mu\mu',\ 0,\ 0,\ 0) = -\mu\mu'.$$

Делая множители равными $\rho' = \pi/2$; $\mu' = \mu$, мы найдем, что

$$(0,\ \mu\cos\varphi,\ \mu\sin\varphi\cos\psi,\ \mu\sin\varphi\sin\psi)^2 = -\mu^2.$$

Квадрат чисто мнимой величины – действительная и отрицательная ⟨величина⟩;

---

[1] Эта ошибка Гамильтона: "...произведение двух векторов есть вектор" – неудивительна, если вспомнить, что письмо написано на второй день после "озарения" и ни твердых навыков, ни автоматизма операций (что впоследствии так ценили в теории) еще не было. – *Примеч. пер.*

квадратный корень из действительной отрицательной величины есть чисто мнимая, имеющая определенную длину, но совершенно неопределенное направление. Квадратный корень из –1 есть любая одна из бесконечно многих чисто мнимых вида

$$\sqrt{-1} = i\cos\varphi + j\sin\varphi\cos\psi + k\sin\varphi\sin\psi.$$

Вообще, однако, квадратный корень из кватерниона имеет только два значения, которые отличаются только знаком, ибо если

$$(a'', b'', c'', d'') = (a, b, c, d)^2,$$

то

$$a'' = a^2 - b^2 - c^2 - d^2,\ b'' = 2ab,\ c'' = 2ac,\ d'' = 2ad,$$

$$\sqrt{a''^2 + b''^2 + c''^2 + d''^2} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

$$a^2 = \frac{1}{2}(a'' + \sqrt{a''^2 + b''^2 + c''^2 + d''^2}),$$

и a^2 не может обращаться в нуль никогда, кроме случая чисто отрицательного квадрата $b'' = c'' = d'' = 0$, $a'' < 0$.

Умножение выполняется легко, если мы знакомы с правилами произведения чисто мнимых. Это произведение согласно (B) есть

$$(0, b, c, d)(0, b', c', d') = (-bb' - cc' - dd', cd' - dc', db' - bd', bc' - cb').$$

Линия-произведение перпендикулярна плоскости множителей; ее длина равна произведению их длин на синус угла между ними; действительная часть меняется с изменением знака, она есть то же произведение длин множителей на косинус их наклона.

Наконец, мы можем разложить последнюю проблему на две другие: умножить две чисто мнимые величины, совпадающие по направлению, и умножить две величины, образующие прямой угол. В первом случае произведение есть чисто отрицательная величина, равная произведению длин или модулей с обратным знаком. Во втором случае произведение есть чисто мнимая, длина которой есть произведение длин множителей и которая есть перпендикуляр к ним обеим. Различать один такой перпендикуляр и другой, противоположный ему, можно по уже установленному правилу вращения.

Мне кажется, что в чисто мнимой части здесь есть нечто, аналогичное поляризованной интенсивности (polarised intensity), а в действительной части кватерниона – неполяризованной энергии (unpolarised energy), безразличной к направлению. Таким образом, мы имеем легкий намек на будущее Исчисление Полярностей (Calculus of Polarities). Это, конечно, очень неопределенно, но я надеюсь, что бóльшая часть того, что я сказал выше, ясна и математична.

В надежде, что Вы, может быть, соблазнитесь пóследовать взглядам, которые таким образом открылись, остаюсь с наилучшими пожеланиями

Ваш искренний друг
Уильям Р. Гамильтон

Х. Ллойд

О ЯВЛЕНИЯХ, НАБЛЮДАЕМЫХ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ СВЕТА ВДОЛЬ ОСЕЙ ДВУХОСНЫХ КРИСТАЛЛОВ* [1]

Хорошо известно, что при падении луча света на некоторые кристаллы (такие, как исландский шпат или кварц) он обычно разделяется на два пучка. Один из пучков преломляется по известному закону синусов, а направление второго определяется новым, необыкновенным законом, впервые указанным Гюйгенсом.

Долгое время предполагалось, что эти законы применимы ко всем двоякопреломляющим веществам. Проблема двойного луча преломления была решена во всей своей общности лишь после того, как ею занялся Френель. Исходя из гипотезы о том, что упругость колеблющейся среды внутри кристалла неодинакова по трем взаимно перпендикулярным направлениям, Френель показал, что волновая поверхность имеет вид не сферы и не сфероида, как в случае гюйгенсовского закона, а поверхности 4-го порядка, состоящей из двух листов, точки касания которых с касательными поверхностями определяют направления двух лучей. Из этой конструкции следует, что в общем случае лучи не подчиняются ни закону Снеллиуса, ни закону Гюйгенса, а преломляются по некоторому новому, более сложному закону. Такие кристаллы обладают двумя оптическими осями и называются *двухосными*. Если упругость среды одинакова по двум из трех направлений, то уравнение волновой поверхности разлагается на два квадратичных множителя, задающих уравнения сферы и сфероида в теории Гюйгенса. В этом случае две оптические оси сливаются в одну ось и, таким образом, закон Гюйгенса следует из общего решения и оказывается соответствующим случаю *одноосных* кристаллов. Наконец, если упругость одинакова по всем трем направлениям, то волновая поверхность имеет вид сферы. Наблюдается только один луч, преломляющийся по обыкновенному закону синусов.

Однако в изящной и глубокой теории Френеля существовали два замечательных случая, которые ее автор упустил из виду, а может быть, не оценил по достоинству. В сообщении, представленном несколько месяцев назад Королевской ирландской академии, проф. Гамильтон восполнил эти пробелы в теории Френеля и пришел к результатам в высшей степени новым и замечательным.

Чтобы понять его выводы, необходимо рассмотреть форму волновой поверхности. Уравнение волновой поверхности, записанное в полярных координатах, имеет вид

$$(a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma)r^4 - [a^2(b^2 + c^2)\cos^2\alpha + b^2(a^2 + c^2)\cos^2\beta +$$
$$+c^2(a^2 + b^2)\cos^2\gamma]r^2 + a^2b^2c^2 = 0,$$

где α, β, γ – углы, образуемые радиусом-вектором с тремя осями координат. Если положить в этом уравнении $\cos\gamma = 0$, так чтобы получить сечение поверхности

---

* *Lloyd H.* On the phenomena presented by light in its passage along the axes of biaxial crystals // Philos. Mag. 1833. P. 112–120. Перевод Ю.А. Данилова.

плоскостью xy, то результат приводится к виду

$$(r^2 - c^2)[(a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha)r^2 - a^2b^2] = 0,$$

т.е. волновая поверхность пересекается с плоскостью xy по окружности и эллипсу, уравнения которых имеют вид

$$r = c, \quad (a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha)r^2 = a^2b^2.$$

Если c – радиус окружности, заключенный между полуосями эллипса a и b, то эти две кривые пересекаются в четырех точках, называемых *остриями*. Угол, образуемый радиусом-вектором, проведенным в острие, с осью x, нетрудно найти, исключив r из уравнений двух кривых:

$$\sin\alpha = \pm\frac{a}{c}\left(\frac{c^2 - b^2}{a^2 - b^2}\right)^{1/2}.$$

В каждой из найденных таким образом точек существует по две касательные к плоскости сечения и, следовательно, по две касательные плоскости к поверхности. Таким образом, один луч, дошедший внутри кристалла до одной из этих точек, по выходе из кристалла разделится на два луча, направления которых определяются направлениями касательных плоскостей.

Такова, насколько можно судить, была френелевская концепция данного случая. Однако проф. Гамильтон показал, что в каждой из найденных точек существует острие, причем не только в проведенном частном сечении, но и в любом сечении волновой поверхности, проходящем через прямую, направление которой только что было определено. Таким образом, на общей волновой поверхности в точках пересечения окружности и эллипса существует *четыре конусовидных острия*. В каждой из этих точек должно существовать бесконечно много касательных плоскостей. Следовательно, *один луч*, идущий из точки внутри кристалла в любом из упомянутых выше направлений, должен разделяться на *бесконечно большое число выходящих лучей*, образующих конус 4-го порядка.

Ясно, что пересекающиеся указанным образом окружности и эллипс должны иметь четыре общих касательных. Френель показал, что плоскости, проходящие через эти касательные и параллельные 3-й, или средней, оси, параллельны круговым сечениям искривленной поверхности, которую он назвал поверхностью упругости. По-видимому, Френель заключил, что эти плоскости касаются волновой поверхности только в двух указанных выше точках и, следовательно, что один луч, идущий из точки извне двухосного кристалла и преломляющийся в направлении оптической оси, будет обязательно разделяться на два луча, определяемых точками касания. Но, как показал проф. Гамильтон, четыре плоскости, о которых идет речь, касаются волновой поверхности не только в двух, но в *бесконечно многих точках*, каждая из которых представляет собой небольшую *окружность касания*, плоскость которой параллельна плоскости одного из двух круговых сечений поверхности упругости. Следовательно, *один луч* обыкновенного света, идущий из внешней точки и преломляющийся в требуемом направлении, должен, если теория вер-

на, разделяться *внутри* кристалла на *бесконечно много лучей*, образующих *коническую поверхность*.

Итак, перед нами два совершенно особенных и необычных следствия из волновой теории, не только не подкрепляемых ранее наблюдавшимися явлениями, но даже противоречащих всем извлекаемым из опыта аналогиям. Если их удастся подтвердить экспериментально, то они послужат новым и почти убедительным доказательством истинности волновой теории. С другой стороны, если эксперимент опровергнет их, то это будет означать, что волновую теорию необходимо отвергнуть или надлежащим образом усовершенствовать.

Движимый естественным стремлением подвергнуть волновую теорию этой деликатной проверке и удостовериться в том, насколько хорошо новые теоретические заключения согласуются с реальными явлениями, проф. Гамильтон обратился ко мне с просьбой поставить серию опытов с указанной целью. Я охотно занялся этой экспериментальной проблемой со всем вниманием, которого заслуживал предмет, и, к счастью, преуспел в проверке первой из упомянутых разновидностей конической рефракции. Надеюсь, что вскоре мне удастся провести аналогичные исследования и второй ее разновидности[1].

Минерал, который я использовал в своих экспериментах, *арагонит*, был выбран мной отчасти из-за величины предсказываемого теорией для этого случая конуса, а отчасти из-за того, что все три упругости для арагонита были определены, по-видимому весьма тщательно, проф. Рудбергом, что позволяло применять к нему результаты теории без дополнительного изучения. Образец, которым я пользовался, был значительных размеров и отличался чистотой. Мне предоставил его м-р Доллонд. Образец был огранен так, что его параллельные грани располагались перпендикулярно прямой, равноудаленной от оптических осей. Если представить себе луч обыкновенного света, выходящий в обоих направлениях из такого кристалла вдоль прямой, соединяющей два острия на волновой поверхности, то ясно, что луч из обеих граней должен выходить одинаковым образом. Следовательно, луч, идущий вдоль этой прямой и образующий расходящийся конус лучей на выходе из второй грани кристалла, должен возникать из сходящегося конуса, падающего на первую грань. В соответствии с этим, установив почти точно направление оптической оси по кольцам, я поместил короткофокусную линзу на расстоянии, равном ее фокусному расстоянию от первой поверхности, придав ей такое положение, чтобы центральный луч пучка после преломления шел вдоль оси. Затем, глядя сквозь кристалл на свет лампы, находившейся на значительном удалении, я заметил в ожидаемом направлении точку, более яркую, чем непосредственно примыкающее к ней пространство, и окруженную чем-то напоминающим лучи звезд. Опасаясь, как бы это явление не было вызвано каким-нибудь изъяном в кристалле, я повторил наблюдение в поляризованном свете и, к радости своей, обнаружил систему лучей в том же направлении. Впоследствии это было подтверждено многочисленными наблюдениями на различных частях кристалла.

Полученный результат интересен сам по себе, независимо от его связи с теори-

[1] После того как мы получили эту работу, автор сообщил нам, что ему удалось *наблюдать* явления, соответствующие второй разновидности конической рефракции. Отчет об этой работе будет помещен в следующем номере нашего журнала. – *Примеч. ред. англ. журн.* См. рус. пер. в наст. изд.

ей. До сих пор принято было считать, что единственным средством экспериментального определения оптических осей в веществах со слабой двоякопреломляющей способностью является наблюдение колец, появляющихся вокруг осей, когда падающий свет и выходящий свет поляризованы. Здесь же обыкновенный, или неполяризованный, свет претерпевает в окрестности оптических осей двухосных кристаллов такие изменения, что видимое направление осей может быть определено сразу с помощью простейшего приспособления.

Но, чтобы изучить выходящий конус, необходимо было исключить свет, проходящий через кристалл в другом направлении. Для этого на поверхность кристалла, обращенную к глазу, помещалась пластинка из тонкого металла, в которой проделано небольшое отверстие. Положение отверстия подбиралось с таким расчетом, чтобы прямая, соединяющая отверстие с яркой точкой на первой грани, была как можно ближе к направлению оптической оси. Точного совпадения с этим направлением можно достичь после нескольких попыток. Явление, открывающееся при наблюдении сквозь отверстие, если достигнуто полное совпадение с оптической осью, в высшей степени любопытно. Наблюдатель видит светлую окружность с небольшим темным пятном вокруг центра и на этом темном пятне (имеющем почти круглую форму) две яркие точки, разделенные узкой и четкой темной линией. Наблюдаемая картина резко меняется, стоит лишь немного сдвинуть отверстие в пластинке. На первом этапе изменения темное пятно в центре сильно увеличивается и внутри него появляется двойной конус. Окружность вырождается в дугу, составляющую почти четверть окружности, а от конуса ее отделяет темный промежуток. Затем отделившийся конус исчезает, а дуга окружности уменьшается и, по мере того как возрастает угол наклона прямой к оси, эти две светящиеся части постепенно превращаются в два пучка, на которые один луч разделяется в других частях кристалла.

Те же эксперименты были повторены, но для случая, когда пламя лампы подвинуто ближе к первой поверхности кристалла. В этих опытах линза была снята, а для того чтобы сформировать падающий конус лучей, поверхность падения покрывалась тонкой металлической пластинкой с проделанным в ней небольшим отверстием. Результаты в точности совпали с полученными ранее.

Дабы подвергнуть теорию еще более ощутимой проверке, я заменил в ближайшей к лампе пластинке точечное отверстие узкой щелью и расположил ее так, чтобы плоскость, проходящая через линию щели на первой пластинке и точечное отверстие на второй пластинке, совпадала бы с плоскостью оптических осей. В этом случае, согласно развитой теории, все лучи, прошедшие через два отверстия, должны претерпеть двойное преломление в плоскости оптических осей, так что при наблюдении через второе отверстие ни одна часть линии не должна была бы казаться уширенной, в то время как, согласно изящной теории проф. Гамильтона, луч, идущий в направлении оптической оси, должен был бы преломляться на каждой плоскости, проходящей через указанную прямую. В соответствии с этим выводом я обнаружил при наблюдении через второе отверстие, что светлая линия нигде не уширилась, кроме как в направлении одной из оптических осей, и что в окрестности этого направления границы линии перестали быть прямолинейными и сама линия раздулась в овальную кривую.

В смысле общей проверки принципа проделанный мной эксперимент достаточно убедителен. Однако мне хотелось пронаблюдать выходящий конус более непосредственно. После нескольких попыток мне удалось добиться желаемого с помощью солнечного света и получить лучи, выходящие из отверстия во второй пластинке на экране из матового стекла. Это позволило мне наблюдать явление на различных расстояниях и воспользоваться всеми преимуществами увеличения. Свет был достаточно ярким, и изображение получилось отчетливым, даже когда плоское сечение конуса лучей на экране достигало двух дюймов в диаметре.

Исследуя выходящий конус с помощью турмалиновой пластинки, я с удивлением заметил, что при заданном положении оси турмалина в нуль обращается лишь один радиус сечения конуса и что при повороте турмалиновой пластинки на 180° исчезающий луч поворачивается на 360°. По-видимому, это означает, что все лучи конуса поляризованы в различных плоскостях.

При более тщательном изучении этого интересного явления я открыл замечательный закон: угол между плоскостями поляризации любых двух лучей конуса равен половине угла, заключенного между плоскостями, проходящими через сами лучи и ось конуса. Именно этим законом объясняется обращение в нуль только одного радиуса сечения конуса: противоположный радиус поляризован в плоскости, перпендикулярной плоскости поляризации первого радиуса. Нетрудно показать, что сам закон с необходимостью следует из общей теории, примененной к рассмотренному частному случаю, однако он верен лишь приближенно и выполняется в предположении, что двухосная энергия кристалла мала (предположении, подтверждаемом явлениями во всех ранее исследованных кристаллах).

После того как общие явления были наблюдены, осталось произвести измерения и сравнить их с теоретическими предсказаниями. Для этой цели я определил величину сечения конуса на значительном расстоянии от кристалла, заметив с помощью небольшого телескопа точки, в которых угол раскрытия конуса перестает быть видимым (по прошедшему свету). Угол раскрытия конуса определялся по точно измеренному расстоянию с помощью таблиц тангенсов. Оказалось, что в плоскости оптических осей этот угол составляет 6°14′, а в перпендикулярной плоскости 5°46′ – среднее значение в точности равно 6°. Затем я поместил пламя восковой свечи в центр сечения и, сняв пластинку со второй поверхности кристалла, установил метку на большом расстоянии на линии отраженного луча. Совместив центр секстанта Хэдли с точкой, в которой находился кристалл, я измерил угловое расстояние между пламенем свечи и меткой. Угол оказался равным 31°56′. Следовательно, угол выхода, соответствующий оси конуса, составлял 15°58′.

Приняв три показателя преломления для арагонита равными 1,5326; 1,6863; 1,6908 (показатели преломления для среднего луча E по измерениям проф. Рудберга[2]), проф. Гамильтон показал, что направление выходящих лучей в плоскости оптических осей определяется по формулам

$$\sin R_o = 1{,}6863 \sin I, \qquad \sin R_e = 1{,}68708 \sin (I - 1°44'88''),$$

[2] Philos. Mag. 1833. Vol. 1. P. 140–141. – *Примеч. ред. англ. журн.*

где I – внутренний угол падения, или угол, образуемый лучом в острие с нормалью к поверхности выхода; R_o, R_e – соответствующие лучи преломления в воздухе. Но в данном случае нормаль к поверхности выхода делит пополам угол между оптическими осями, поэтому I = 9°56'27". Следовательно, R_o = 16°55'27" и R_e = = 13°54'49". Разность этих углов, равная 3°0'38", можно назвать углом раскрытия конуса, а их полусумму, равную 15°23′8", – средним углом выхода. Найденный выше угол 15°58′ отличается от последнего лишь на 33′, но наблюдаемый угол раскрытия конуса примерно вдвое больше значения, предсказываемого теорией.

Я также измерил угол раскрытия конуса, проецируя его на экран из матового стекла, помещаемый на различных расстояниях, и отмечая на экране очертания сечения. Измерив диаметр сечения и расстояние, я затем определял угол. Три произведенных таким образом измерения величины угла дали соответственно величины 6°24′; 5°56′; 6°22′ (среднее 6°14′), что хорошо согласуется с значениями угла, полученными предыдущим методом.

Считая, что расхождения между экспериментом и теорией возникли главным образом из-за лучей, наклоненных под малыми углами к оптической оси и прошедших до второй поверхности вследствие слишком больших размеров отверстия, я вознамерился определить, как влияют на наблюдения отверстия различных форм и размеров.

При очень большом отверстии вокруг оптической оси видны две концентрические окружности, внутренняя окружность почти вдвое ярче окружающего ее кольца. Свет внутренней окружности не поляризован, в то время как свет окружающего ее кольца поляризован по уже упоминавшемуся закону. При уменьшении отверстия диаметр внутренней окружности убывает, ширина наружнего кольца остается почти неизменной до тех пор, пока внутренняя окружность не стягивается в точку в центре наружней окружности. При дальнейшем уменьшении отверстия в центре внезапно появляется темное пятно, которое расширяется, по мере того как уменьшается отверстие. Наконец, при очень малом отверстии мне удалось получить темное пятно, занимавшее около 3/4 всего пространства, или свести ширину светящегося кольца примерно до 1/8 его наружнего диаметра.

При таком уменьшенном отверстии я наблюдал картину, которая возникает, когда линия света на первой поверхности параллельна плоскости оптических лучей. Раздувшиеся кривые, о которых я уже упоминал, окружающие в данном случае оптическую ось, по ширине уменьшаются до величины, соответствующей ширине наружнего кольца в предыдущем эксперименте, и разделены значительным темным промежутком. Когда плоскость, проходящая через два отверстия немного отклонялась от плоскости оптических осей, явления претерпевали множество красивых изменений. Кривые во всех случаях принимали форму конхоиды, полюс которой совпадал с проекцией оптической оси, а асимптота – с линией на первой поверхности.

Наконец, переставив отверстия на двух поверхностях, я не обнаружил никаких изменений в возникающих явлениях: они во всех отношениях были симметричны относительно поверхностей падения и выхода.

Нетрудно объяснить все эти разнообразные явления. Когда отверстие на второй поверхности достигает значительных размеров, лучи, идущие к краю отверстия от

точки первой поверхности, сильно наклонены к оптической оси, которая, как мы будем предполагать, соединяет эту точку с центром отверстия. Следовательно, как внутренний, так и внешний лучи, на которые разделяется каждый луч, наклонены *наружу*. Ясно поэтому, что в центре должно существовать яркое пятно, каждая точка которого освещена одним внутренним и одним внешним лучом. Это пятно вдвое ярче окружающего пространства, каждая точка которого освещена только одним лучом, а поскольку лучи, которые его образуют, поляризованы в плоскостях, расположенных под прямыми углами одна к другой, то их комбинация дает неполяризованный свет.

При уменьшении отверстия угол наклона между внутренними лучами убывает, пока они, наконец, не станут параллельными и яркое пятно в центре не выродится в точку. При дальнейшем уменьшении отверстия внутренние лучи приобретают наклон *внутрь* и пересекаются. Ясно, что за точкой пересечения должно лежать темное пятно, не освещаемое ни одним лучом. Поскольку в этом случае противоположно поляризованные лучи не встречаются, весь свет оказывается поляризованным по закону, который был объяснен выше. Наконец, при дальнейшем уменьшении отверстия внутренние лучи с одной стороны становятся почти параллельными внутренним лучам с другой стороны, темное пятно в центре увеличивается и его размеры приближаются к размерам наружного ограничивающего конуса. Кольцо света становится бесконечно тонким, и конус приближается к математической поверхности.

Нетрудно понять, что угол раскрытия истинного конуса почти равен сумме углов внутренней и наружной границ наблюдаемого конического кольца. Когда же в центре появляется яркое пятно, как в случае большого отверстия, истинный угол равен разности углов раскрытия наружного и внутреннего конусов. Когда весь конус имеет одинаковую яркость и темное пятно в центре стягивается в точку, наблюдаемый конус вдвое больше искомого.

Именно к последнему случаю были очень близки эксперименты, в которых производились упоминавшиеся выше измерения. Следовательно, исправленный угол, равный половине наблюдаемого, очень точно совпадает с предсказываемой теорией.

Поскольку должен существовать такой же конус лучей, падающих на первую поверхность кристалла, я произвел другие измерения, чтобы установить его величину. Для этого я поместил грубый микрометр, состоящий из двух подвижных металлических пластинок, непосредственно перед линзой и стал сближать их до тех пор, пока при взгляде на них сквозь отверстие на второй поверхности мне не стало казаться, что они касаются противоположных сторон круговых изображений. Аналогичную операцию я проделал с внутренней окружностью кольца и тщательно измерил фокусное расстояние линзы. Тем самым были получены внутренний и внешний размеры конического кольца и вычислен истинный угол. Среднее из трех таких измерений составило для исправленного угла раскрытия конуса 3°47′.

Ранее я уже упоминал о том, что теоретическое значение угла раскрытия конуса было вычислено по трем показателям преломления, измеренным Рудбергом. Даже очень малая ошибка в значениях этих показателей преломления или очень малое различие между их значениями для различных образцов одного и того же минерала

приводят к значительным изменениям в угле. Кроме того, на результатах эксперимента в определенной мере должны сказываться эффекты дифракции. Таким образом, хотя далеко не все меры были приняты для обеспечения достижимой точности, тем не менее совпадение полученных результатов с теорией настолько хорошее, насколько можно было бы ожидать в разумных пределах.

Х. Ллойд

НОВЫЕ ОПЫТЫ С ЯВЛЕНИЯМИ, НАБЛЮДАЕМЫМИ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ СВЕТА ВДОЛЬ ОСЕЙ ДВУХОСНЫХ КРИСТАЛЛОВ*

В своей предыдущей заметке[1] я сообщил о том, что, занимаясь дальнейшим развитием волновой теории применительно к законам двойного лучепреломления, проф. Гамильтон пришел к замечательному выводу. Он предсказал, что в двух случаях преломления в двухосных кристаллах один падающий луч должен разделяться на бесконечно много лучей, образующих преломленный конус. Первый из этих случаев конической рефракции происходит при выходе луча в воздух из точки на поверхности или внутри кристалла в направлении прямой[2], соединяющей два противоположных острия на волновой поверхности. Второй происходит внутри кристалла, когда на него извне падает один луч так, что один из преломленных лучей совпадает с нормалью к круговому сечению поверхности упругости, или с оптической осью[3].

В статье, на которую я сослался, был изложен отчет о некоторых экспериментах, поставленных мной по просьбе проф. Гамильтона и доказавших, что первый случай конической рефракции существует в действительности. В этой связи я хотел бы только добавить, что дополнительные измерения, произведенные уже после того, как была написана первая статья, дали лучшее согласие между наблюдавшимся и вычисленным конусами, чем первоначальные измерения.

После того как первая работа была завершена, мне удалось также наблюдать вторую разновидность конической рефракции, и я хотел бы кратко изложить результаты своих экспериментов, отсылая за всеми деталями к следующему тому "Transactions of the Royal Irish Academy".

Как уже упоминалось, существование наблюдавшегося явления зависит от

---

* *Lloyd H.* Further experiments on the phenomena presented by light in its passage along the axes of biaxial crystals // Philos. Mag. 1833. Vol. 2, N 9. P. 207–210. Перевод Ю.А. Данилова.

[1] *Lloyd H.* On the phenomena presented by light in its passage along the axes of biaxial crystals // Philos. Mag. 1833. Vol. 2, N 8. P. 112–120. См. рус. пер. в наст. изд.

[2] Весьма желательно отличать такие прямые (нормаль к круговому сечению *поверхности упругости* и нормаль к круговому сечению *эллипсоида* в теории Френеля) по надлежаще выбранным названиям. Френель называет первую прямую *оптической осью*, когда определяет термин "оптическая ось", но затем называет так же другую прямую. Боюсь, что в своем предыдущем сообщении я также применял этот термин в двух смыслах, хотя, как правило, для обозначения второй прямой использовал, следуя проф. Гамильтону, термин "луч из острия".

[3] См. примеч. 2.

одного математического факта – от того, что волновой поверхности касается в бесконечно многих точках, представляющих собой небольшие круги, одна плоскость, параллельная плоскости круговых сечений поверхности упругости. Если луч падает на кристалл извне в таком направлении, что один из преломленных лучей может совпадать с нормалью к упомянутой плоскости, он разделяется в кристалле на конус лучей, определяемый прямыми, соединяющими центр волны с точками на границе круга контакта. Угол раскрытия такого конуса равен $\mathrm{arctg}\left(\sqrt{a^2-c^2}\ \ \sqrt{c^2-b^2}\ /\ c^2\right)$ где c – средняя ось. Среднее значение угла арагонита, вычисленное по элементам кристалла, определенным проф. Рудбергом, составляет 1°55′.

Так как лучи, образующие конус, при выходе преломляются в направлении, параллельном падающему лучу, они образуют в воздухе небольшой цилиндр из лучей. Основанием цилиндра служит сечение конуса второй поверхностью кристалла. Этот цилиндр всегда очень мал, и, для того чтобы открыть его существование и определить размеры, необходима бóльшая тщательность, чем в описанных выше экспериментах.

Сначала я пользовался светом от лампы, помещенной на некотором расстоянии. Дабы сделать падающий луч как можно более тонким, я пропускал свет от лампы через два малых отверстия, одно из которых было в экране, расположенном вблизи от пламени, а другое проделано в тонкой металлической пластинке, находившейся у первой поверхности кристалла. Наблюдая два луча, на которые в общем случае рзаделялся падающий луч, я медленно поворачивал кристалл так, чтобы угол падения менялся очень плавно. После нескольких попыток, руководствуясь главным образом изменением относительного положения лучей, мне, наконец, удалось найти такой угол падения, при котором два луча казались размытыми по сплошной окружности. Диаметр окружности был примерно равен расстоянию между лучами перед тем, как они расплылись.

Выходящий свет в данном эксперименте воспринимался непосредственно глазом, вооруженным линзой. При повторении того же эксперимента с солнечным светом мне удалось получить выходящий цилиндр на небольшом экране из серебряной бумаги и увидеть, что в величине сечения при различных расстояниях от кристалла нет заметного различия.

При точном подборе угла падения свет всего кольца был белым, причем всюду одинаковой интенсивности. Но при малейшем отклонении от точного угла падения две противоположные четверти окружности были менее яркими, чем две другие, и обе пары дуг имели дополнительные цвета.

Теоретический угол падения вычисляется без труда. Луч, идущий внутри кристалла в направлении оптической оси, нормален к волновой поверхности. Направление соответствующего угла падения определяется по обычному закону синусов, если за показатель преломления принять средний показатель преломления кристалла. Угол, образуемый оптической осью с осью x или с перпендикуляром к поверхности падения, равен $\mathrm{arctg}\left((a^2-b^2)/(a^2-c^2)\right)^{1/2}$. Для арагонита значение этого угла составляет 9°1′, если значения трех показателей преломления принять

равными измеренным проф. Рудбергом для луча *E*. Соответствующий угол падения равен 15°19′ при показателе преломления 1,6863. ***Наблюдаемый*** угол падения, полученный при измерении угла между падающим и отраженным лучами, равен 15°40′, что отличается от вычисленного угла на 21′.

Дабы определить угол конуса, я измерил диаметр его сечения второй поверхностью кристалла и нашел, что тот равен 0,016 дюйма. Толщина кристалла составляла 0,49 дюйма, а угол наклона конического пучка к перпендикуляру – около 9°. Угол раскрытия конуса, вычисленный по этим данным, оказался равным 1°50′, что лишь на 5′ отличается от значения, предсказанного теорией.

Исследуя выходящие лучи с помощью турмалиновой пластинки, я обнаружил, что они поляризованы, причем по закону, уже наблюдавшемуся в предыдущей разновидности конической рефракции. Результат в данном случае предсказан теорией, в предыдущем случае впервые открыт при наблюдении.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Л.С. ПОЛАК

УИЛЬЯМ РОУЭН ГАМИЛЬТОН (1805–1865)

ЖИЗНЬ

ВУНДЕРКИНД

Уильям Роуэн Гамильтон родился в 1805 г. в полночь между третьим и четвертым числами августа в столице Ирландии Дублине. Он был четвертым сыном в семье, где было девять человек детей. Дед Гамильтона – ирландец, женившийся на шотландке, был аптекарем. Старший сын его, отец Уильяма Роуэна Гамильтона, стал адвокатом и нотариусом. Однажды отец Уильяма Роуэна защищал в суде объявленного вне закона ирландского патриота Арчибальда Роуэна и добился отмены приговора. От Арчибальда Роуэна, который был крестным отцом при крещении Уильяма, мальчик получил свое второе имя. Когда Уильяму Роуэну исполнился один год, родители решили отдать его для образования дяде Джеймсу Гамильтону, священнику г. Трима в графстве Уэстмит, жившему вместе со своей сестрой Сидни.

В возрасте трех лет Уильям Роуэн – "a hopeful blade", подающий надежды парень, как сообщает Сидни в письме матери Уильяма. Его раннее развитие хорошо известно. Когда ему было три года с небольшим, он свободно читал поанглийски и знал значительную часть тогдашнего курса арифметики. В пять лет он не только хорошо знал географию, библию, но и мог читать и переводить с латинского, греческого, древнееврейского языков и любил декламировать большие отрывки Драйдена, Мильтона, Гомера. К восьми годам Уильям Роуэн изучил итальянский и французский языки. В это же время он настолько овладевает латынью, что оказывается в состоянии выражать свои чувства и впечатления в импровизированных латинских речах. Кроме того, он изучает арабский язык и санскрит. Письмо, написанное Уильямом[1] в возрасте десяти с половиной лет, дает хорошее представление об его интересах и характере занятий: "Я читал в течение некоторого времени Лукиана и Теренция, еврейский псалтырь по воскресеньям, а по субботам что-нибудь санскритское, арабское и персидское. В свободные часы я читаю "Одушевленную природу" Гольдсмита и какую-либо новую повесть или

---

[1] Письмо сестре 14 дек. 1815 г.: *Graves R.P.* Life of Sir William Rowan Hamilton. Dublin: Univ. press, 1882. Vol. 1. Далее ссылки на это издание (в 3 томах) даются сокращенно: Gr. 1, 2, 3.



Гамильтон с сыном, около 1845 г.

стихи, которые мне встретятся. Я очень люблю Вальтера Скотта. Я далеко продвинулся в практике арифметики и проработал с дядей почти половину первой книги Евклида. Я изучаю совместно древнюю и новую географию. Каждое утро на втором уроке я занимаюсь греческим, Новым заветом..." Это увлечение языками имело не только "спортивный" характер. Тут была определенная жизненная цель. Изучение западных и восточных языков Уильямом в детском и юношеском возрасте было связано с желанием отца, чтобы он впоследствии поступил на службу в Восточную Индийскую Компанию.

Отец умер, когда Уильяму Роуэну было 14 лет (мать умерла на два года раньше), оставив на его попечении трех сестер (впоследствии они жили с ним в обсерватории). Известная английская писательница Мария Эджуорт, с семьей которой Уильям Роуэн стал очень близок, писала в 1824 г. о Гамильтоне, с которым ее познакомили: "Мистер Батлер пришел с молодым Гамильтоном, восемнадцати лет, действительно чудом талантливости, о котором профессор Бринкли говорит, что он может стать вторым Ньютоном"[2].

[2] Nature. 1883. Vol. 28. P. 1–4. Рец. на [Gr. 1].



Вид Дублина с Кэпель-стрит на Эссекс-мост



Трим, где прошли детские годы Гамильтона

ПОЭТ ИЛИ МАТЕМАТИК?

Дилемма кем быть – поэтом или математиком – отняла, вероятно, немало душевных сил у молодого Гамильтона раньше, чем он понял: его творческое будущее все же математика. Он жил и думал в атмосфере поэзии, он писал поэмы по любому случаю и на любую тему. Естественно, что, будучи разочарован (причем дважды) в любви, он изливал свое горе в стихах, писал послания к дню рождения своих сестер, сонеты о красоте природы. Но кроме того, мы находим "Оду к Луне во время полного затмения". Он пишет Вордсворту: "Я всегда старался внести в мое научное развитие что-то от духа поэзии и чувствовал, что такая примесь существенна для интеллектуального совершенства"[3]. Например, стихи "To the Evening Star", написанные Гамильтоном в шестнадцатилетнем возрасте, начинались так:

How fondly do I hail, star of Eve,
In all the Beaty sinking to the west
And as if loth our firmament to leave
Slow and majestic sinking to the rest.

("Нежно я приветствую тебя, вечерняя звезда, во всей своей красе опускающуюся на запад, как бы стремясь покинуть небосвод, медленно и величественно уходя на покой".)

Его письма показывают, что впервые он начал писать стихи в четырнадцатилетнем возрасте. В Тринити колледже он получал премии по науке и классике и вдобавок премии за стихи.

Гамильтон был всегда уверен в своих математических способностях, чего нельзя сказать о его поэтическом даре. В отношении последнего он нуждался в одобрении и поддержке, которую и попытался получить в 1827 г. После того как Гамильтон был избран профессором астрономии, в июне месяце он предпринял большое путешествие по Ирландии и Англии, кульминацией которого было посещение в сентябре Озерного края и Уильяма Вордсворта.

Уильям Вордсворт (1770–1850), поэт, певец природы и философствующий лирик, представитель "Озерной школы" английского романтизма, в молодости сочувствовавший идеям Великой французской революции, был настроен весьма радикально и демократично, но с возрастом быстро эволюционировал вправо.

Один из младших современников Вордсворта Роберт Браунинг взволнованно и скорбно писал об отступничестве Вордсворта в стихотворении "Бывший вождь".

Когда Вордсворт встретился с Гамильтоном, ему было 57 лет, а Гамильтону 22 года. И несмотря на разницу в годах и жизненном опыте (независимая жизнь Гамильтона только начиналась), между ними быстро установилось глубокое взаимопонимание.

---

[3] Гамильтон и Джон Гершель (1792–1871) обменивались сонетами, и первый преуспел в том, что смог убедить Вордсворта, что абстрактная математика должна рассматриваться как одна из форм искусства. Гамильтон много размышлял и писал своим друзьям "о... связи между высшей областью науки и областью поэзии, на чем он так упорно настаивал, утверждая, что и в той и в другой есть простор для силы воображения и потребности в ней. По его мнению, современная геометрия, которая имеет дело с бесконечным и воображаемым в отношении пространства, обладает в своем роде красотой и обаянием; смелые и удачные начинания таких геометров, как Понселе и Шаль, он считал тесно связанными с поэзией" (выдержка из "Eloge" Гамильтона, прочитанной Грэйвсом [H. 1. P. IX–XVI]).

Много лет спустя Вордсворт тепло рассказывал об их первой встрече. Гамильтон и его друзья пили чай и провели вечер с Вордсвортом в Райдле. Вордсворт пошел провожать своих гостей к их жилищу, находившемуся вблизи Райдла на расстоянии примерно мили. Во время этой прогулки происходил столь интересный разговор, что Гамильтон решил сопровождать Вордсворта обратно до Райдла. По прибытии туда Вордсворт решил, что они не могут расстаться, прервав разговор, и они снова отправились к жилищу Гамильтона, дойдя до которого опять пошли обратно в Райдл. Гамильтон вернулся домой очень поздно. Эта встреча с выдающимся поэтом вдохновила его на создание поэмы "It Haunts me Yet" ("Это мое любимое место, несмотря ни на что")[4]. В ответ Вордсворт написал: «Ваши стихи одушевлены истинным поэтическим духом, так как они, очевидно, являются итогом сильного чувства... я уверен, что Вы не будете огорчены (hurt), если я скажу Вам, что стихотворная техника... еще не такова, какой она должна быть:



Дж. Гершель

Some Touch of Human Symphathy find way
And whisper that while Truth and Science's Ray
With such serene effulgence o'er thee shone.

Sympathy могут whisper, но a Touch of Sympathy не могут. "Истинный луч и научный" вместо "луча истины и науки" не только крайне шероховато, но *луч светит* есть если не абсолютный плеоназм, то большая неуклюжесть; луч падает или мелькает – можно сказать; Солнце, или Луна, или свеча светят, но не луч». Подобные комментарии были сделаны Вордсвортом и к некоторым другим местам поэмы. Гамильтон в своем ответе хотя и пытался оправдать выбор отдельных словосочетаний и терминов, но в конце концов написал: "...искренне сознаюсь в общих дефектах моей поэзии..."

Дружба между семьями Гамильтона и Вордсворта была позднее упрочена тем, что Гамильтон, по просьбе Вордсворта, стал крестным отцом одного из его внуков.

Гамильтон только один раз посетил Лондон, в сущности говоря, чтобы повидаться с другим выдающимся поэтом (принадлежащим к той же "Озерной школе") Кольриджем (1772–1834), с которым потом переписывался.

Кольридж, как и многие английские мыслители и поэты своего времени, проделал сложный путь от демократических и даже порой революционно-демократических взглядов и настроений до консервативно-церковных, туманно-метафизи-

[4] *Dodd G.* Wordsworth and Hamilton // Nature. 1970. Vol 228. P. 1261–1263.



Тринити колледж. Западный фасад

ческих воззрений. Вот что он пишет в 1830 г. (за четыре года до смерти и как раз в период знакомства и переписки с Гамильтоном): "Если на моей могиле будет сделана надпись, пусть в ней говорится о том, что я пламенно любил церковь и также пламенно ненавидел тех, кто предавал ее, кто бы они ни были"[5].

О Кольридже в 1820 г. образно написал Шелли: "...воздушный метеор, окутанный облаками, орел с завязанными глазами среди подслеповатых сов"[6].

Таково было поэтическое окружение Гамильтона. А в математике? Никого из более или менее крупных математиков, кроме А. де Моргана, не видно вблизи него. В математике он почти полностью самоучка. И все же до конца своей жизни он математик, пишущий стихи (теперь мы бы сказали, что стихи были его "серьезным хобби"), в которых преобладает метафизика, описание природы и только потом чувство, эмоции.

Если раскрыть статьи Гамильтона и опубликованные Грэйвсом рукописи, то порой можно увидеть в них влияние философских воззрений, а вот в его поэзии можно найти прямые отсветы его научных исканий, причем таких, какие не могли быть им разрешены, но были, если так можно сказать, проблемами – предчувствия-

[5] *Coleridge S.T.* Table talk. London: Routledge, 1884. P. 74.

[6] *Shelley P.B.* The poetical works. London: Macmillan, 1901. P. 372.

ми. Вот интересный пример: глубинная связь (для Гамильтона) математики и поэзии нашла свое выражение в его двустишии, в чем-то предвосхищающем наши современные взгляды:

And how the One of Time, of Space the Three
Might in the Chain of Symbol girdled be.

(Прозаический перевод: "Как можно объять цепью некоего символа [знака. – *Л.П.*] одно [измерение. – *Л.П.*] времени и три – пространства" – достаточно многозначен.)

Кто же он? Поэт или математик? Или поэт-математик? Прислушаемся к его собственным словам: "Я *живу* математикой, но я – поэт" (I live by mathematics, but I am a poet).

ПРОФЕССОР АСТРОНОМИИ, ДИРЕКТОР ОБСЕРВАТОРИИ, ПРЕЗИДЕНТ ИРЛАНДСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Год 1827 в известном смысле был поворотным в жизни Гамильтона. Бринкли, который руководил Гамильтоном в его астрономических занятиях и помогал ему в математических исследованиях, в 1826 г. принял епархию в Клойне. На освободившееся место королевского астронома и профессора астрономии среди других кандидатур (например, такой, как известный ученый Дж. Эри) была выдвинута кандидатура двадцатидвухлетнего Гамильтона (бывшего еще студентом), и он был единогласно избран профессором астрономии в день окончания им колледжа. Таким образом, в невероятно юном возрасте – двадцати двух лет – он стал директором обсерватории в Дансинке[7]. Все свое время Гамильтон мог посвящать исследованиям и без всякого внешнего принуждения выбирать их предмет. Ему не надо было непрерывно публиковать свои работы, так как в этом отношении не было никакого давления, ибо безумного и бессмысленного измерения научной значимости ученого числом публикаций еще не существовало. Вероятно, он больше читал книг по литературе и философии, чем по математике, так как свои открытия в математике он делал исходя из "первых" (исходных) принципов, а не развивая идей других ученых.

В течение ряда лет Гамильтон возглавлял Дублинскую астрономическую обсерваторию и не без успеха читал курс лекций по астрономии, представлявший собой в сущности курс небесной механики. Он никогда не интересовался практической астрономией[8], интересы его ограничивались небесной механикой и теорией оптических инструментов. Впрочем надо заметить, что в силу географического расположения Дублинской обсерватории ее наблюдения никогда не играли сколько-

[7] Обсерватория находилась примерно в пяти милях от центра Дублина; поселившись в ней в возрасте 22 лет, Гамильтон провел там всю остальную жизнь.

[8] Гамильтон не имел ни одной черты, необходимой для рутинных наблюдений на обсерватории. Его работой были исследования, математическое творчество, состояние, когда он был погружен в то, что называл "математическим экстазом". Результатом этого были великие открытия. Это привело к некоторым осложнениям. Первое из них возникло в 1843 г., когда ректор и Совет старейшин Тринити колледжа, которые были ответственны за работу обсерватории, послали Гамильтону ежегодный отчет Эри и просили его представить аналогичный документ. Этого сделано не было. В 1853 г. Королевская комиссия, проверявшая Тринити колледж и обсерваторию в Дансинке, опубликовала отчет, в котором утверждалось, что "не проявлено достаточного усердия в отношении наблюдений". Гамильтон нашел, что комиссия не полностью определила количество наблюдений, и защитил этим себя, хотя и допускал, что не слишком преуспел в наблюдательной астрономии.



Обсерватория в Дансинке

нибудь значительной роли в новой астрономии и Гамильтон поступал очень мудро, тратя большую часть своих сил на работу в области математики.

22 октября 1832 г. Гамильтон теоретически предсказал существование ранее неизвестного явления – внутренней и внешней конической рефракции, экспериментально найденного затем Х. Ллойдом. Маловероятно, чтобы внутренняя и внешняя коническая рефракция была когда-нибудь открыта чисто экспериментальным путем, так как ее осуществление возможно только при весьма точном соблюдении определенных условий, значение которых, если не исходить из теории, не может быть предусмотрено.

В 1834 г. Гамильтон распространил на динамику идею характеристической функции, которую он с таким успехом применил в области геометрической оптики. Исследования Гамильтона по динамике, опубликованные в виде двух статей в лондонских "Philosophical Transactions", получили блестящую оценку. В 1842 г. на ежегодном собрании Британской ассоциации содействия развитию науки в Манчестере Якоби сказал: "Гамильтон – это Лагранж вашей страны". В 1866 г. Тэт охарактеризовал эту работу как "крупнейшее дополнение, полученное в теоретической динамике со времени великих эпох Ньютона и Лагранжа" [Gr. 2. P. 72].

В декабре 1837 г. умер президент Королевской ирландской академии наук. На выборы нового президента были представлены три основных кандидата: Гамильтон, Ллойд и архиепископ Дублина. Последнего, несмотря на его некоторый либерализм, всеми допустимыми и не совсем допустимыми средствами поддерживал лорд-лейтенант Ирландии (фактически диктатор). Результаты голосования (тем не менее!): за Гамильтона – 45 голосов, за Ллойда – 36, за архиепископа – 14.



**У.Р. Гамильтон –
президент Ирландской академии наук**

Как видим, и в то время можно было порой не подчиниться тяжелой руке диктатора. Вступительная речь, прочитанная новым президентом в январе 1838 г., кроме обычных слов о красоте, истине и боге, заключала в себе некоторые конкретные предложения об организации секции биологии и развитии литературного отделения. Гамильтон в общем удовлетворительно справлялся с исполнением разнообразных функций президента, хотя и не провел никаких значительных реформ.

В том же 1838 г. он получил от Российской академии наук письмо, подписанное ее президентом А.Б. Уваровым, в котором сообщалось, что он единогласно избран членом-корреспондентом этой академии. Представление Гамильтона в члены-корреспонденты, в котором высоко оценивались его заслуги в области динамики, было подписано академиками М.В. Остроградским, В.Я. Буняковским и П.Н. Фуссом[9]; незадолго до смерти он был избран иностранным членом Американской академии наук.

---

[9] Протокол заседания Российской академии наук от 22.XII 1837 // Арх. РАН. 1837. Ф. 1. Оп. 2, № 709.

Последние 22 года своей жизни Гамильтон почти целиком посвятил разработке и развитию исчисления кватернионов и его практическим применениям.

В 1846 г. Гамильтон отказался от поста президента Ирландской академии. Отказ этот был связан как с его желанием освободиться от административных обязанностей, так и с неприятным инцидентом, имевшим место во время обеда Геологической ассоциации, вызванным некоторым злоупотреблением алкогольными напитками.

Весной 1865 г. у Гамильтона был приступ подагры, второй приступ, осложненный бронхитом, случился в июне. Это привело его здоровье в критическое состояние. Его разум, однако, оставался ясным, и он работал еще за два дня до смерти. Гамильтон скончался 2 сентября 1865 г. в возрасте 60 лет.

ФИЛОСОФСКИЕ ВОЗЗРЕНИЯ

Общие философские воззрения Гамильтона были близки к взглядам Беркли и Канта. В его письмах и конспектах мы находим много высказываний в духе кантианской философии. Насколько сильно было влияние Канта на мировоззрение Гамильтона, видно хотя бы из сделанной им попытки построить алгебру как науку о чистом времени. Работа под таким названием была опубликована Гамильтоном, который считал, что "если геометрия опирается на интуицию пространства, то алгебра могла бы опираться на родственную интуицию времени"[10]. И далее: "...момент в алгебре, по-моему, является тем же, чем точка в геометрии; переходы, интервалы от одного момента к другому аналогичны прямым линиям; время можно мысленно представить или изобразить в виде бесконечной прямой линии. Этот синтез алгебры или же построение ее заново в наиболее существенных ее отделах на основе идеи чистого времени является предметом, которым я недавно занимался"[11].

Мы "наблюдаем, вернее создаем, при помощи математических формул" очертания и соотношения, придаем им форму звезд и созвездий. Однако созданная нами схема оказывается скоро недостаточной, и мы творим все новые и новые теории, вынимая "из сокровищницы математической мысли новую формулу, в которой впечатления нашего зрительного чувства принимают форму и характеристику"[12]. Наконец, приблизившись к более или менее адекватному представлению явлений, мы хотим, говорит Гамильтон, чтобы оно, кроме того, было максимально простым.

Теория эпициклов в общем удовлетворительна, но она позволяла объяснить лишь прошлое, она "была довольно гибкой, вы могли приспособить ее к чему угодно, ее никогда нельзя было окончательно опровергнуть фактами, хотя всегда требовалось немного изменить и исправить, но эта теория не представляла собой гениального метода, ибо не содержала принципа постоянного прогресса. Как бы точно ни было знание старых и примитивных движений, оно не дает помощи для будущего открытия и не является исходным пунктом для вывода новых и зависимых движений"[13].

---

[10] Письмо Р.П. Грэйвсу от 11.VII 1835 [Gr. 2].

[11] Там же.

[12] *Гамильтон У.Р.* Вступительная лекция по астрономии в 1833 г. [Gr. 2].

[13] Там же.



Гамильтон с женой

И вот на смену этой картине возникает новая, более продуктивная. Сначала Кеплер соединил факты, а затем Ньютон объединил законы. Он переплавил в огне интеллекта в одно блестящее целое все отдельные истины, которые установил Кеплер. Он создал закон всемирного тяготения, о грандиозной общности которого, по мнению Гамильтона, трудно дать точное понятие. Однако и этот закон не является последним моментом исследования, идущего ко все более общим и новым проблемам. Так, в процессе нашей мыслительной деятельности воссоединяется в единую картину тот видимый мир, познание которого является важнейшей задачей человеческого интеллекта.

Гамильтон особо отмечает, что исходным моментом познания являются "видимости". Математическая обработка явлений, наблюдаемых нами, создает свой особый мир математических символов, который находится в каком-то соответствии с внешним миром.

В отношении конкретных проблем методологии естествознания позиция Гамильтона может быть охарактеризована следующими моментами.

1. Он "динамист", занимающий по отношению к атомистике позицию, близкую к позиции Бошковича и Канта.

2. Он рассматривает процесс научного исследования как распадающийся на два

разделенных во времени этапа: индуктивный и дедуктивный, причем первый предшествует второму.

3. Он считает науку идеальным построением, которое находится в некотором соответствии с внешним миром, но ни в коем случае не является его отражением.

Теория непротяженных атомов – центров сил восходит к Бошковичу и Канту, произведениями которого особенно увлекался Гамильтон в это время. Гамильтон в известной мере солидаризуется с теми взглядами, которые развивал Бошкович. Но они не представляются ему совершенно удовлетворительными, так как Бошкович построил картину, основанную на принципе прерывности. Гамильтон находит желательным "оживление старой идеи plenum'a", т.е. представления о заполненном пространстве. Эта мысль, конечно, вытекает из того, что волновая теория света, ставшая к этому времени почти общепризнанной, существенно связана с допущением некоторой среды – эфира.

В связи с этой идеей Гамильтона о plenum'e любопытно отметить, как ему представляется возможность осуществить конкретную разработку этой идеи. Он считает, что для этого "могла бы быть создана гипервысшая математика..."[14]. Склонность его к такого рода задачам отражена в одной любопытной заметке, которую мы находим в письме к Ллойду: "Во всяком случае, – пишет Гамильтон, – автор не претендует на оригинальность своим парадоксом о четвертом измерении пространства, ибо помнит, что давно слышал его в разговоре; новизна, если она имеется, заключается в применении этого парадокса к современной теме, именно к умножению триплетов...

Действительно, я помню, что несколько лет назад в Вашем присутствии и, вероятно, в Вашей квартире возникла беседа о четвертом измерении пространства или, вернее (что почти одно и то же), о геометрии четырех измерений, причем кто-то заметил: "Это как раз предмет для разработки Гамильтону", – в ответ на что Вы, я вполне уверен, заметили, что "наука о механике уже является геометрией четырех измерений".

В каждой физической науке мы должны восходить от фактов к законам путем индукции и анализа и можем нисходить от законов к следствиям дедуктивным или синтетическим путем. Мы должны собирать и группировать видимости до тех пор, пока научное воображение различит их скрытый закон и единство возникнет из разнообразия, и затем из единства мы должны вывести вновь разнообразие и заставить открытый закон обнаруживать будущее"[15].

Что касается существа динамики, то Гамильтон различает по их источнику два вида динамики. Один из них черпает свои заключения в размышлениях об идеях нашего рассудка, другой – в явлениях. Одна динамика – наука a priori, другая – a posteriori. У Канта мы найдем такое же членение науки. Так, в "Пролегоменах ко всякой будущей метафизике" Кант говорит о том, что целый ряд положений является априорным; все, что совершается, всегда определено известной причиной по постоянным законам и т.д. Это действительно общие законы природы, существующие вполне a priori[16]. Сравним с этим высказывание Гамильтона, который, обсуж-

---

[14] Это замечание и в наши дни звучит вполне современно.

[15] Письмо его преподобию Р.П. Грэйвсу от 3.XII 1844 [Gr. 2].

[16] *Кант И.* Пролегомены ко всякой будущей метафизике. М.: ОГИЗ, 1934. С. 167.

дая проблему теории науки, пишет, что "здесь имеются или могут быть представлены две динамические науки: одна – субъективная, a priori метафизическая, дедуцируемая из размышлений о наших идеях силы, пространства, времени; другая – объективная, a posteriori физическая, открываемая наблюдением и обобщением фактов и явлений; эти две науки различны по роду, но интимно и чудесно связаны вследствие последнего единства, субъективного и объективного, в боге или, говоря менее специально и более религиозно, благодаря святости обнаружений, которые ему самому угодно было совершить во Вселенной для человеческого интеллекта; так что две науки никогда полностью неотделимы, но могут продвигаться вперед совместно и пользоваться многими общими выражениями и каждая должна обладать аналогами для некоторых, если не для всех, результатов и теорем другой"[17].

ШТРИХИ К ПОРТРЕТУ[18]

Несомненно, что математическое творчество открывает гораздо меньше возможностей для изучения сложной психологической структуры ученого, чем, например, творчество живописца, для познания его страстей, влечений, общений. Творчество математика (особенно выдающегося), конечно, связано с его мировоззрением, научной средой и своеобразной, присущей творцу в любой области науки и искусства "функцией отклика".

Сложный комплекс – сплав, определивший "Я" Гамильтона, – кельтский темперамент, англосаксонская викторианская респектабельность, викторианское благолепие, неудачная личная жизнь, блестящие научные успехи, широта активных интересов (философия, логика, теология, математика, поэзия).

Вот как выглядел Гамильтон в молодости. Среднего роста, с широкой грудью. Черные каштанового оттенка волосы, шелковистые и вьющиеся, глаза темно-синие. Руки красивые и нежные, с несколько широкими кончиками пальцев. Голос благозвучный, внятный и сильный. Талантливый, даже удивительный поэт, математик.

Взглянем теперь на портрет пожилого Гамильтона. На тяжелом, одутловатом лице, которое даже классические викторианские бакенбарды ("котлеты") не делают узким, внимательно и печально смотрят куда-то мимо зрителя (в никуда) глаза, словно стремящиеся выбраться из припухших век. О чем-то своем, отдельном от других людей, думает этот явно одинокий человек, два с лишним десятилетия создававший "сагу о кватернионах". Он считал, что нашел универсальный метод описания единства миропорядка и человеческого духа, и ушел из жизни, так и не узнав о неосуществленности своей мечты.

Это был человек, который любил одиноко гулять по одиноким тропинкам своей страны и страстно желал общества и признания своих земляков. Он не нашел счастья в любви, он не был счастлив в детях (один сын – неудачливый авантюрист,

---

[17] Письмо У. Уэвеллу от 25.V 1833 [Gr. 2].

[18] Содержание этого раздела в основном заимствовано из книги: *Hankins T.L.* Sir William Rowan Hamilton. Baltimore, 1980. Автор имел доступ к архивам Гамильтона в Тринити колледже и в Ирландской академии наук. К сожалению, он не использовал материалы архивов для освещения картины эволюции взглядов и методов Гамильтона, приведших к окончательному виду опубликованных им работ по динамике и кватернионам. Эта важнейшая историко-научная проблема остается пока неосвещенной.

другой – полусумасшедший пастор). Все, что у него было, – математическое творчество и общение (больше всего в письмах) с близкими по духу людьми. Когда он был уже в зрелом возрасте, его сын писал о нем: "... он был нечувствителен к обычной необходимости питания; мы должны были приносить легкую закуску и оставлять ее в его кабинете, но короткий кивок одобрения такого вторжения отбивной котлеты часто был единственным результатом".

Он часто работал по двенадцати и больше часов в день, почти все время стоя и порой поддерживая себя бóльшим, чем следовало бы, количеством виски.

И в науке, и в жизни Гамильтон был одержимым человеком. Когда он вышел на "дорогу кватернионов", все остальное (хотя он и публиковал работы на разные математические темы) в течение более чем 20 лет было для него, по существу, случайным, побочным. И в жизни он любил, сложно и тяжело, одну женщину – Кэтрин Дисни, в замужестве Кэтрин Барлоу.

В 1824 г. дядя Гамильтона Джеймс ввел его в семейство Дисни (Disney), отец которого (estate agent for Lord Langford) имел пятерых сыновей и четырех дочерей. Сыновья также учились в Тринити колледже и стали ближайшими друзьями Гамильтона. С первого взгляда Гамильтон влюбился в одну из сестер – Кэтрин. Эта встреча произошла 17 августа 1824 г., дата, которую Гамильтон никогда, до самого конца своей жизни, не забывал. Несмотря на взаимную любовь, их брак не состоялся. Родные Кэтрин использовали все средства давления и заставили ее выйти замуж за ничем не замечательного, серого, малозаметного священника Барлоу (Barlow). Когда почти насильственное бракосочетание состоялось, Гамильтон, психически заболел. Он выжил, в последующем увлекался другими женщинами, женился, имел детей, много хороших друзей, но память о Кэтрин, об их чувстве пронизывала все его существо и всегда жила в нем.

В своей поэзии и философии Гамильтон, подобно Кольриджу и Вордсворту, был романтиком. Любовь с первого взгляда... С тех пор как Гамильтон впервые увидел Кэтрин, она была в его сердце и уже как романтическое видение-мечта, которое не тускнело, какие события ни происходили бы в его или ее жизни. Затуманить этот романтический образ не могли ни семейная жизнь, ни слава, ни несчастья.

С большим усилием Гамильтон мог вести себя как совершенный викторианский отец (во всяком случае для внешнего мира), но никакие усилия воли не могли удалить Кэтрин из его сердца – это было вне его контроля, его душевных возможностей. Все те же неизменные черты, все та же боль выливалась в его стихах. Вновь он увидел Кэтрин в 1845 г., пятнадцать лет спустя после последней встречи в 1830 г. в обсерватории в Armagh, где он был в таком возбуждении, что разбил окуляр телескопа. Прошедшие годы были нелегкими для него, несмотря на замечательные успехи в открытии и развитии исчисления кватернионов. В следующий за этим открытием год впервые появились неприятности – волнения, связанные с алкоголем; в феврале 1845 г. эти проблемы приобрели публичное звучание на собрании Геологического общества. В 1847 г. Гамильтон потерял двух близких людей – дядю Джеймса и дядю Уилли, в том же году покончил с собой Мак-Куллах, 1848 год был наполнен политическими революционными событиями. Все это создавало чрезвычайно стрессовое состояние. В эти годы Гамильтон помогал сыну Кэтрин в Тринити колледже.

Тайная переписка Гамильтона и Кэтрин началась в 1848 г. и принимала все более интимный характер, их любовь не уменьшилась с 1825 г. В конце концов Кэтрин решила сообщить о своих чувствах мужу, последнее письмо Гамильтону она закончила словами: "Полагаясь на милосердие Бога во Христе (God in Christ), я смотрю в будущее одиноко – о прощении за все мои грехи". Когда Гамильтон находился в гостях у лорда Росса (известен в астрономии телескоп Росса), он получил письмо от душевно сломленной Кэтрин о сложившейся у нее сложной и тяжелой ситуации. Пока Гамильтон пребывал в мучительных раздумьях "что предпринять", Кэтрин приняла большую дозу настойки опия, но ее спасли. Она умерла в 1853 г., к ужасу Гамильтона, без твердой веры. В последние годы своей жизни Гамильтон собирал все, что относилось так или иначе к Кэтрин – книги, журналы, поэмы, сувениры, портреты, локоны ее волос. Все это он хранил под замком в своей библиотеке. В многочисленных письмах друзьям и братьям Кэтрин он излагает различные события и чувства, связанные с Кэтрин. Некоторые его известные нам письма и поэмы производят впечатление глубочайшей привязанности, всепоглощающего чувства и неизбывной боли.

Вместе с тем, оглядываясь на последние пять лет жизни (1848–1853), Гамильтон с удивлением отмечает, что у него хватило сил и упорства создать "Лекции о кватернионах". Может быть, странный для ученого характер этой книги в какой-то степени определяется "счастьем и мраком последних дней"?

Гамильтон был не просто верующий человек, но, если так можно выразиться, активно религиозный: принимал участие в так называемом оксфордском движении англиканской церкви, был некоторое время церковным старостой и т.п. Он даже пытался применить свое математическое образование для "решения" некоторых религиозных проблем, которые казались ему важными. В 1842 г. он проделал тщательные расчеты равноденствия в год Никейского Собора. Этот расчет был им опубликован в "Proceedings" Ирландской академии за 1844 г.[19]

Вскоре после этого он опубликовал в "Irish Ecclesiastical Journal" статью, в которой изложил свои расчеты времени вознесения Христа на небо. Поскольку Христос вознесся не только духом, но и телом (что указано в Евангелии), то вознесение должно было происходить во времени. Душа как нематериальный объект могла двигаться через пространство мгновенно, но никакой материальный объект этого не может. Гамильтон пришел к выводу, что тело Христа, вероятно, достигло небес в день Пятидесятницы и что святой дух тогда мгновенно спустился на апостолов [Gr. 2. P. 380–383]. Странновато для середины XIX в., но что поделаешь. Кстати, по словам Грэйвса, одной из причин его женитьбы на Элен Бейли была ее благочестивость.

Гамильтон может быть назван "наиболее методическим мешкателем, какой когда-либо жил", ибо его обычаем было написать письмо, сделать копию с него и затем, возможно, не отправлять его в течение месяцев. Его задержки с ответом один раз вынудили де Моргана написать ему: "Если Вы умерли и похоронены,

[19]*Hamilton W.R.* On the day of the Vernal Equinox at the time of Council de Nice // Proc. Roy. Irish Acad. 1844. Vol. 2. P. 249.



А. де Морган

почему Вы не скажете об этом как мужчина, вместо того чтобы заставлять меня догадываться об этом по Вашему молчанию?"[20].

Письма Гамильтона были иногда размером в 50–100 убористо написанных страниц и направлялись многим корреспондентам.

Его неопубликованные манускрипты, хранящиеся в библиотеке Тринити колледжа, составляют 60 томов, из которых Грэйвс опубликовал некоторую часть переписки, особенно с математиком и логиком Августом де Морганом (1806–1871) за время 1841–1865 гг. (390 страниц). Эта переписка двух замечательных людей весьма интересна. В то же время крайне забавно то, что они встретились только один раз и притом весьма случайно.

Гамильтон писал о себе: "Я был трудолюбивый и правдолюбивый (truth-loving) человек. Пусть это будет мой эпитафией"[21].

Ланцош отмечает, что Гамильтон вел весьма интенсивную переписку с самыми различными людьми – поэтами, писателями, философами, геологами, гуманитариями и учеными, но среди его корреспондентов не было ни одного первоклассного

---

[20]Цит. по: *Scott Bar E.* Anniversaries in 1965 of interest to physics // Amer. J. Phys. 1965. Vol. 33, N 2. P. 76–91.

[21] Ibid.

математика, кроме де Моргана. Его письма скорее похожи на диалоги Платона, которые, по существу говоря, вовсе не диалоги, а монологи Сократа – второй собеседник только поддакивает и не вносит сколько-нибудь заметного вклада в рассматриваемую проблему. И хотя одновременно с Гамильтоном в области математического анализа работали такие ученые, как Гаусс, Риман, Вейерштрасс, Куммер, Кронекер, Дирихле – в Германии, Лежандр, Коши, Лиувилль – во Франции, он мало интересовался их открытиями. Если ему указывали на некоторые аналогии между его открытиями и результатами других ученых, он был удовлетворен защитой своего приоритета в коротких примечаниях, не предпринимая каких-либо попыток исследовать свой подход в сравнении с подходами других ученых[22].

Это понятно: в викторианскую эпоху репутация и слава были на первом месте, без каких-либо прагматических (оклады, премии) обертонов.

Как всякий человек, он имел смешные черточки (они только более бросаются в глаза у выдающихся людей).

У Гамильтона была любимая собака, которая иногда позволяла себе вольности. Она любила жевать вещи, и когда ей удавалось найти вблизи от себя книгу, она испытывала на ней остроту своих зубов. К несчастью, вышло так, что такой книгой оказалась Библия, о святости которой пес, по-видимому, не был осведомлен, но это было больше, чем мог вытерпеть джентельмен-христианин. Гамильтон потерял терпение и дал бедной собаке хорошую взбучку.

Вот что рассказывает известный ученый Э. Уиттекер, который занял в 1906 г. кресло Гамильтона в Тринити колледже и встретил немало людей, которые его еще помнили. Гамильтон располагал семнадцатью акрами земли вокруг обсерватории в Дансинке (как королевский астроном). Он купил корову, чтобы иметь молоко. По истечении некоторого времени в силу естественных причин надой молока стал падать. Он пошел консультироваться с соседним фермером. Тот сказал ему, что дело в том, что корова, единственный обитатель семнадцати акров, страдает от одиночества. Тогда Гамильтон задал вопрос о возможности обеспечить ее компаньонами и фермер любезно согласился (разумеется, за плату) позволить своему стаду пастись на богатых пастбищах в Дансинке.

ТВОРЧЕСТВО

Основные научные исследования Гамильтона, сделавшие его имя бессмертным, лежат в области математики, теоретической оптики, аналитической механики. В хронологическом порядке они могут быть представлены так.

1. *Геометрическая оптика:* основное уравнение, расчеты систем лучей – распространение, отражение, преломление света в неоднородных и неизотропных средах, предсказание и открытие внешней и внутренней конической рефракции.

2. *Оптико-механическая аналогия:* принцип Ферма и принцип наименьшего действия.

---

[22] *Lanczoš C.* William Rowan Hamilton – an appreciation // Amer. Sci. 1967. Vol. 55, N 2. P. 129–143.

3. *Динамика:* принцип Гамильтона, гамильтониан, канонические уравнения Гамильтона, уравнение Гамильтона–Якоби, вариационные методы интегрирования уравнений движения.

4. *Физическая оптика:* открытие различия между групповой и волновой скоростью света.

5. *Теория кватернионов:* гиперкомплексные числа – кватернионы, символические операторы, исчисление векторов, уравнение Гамильтона–Кэли, годограф, линейные преобразования и т.д.

Кроме того, надо отметить открытие Гамильтоном так называемого оператора Хевисайда, общего члена асимптотического разложения по функциям Бесселя, двойственности обобщенных координат и импульсов и т.д.

Изложение проблем геометрической оптики и динамики у Гамильтона оригинально, но в основном близко к современному. Поэтому нет необходимости для понимания хода его рассуждений "переводить" их на современный математический язык (в тех случаях, когда пояснения все же требуются, это сделано в комментариях). Мы отсылаем читателя к публикуемым в настоящей книге текстам Гамильтона, а здесь рассмотрим лишь эволюцию идей и подходов, а также современную интерпретацию проблем, связанных с научным творчеством Гамильтона.

Что касается исчисления кватернионов, то с ним дело обстоит несколько иначе (см. статью Н.В. Александровой).

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

Первая научная работа "О каустиках"

Интерес к оптике (геометрической) появился у Гамильтона, если верить сообщению Грэйвса [Gr. 1. P. 182], когда ему было всего четырнадцать лет. В 1822 г. (ему было 17 лет) он начал писать на эту тему, а, поступив в Тринити колледж Дублина, в свободное от занятий время продолжал свои исследования. В 1824 г. (19 лет) он закончил работу "О каустиках". В записях Совета Ирландской академии наук под датой 13.XII 1824 г. читаем: «Получена статья "О каустиках", часть I, У. Гамильтона, эсквайра, представленная президентом Бринкли. Решено, что она будет передана на заключение комитету, состоящему из д-ра МакДониела, м-ра Харта и м-ра Ларднера, и просить их дать заключение так скоро, как это возможно (as soon as convenient). 13 июня 1825 г.».

Комитет представил в Совет следующее заключение (пять месяцев для ознакомления трех членов комитета с работой, совсем не легкой по содержанию и характеру изложения и обсуждения ее, – срок не такой уж большой); «... результаты, полученные автором, новы и чрезвычайно интересны, а при исследованиях, которые привели к ним, проявлено замечательное аналитическое искусство. Однако считаем, что рассуждения, изложенные в этом мемуаре, столь абстрактны по своему характеру, а формулы столь общи, что требуется более полное изложение аргументации, с помощью которой некоторые из выводов работы были установлены, а аналитический процесс, которым некоторые из формул были получены, должен быть явно и подробно изложен. Это необходимо, считаем мы, для того чтобы сделать опубликование мемуара полезным для всех».

В кратком введении к рукописи этой статьи Гамильтон пишет: «Две недели назад я полагал, что никакой автор не рассматривал когда-либо оптику в таком плане, но в это время преподобный м-р Бойтон ... показал мне прекрасный мемуар Малюса на эту же тему ... представленный в Институт [Французский. – *Л.П.*] в 1807 г.» Однако, отмечает Гамильтон, наши методы и объем рассмотренных вопросов существенно различны.

Как известно, теорема Малюса, представляющая квинтэссенцию его теоретической оптики, может быть установлена тремя различными методами: 1) аналитически исходя из эмпирических законов отражения и преломления; 2) основываясь на принципе наименьшего действия в корпускулярной теории света; 3) исходя из волновой теории, в которой лучи являются ортогональными траекториями системы волновых поверхностей, распространяющихся согласно построению Гюйгенса. Уже вторым методом Гамильтон получил удовлетворительное доказательство теоремы, подобное же доказательство получается исходя из волновой теории при замене принципа наименьшего действия принципом Ферма. Третий подход немедленно делает теорему Малюса очевидной, так как каждое семейство поверхностей обладает ортогональными траекториями. Следовательно, теорема Малюса заключена в неявном виде в построении Гюйгенса и работы Дюпена и Жергонна представляют собой только согласование эмпирических законов отражения и преломления с этим построением. Гамильтон это понял и отметил приоритет Гюйгенса [Gr. 2. P. 92].

По-видимому, Гамильтон, когда он начинал работу над «Теорией систем лучей», не знал о работах Дюпена[1], Кетле[2], Жергонна[3], посвященных теореме Малюса[4].

В 1808 г. Малюс установил эту теорему для случая однократного отражения или преломления лучей, исходящих из светящейся точки, однако он ошибочно полагал, что эта теорема не выполняется в случае двукратного (и вообще многократного) отражения или преломления.

В 1816 г. Дюпен[5] дал простое общее доказательство этой теоремы для многократного отражения, а специальная комиссия (Араго, Ампер, Коши) разобрала причины ошибки Малюса[6]. Заметим, что в отличие от аналитического и весьма громоздкого доказательства Малюса доказательство Дюпена имело чисто геометрический характер (его построение описано Гамильтоном в п. 15 первой части "Теории систем лучей"). Правильность полной теоремы Малюса (включая и случай преломления) была строго показана одновременно Кетле (1825) и Жергонном (1826); метод последнего был использован Тиммермансом[7] для случая преломления в двух измерениях.

---

[1] *Dupin P.Ch.* Applications de géométrie. Paris, 1822. P. 195–197. Представлен Французской академии в 1816 г.

[2] *Quetelet A.* // Corresp. math. et phys. 1825. Vol. 1. P. 147–149.

[3] *Gergonne J.* // Ann. de math. 1826. Vol. 16. P. 307.

[4] *Malus E.* // J. École Polytechn. 1808. Vol. 7. P. 1–44, 84–129; Traité d'optique // Mém. présentés Inst. par divers savans. 1811. Vol. 2. P. 252.

[5] См. примеч. 1.

[6] Acad. Sci. Procès-verbaux des séances. 1817. Vol. 6. P. 183.

[7] *Timmermans A.* // Corresp. math. et phys. 1825. Vol. 1. P. 336.

Итак, Гамильтону необходимо было принять во внимание решение комитета и несколько подробнее изложить ход рассуждений для того, чтобы опубликовать эту свою первую работу. Однако статья "О каустиках" не была опубликована при жизни автора, а ее первая часть впервые увидела свет сто семь лет спустя в первом томе "The mathematical papers" Гамильтона [H. 1. P. 345–363]. Рукопись второй части не найдена.

Возникает естественный вопрос: почему Гамильтон не только не доработал свою рукопись "On caustics", но отложил ее и не сделал никакой попытки ее опубликовать (что ему было бы нетрудно, особенно в бытность его президентом Ирландской академии наук)?

При отсутствии печатных материалов, мемуаров и архивных данных можно высказать лишь более или менее вероятные предположения, использовав как отправной пункт тот факт, что в "On caustics" нет характеристической функции, а через два-три года она становится основой исследований Гамильтона в "Theory of systems of rays". Можно поэтому предположить, что применение столь общего принципа, как принцип наименьшего действия, который в оптике непосредственно связывается с характеристической функцией, показалось Гамильтону более перспективным для реализации своей "программы" единой теории для света, звука и тепла (заметим, что он нигде не писал впоследствии ни о звуке, ни о тепле, и в этой программе не упоминается механика).

Придать этому предположению необходимый конкретный вид из-за отсутствия каких-либо материалов мы, конечно, не можем, а поэтому остается только перейти к рассмотрению развития теории характеристической функции в оптических работах Гамильтона и возникновения на этой основе оптико-механической аналогии.

"Теория систем лучей"

Мировоззрение Гамильтона и его убежденность в существовании универсальной математической схемы ("Универсума") определяли характер – поиск общего, всеобщего – его исследований. Выбор же конкретной тематики, особенно в начальной стадии, был связан как с его работой (ставшей многолетней) в качестве королевского астронома Ирландии и руководителя Дублинской астрономической обсерватории – оптические свойства астрономических инструментов, так и, в известной степени, с практическими вопросами оптического приборостроения. Ф. Клейн говорит по этому поводу: "Гамильтон первоначально исходил в своих исследованиях систем лучей из практических запросов оптического приборостроения. В силу этого он рассматривал только такие световые волны, которые выходят из отдельных точек"[8], подчеркивая "всеобщую аналитическую формулировку[9] основных положений". Ф. Клейн отмечает вместе с тем,что характеристическая функция в "принципе переменного действия" "... служит не для того, чтобы дать ответ на вопрос о собственных целях, которые преследует природа в оптических процессах [вспомним Мопертюи и многих других. – *Л.П.*], но для того, чтобы ответить на вполне законный вопрос конструктора оптических приборов, как

---

[8] *Klein F.* Über neuere englische Arbeiten zur Mechanik // Ges. Math. Abh. 1922. Bd. 2. S. 601–602.

[9] Ibid.

нужно искусственно сочетать эти процессы для получения возможно более совершенного прибора"[10].

Начиная с 1827 г. Гамильтон публикует ряд работ под названием "Теория систем лучей" [Н. 1. Р. 1–106]. По поводу этих работ Клейн делает очень меткое замечание. Он говорит, что "эти статьи по их форме суть все что угодно, только не безупречные; в необозримом неуклюжем порядке, полные невыведенных намеков и повторений, они все-таки представляют собой большое богатство мыслей"[11]. Первые работы Гамильтона были "по форме весьма растрепанными" – замечает Лармор[12].

"Теория систем лучей" была прочитана в Ирландской академии 23 апреля 1827 г., когда Гамильтон был еще студентом. 7 мая того же года Совет направил ее в печать. Первая часть была напечатана в 1828 г., вторая часть впервые опубликована в 1931 г. [Н. 1. Р. 88–106]; рукопись третьей части обнаружена в бумагах Гамильтона в архиве Тринити колледжа.

Вторая часть "Теории систем лучей" была найдена проф. Сингом в архиве рукописей Гамильтона (записная книжка № 8 в библиотеке Тринити колледжа, Дублин). Рукопись не имеет даты, Грэйвс относит ее ориентировочно к 1830 г. В начале ее можно прочесть выскобленное первоначальное название "Приложение анализа к оптике" (по аналогии с "Приложением анализа к геометрии" Монжа).

Указанная в начале "теории систем лучей" дата устного сообщения этой работы Совету (1824) совпадает с датой сообщения статьи "О каустиках" тому же Совету. Это позволяет предположить, что Гамильтон рассматривал "Теорию систем лучей" как пересмотр более ранней работы "О каустиках". На самом же деле содержание этих статей существенно различно. В более ранней работе не рассматриваются проблемы оптики (такие, как отражение и преломление), а рассматриваются свойства общих прямолинейных конгруэнций, не являющихся обязательно нормальными, характеристическая функция отсутствует. В "Теории систем лучей", напротив, преобладают оптические задачи, которые рассматриваются с помощью характеристической функции. Кроме того, так как рассматриваемые в первой и второй частях оптические среды обыкновенные, то все конгруэнции, исследуемые в них, нормальные.

Первой (опубликованной) части "Theory of systems of rays" предпослано чрезвычайно подробное оглавление предполагаемого содержания всех трех частей: Часть первая: обыкновенные системы отраженных лучей; Часть вторая: обыкновенные системы преломленных лучей; Часть третья: необыкновенные системы и системы лучей в общем виде. Оглавление это занимает почти восемь страниц текста. В конце его находим главу тридцатую: "Закон наименьшего действия".

Изложение содержания этой главы таково: "общие выражения этого закона; вывод этих выражений с помощью вариационного исчисления". «В каждой оптической системе *действие* может рассматриваться как характеристическая функция, из формы которой могут быть выведены все другие свойства системы. Эта функция (если мы знаем светящуюся точку и отражающие и преломляющие среды) зависит

---

[10] *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.; Л.: ОГИЗ, 1937. Ч. 1. С. 239.

[11] Там же.

[12] *Larmor J.* Mathematical and physical papers. London, 1937. Vol. 1. P. 640. App.

только от координат и цвета; ее частные производные первого порядка по этим координатам в обыкновенных системах имеют вид

$$\frac{\partial i}{\partial x} = v\alpha, \quad \frac{\partial i}{\partial y} = v\beta, \quad \frac{\partial i}{\partial z} = v\gamma, \qquad \text{(A)}$$

а в необыкновенных

$$\frac{\partial i}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial i}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial i}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial \gamma}, \qquad \text{(B)}$$

где α, β, γ – косинусы углов, образуемых лучами с осями x, y, z, а v – скорость, установленная по эмиссионной теории (по материальной гипотезе – material hypothesis, как пишет Гамильтон) и рассматриваемая в необыкновенных системах как однородная функция первой степени косинусов.

Аргументы для наименования этого принципа *принципом постоянного действия: аналогичный принцип применительно к движению систем тел* [курсив Гамильтона. – *Л.П.*]. Общие следствия этого принципа...» [H. 1. P. 9].

Развитие теории характеристической функции

Центральная идея развиваемого Гамильтоном метода – идея характеристической функции для каждой оптической системы лучей. Это характеристическое соотношение, различное для различных систем, таково, что геометрические свойства системы могут быть выведены из него методом, аналогичным тому, который был изобретен Декартом для алгебраического решения геометрических проблем. Все свойства оптических систем для каждой кривой или поверхности вытекают из этого основного соотношения.

В этой теории устанавливается связь восьми величин, из которых шесть суть координаты двух переменных оптически связанных точек в пространстве, седьмая есть индекс цвета (index of colour) и восьмая, которую Гамильтон назвал характеристической функцией, есть "действие" между двумя переменными точками. Эта функция называется характеристической, ибо Гамильтон нашел, что в способе зависимости этой функции от семи названных выше величин заключены все свойства оптической системы. Поэтому Гамильтон говорит: "Я рассматриваю как сводимые к изучению этой характеристической функции посредством... фундаментальной формулы все проблемы математической оптики, относящиеся ко всем мыслимым сочетаниям зеркал, линз, кристаллов и атмосфер"[13].

Впервые характеристическая функция появляется в п. 19 и 20 первой части "Теории систем лучей" лишь после того, как теорема Малюса была доказана с помощью вариационного принципа. Никакой связи этой функции с рассмотрением обобщенной теоремы Малюса в "On caustics" указать не удается. Нет оснований связывать появление ее идеи у Гамильтона и с гравитационным потенциалом (это отметил еще Дж. Синг). Сам Гамильтон сравнивает свое открытие характе-

---

[13] *Hamilton W.R.* On a view of mathematical optics // Brit. Assoc. Rep. 1831–1832. P. 545–547 [H. 1. P. 295–296].

ристической функции с открытием аналитической геометрии Декартом. Это, однако, не помогает понять ход его мысли. Более вероятным представляется путь, исходящий из принципа наименьшего действия. Он сам отвечает: "Общей проблемой, которую я поставил перед собой в оптике, является исследовать математические следствия принципа наименьшего действия..." Такой подход, исходящий из "первых принципов", как говорили в то время, был, как мы уже отмечали, присущ научному подходу Гамильтона.

Стремление к общности результатов, к объединению в единой математической схеме различных (в пределе всех!) явлений и процессов природы проявилось у Гамильтона в самых первых его научных работах. Так, во введении к "Теории систем лучей" двадцатидвухлетний автор пишет: "... за исключением этого автора [Малюса. – *Л.П.*], я не знаю никого, кто пытался бы во всей общности описать свойства оптических систем, а тем более установить принципы, относящиеся к системам лучей в общем, которые были бы приложимы не только к теории света, но также и к теории звука и тепла. Установить такие принципы и исследовать такие свойства – цель этой работы"[14]. В том же ключе развернутся в дальнейшем оптико-механическая аналогия Гамильтона и попытка создания им в исчислении кватернионов универсальной математики.

Хотя Гамильтон сам указывает на существующее (по его мнению) сходство его работы с построением аналитической геометрии Декарта, он нигде не дает геометрической интерпретации своих "вспомогательных функций" W и T.

Геометрия систем лучей подробно и в общем виде была разработана Куммером[15]. Характеристическая функция V определяется в "Теории систем лучей" (ч. 1, 2) как функция, полный дифференциал которой dV равен

$$dV = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz \qquad (1)$$

где α, β, γ – направляющие косинусы луча, dx, dy, dz – произвольные смещения. Эта функция в первой части "Теории систем лучей" наиболее просто может быть представлена как расстояние, измеренное вдоль действительной траектории светового луча от закрепленного источника света до общей конечной точки. При этом речь здесь идет только об отраженных системах и луч состоит из некоторого числа прямых линий.

Во второй части функция V определяется и для обыкновенного преломления с помощью формулы (1), в которой α, β, γ являются теперь направляющими косинусами *конечного* луча. Согласно этому определению V есть указанная выше траектория, деленная на коэффициент преломления конечной среды. Только в конце этой части появляются уравнения лучей в изотропной, но гетерогенной среде, выведенные с помощью вариационного исчисления, – определение V как интеграла действия (или оптического пути) делается явным.

В самом начале "Первого дополнения" Гамильтон вводит допущение, что интеграл действия $\int v ds$ есть общее определение характеристической функции, рас-

---

[14] *Hamilton W.R.* Theory of systems of rays. Pt 1 // Trans. Roy. Irish Acad. 1828. Vol. 15. P. 69–174 [H. 1. Introduction. P. 1].

[15] *Kummer E.* Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlungssysteme // Crelle J. 1890. Bd. 57. S. 189–230.

сматриваемой как функция конечных координат; среда распространения лучей тоже приобретает более общий характер – она не должна быть ни однородной, ни изотропной.

Для ряда сред, которые могут быть и анизотропными, и гетерогенными, Гамильтон написал два уравнения

$$\Omega = \Omega(x, y, z, \sigma, \tau, \upsilon, \chi) = 0, \quad \Omega' = \Omega'(x', y', z', \sigma', \tau', \upsilon', \chi') = 0, \tag{2}$$

Штрихованные величины относятся к начальным лучам, а χ – цветовой индекс. При выводе волновой поверхности начальная точка закреплена, среда однородна (но не изотропна) и рассматривается только один цвет света, тем самым χ исключается.

Тогда выражение

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 = \mu^2 \tag{3}$$

для гомогенной среды есть частный случай его функции Ω. В динамике функцией, аналогичной Ω, является уравнение Гамильтона–Якоби.

Однако сразу после этих общих положений Гамильтон ограничивается рассмотрением однородной среды. Здесь же вводится новая характеристическая функция W, которая является явной функцией только направления (т.е. направляющих косинусов α, β, γ) и константой вдоль каждого отдельного конечного луча.

Только позднее Гамильтон заметил, что предпочтительно рассматривать W как функцию $\partial v/\partial\alpha$, $\partial v/\partial\beta$, $\partial v/\partial\gamma$.

Во втором дополнении это различие, впрочем, несущественно, так как в нем рассматривается по большей части изотропная и однородная среда, для которой

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \mu\alpha, \quad \frac{\partial V}{\partial \beta} = \mu\beta, \quad \frac{\partial V}{\partial \gamma} = \mu\gamma.$$

В конечной среде V не может быть выбрана произвольно, а должна для однородной и изотропной среды удовлетворять некоторому уравнению в частных производных:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = \mu^2, \tag{4}$$

в то время как функция W может быть выбрана произвольно.

В "Третьем дополнении" выполнено обобщение, которое включает вариации начальных точек x', y', z', и V есть функция x', y', z', x, y, z, она определяется заданной комбинацией сред и может быть использована для рассмотрения всех возможных оптических конгруэнций, пересекающих эту комбинацию.

С помощью этого подхода функция W "Первого дополнения" и "Второго дополнения" распространяется таким образом, чтобы охватывать как начальные, так и конечные элементы луча. Здесь возможны три способа рассмотрения в соот-

ветствии с тем, хотим ли мы включить: 1) начальные положения и конечное направление, 2) начальные и конечные направления, 3) начальное направление и конечное положение. Так как 3) не отличается существенно от 1), то Гамильтон вводит в рассмотрение только два расширения содержания прежней W, а именно: 1) W зависит от начального положения и конечного направления и 2) T зависит от начальных и конечных направлений.

Форму W и T легко найти, приняв во внимание, что

$$\sum \sigma\delta x - \sum \sigma'\delta x' + \frac{\partial V}{\partial \chi}\delta\chi \tag{5}$$

есть полный дифференциал δV:

$$\delta W = \delta\sum \sigma x - \left(\sum \sigma\delta x - \sum \sigma'\delta x' + \frac{\partial V}{\partial \chi}\delta\chi\right) = \sum x\delta x + \sum x'\delta x' - \frac{\partial V}{\partial \chi}\delta\chi, \tag{6}$$

$$\delta T = \left(\sum x\delta\sigma + \sum \sigma'\delta x' - \frac{\partial V}{\partial \chi}\delta\chi\right) - \delta\sum \sigma'\delta x' = \sum x\delta\sigma - \sum x^1\delta\sigma' - \frac{\partial V}{\partial \chi}\delta\chi. \tag{7}$$

Подчеркнем еще раз, что Гамильтон определил четыре функции, из которых функцию V он назвал "характеристической", а функции W, T, S (см. ниже) "вспомогательными". Однако нет никаких оснований не назвать их все характеристическими функциями, так как каждая из них характеризует оптическую систему в том смысле, что две оптические системы различной конструкции, но с одной и той же характеристической функцией ведут себя в точности одинаково.

Предсказание и открытие конической рефракции

Исследование Гамильтона по геометрической оптике (теория систем лучей) привело его к замечательному предсказанию нового, ранее неизвестного оптического явления – внутренней и внешней конической рефракции, которую он открыл буквально "на кончике пера".

Современник Гамильтона, замечательный астроном, физик и математик, Дж. Эри сказал об открытии конической рефракции: "Может быть, наиболее замечательное предсказание, какое когда-либо было сделано, это сделанное недавно профессором Гамильтоном".

"Третье дополнение" Гамильтон заключил разделом, озаглавленным "Сочетание предшествовавшего взгляда на оптику с волновой (undulatory) теорией света", в котором он сообщил о конической рефракции.

Он сделал доклад о своем открытии на вечернем заседании Ирландской академии наук 22 октября 1833 г.; на следующий день он говорил с Х. Ллойдом[16],

---

[16] Хемфри Ллойд (1800–1881) родился в Дублине и после обучения в Тринити колледже наследовал у своего отца кафедру естественной и экспериментальной философии в этом колледже. Его важнейшая работа (1833) – обнаружение конической рефракции и открытие закона конической поляризации. Ему принадлежат книги по оптике, магнетизму и метеорологии. Он был одним из организаторов исследований земного магнетизма в Великобритании. С 1846 по 1851 г. он председатель Ирландской академии наук, ректор Тринити колледжа с 1867 г. до своей смерти в 1881 г.



Дж. Эри

не мог бы тот попытаться экспериментально проверить его предсказание [Gr. 1. P. 623].

В течение следующей недели Гамильтон уточнил свое предсказание, найдя углы и форму конуса для кристалла арагонита, который он и Ллойд выбрали для проведения экспериментов, поскольку из многих доступных кристаллов он имел наибольшее преломление, а углы его оптических осей были тщательно измерены Ф.Рудбергом (Friedrik Rudberg). Однако в распоряжении Ллойда была только тонкая пластинка кристалла около 2 мм толщиной, и поэтому он не мог достаточно разделить обыкновенный и необыкновенные лучи, чтобы произвести уверенные эксперименты[17]. Гамильтон был раздражен задержкой и 25 октября написал Дж.Эри письмо, содержащее неясный намек на то, что он получил интересные результаты из волновой теории Френеля[18].

Некоторое время Ллойд не мог найти необходимый кристалл, и Гамильтон уже собирался сообщить Эри свои теоретические результаты и попросить его сделать эксперименты. Ллойд даже согласился на это, так как имевшийся в его распоряжении кристалл был не только чрезмерно тонок, но и вообще непригоден для намеченного эксперимента из-за того, что представлял собой двойниковый кристалл, состоящий из нескольких пересекающих друг друга кристаллов.

Тем не менее Ллойд не сдавался. В декабре 1832 г.он получил хороший кристалл арагонита от Доллонда из Лондона. Наконец, 14 декабря он написал Гамильтону, что с этим кристаллом наблюдал внешнюю коническую рефракцию[19]. Спустя четыре дня Гамильтон написал Эри и Дж. Гершелю, сообщив им основы своей математической теории и все детали экспериментов Ллойда. В эти же дни Ллойд написал Гамильтону, что он осуществил убедительную демонстрацию конуса, проектируя его на экран, на котором получил круг до 5 см диаметром.

В 1833 г. на очередном заседании Британской ассоциации содействия прогрессу науки внимание математической и физической секции было посвящено почти целиком открытию Гамильтона. Дж. Гершель, Дж. Эри и другие с энтузиазмом говорили о значении этого открытия.

В 1835 г. Гамильтон получил за это открытие медаль Английской академии наук

---

[17] *Sarton J.* Discovery of conical refraction by W.R. Hamilton and H. Lloyd (1833) (with (p. facsimile H. Lloyd) // Isis. 1932. Vol. 17, N 52. P. 154–170; Dictionary of national biography. 1833. Vol 33. P. 425–426.

[18] Письмо Дж.Б. Эри от 25.X 1832; письмо последнего Гамильтону от 4.XI 1832 [Gr. 1. P. 625].

[19] Письмо Х. Ллойда Гамильтону от 14.XII 1832 [Gr.1. P. 628].



Х. Ллойд

(другим ученым, награжденным в том же году, был М. Фарадей), награжден Ирландской медалью Кеннигама, а затем стал сэром Гамильтоном.

Интересно отметить, что когда Лаббок (Lubbock), секретарь Королевского общества, написал Гамильтону, информируя его о награждении медалью, он не упомянул статей Гамильтона "Общий метод динамики", которые Королевское общество опубликовало в издаваемых им "Philosophical Transactions". Медаль была присуждена "За ... открытия в оптике, и в частности за открытие конической рефракции"[20].

По всей видимости, члены Королевского общества не смогли оценить историческое значение статей об общем методе в динамике. В первой трети XIX в. еще сохранялась ситуация XVIII в., когда анализ и математическая механика в основном развивались во Франции, а в Королевском обществе не было, по существу, ни одного крупного механика (если не считать *математика* Кэли).

---

[20] Письмо Дж.В. Лаббока Гамильтону от 30.XI 1835 [Gr. 2].

Оценивая свои оптические работы, сам Гамильтон писал в письме к Кольриджу так о цели своего исследования: "Моя цель не открывать новые явления [тем не менее открыта коническая рефракция! – *Л.П.*], не улучшать конструкцию оптических инструментов, но с помощью дифференциального исчисления (или исчисления флюксий) переделать геометрию Света, установив единый метод решения всех проблем в этой науке, выводя их из формулировки единого центрального или характеристического соотношения... мое главное желание и прямая цель состоят в том, чтобы ввести гармонию и единство в рассмотрение и аргументацию Оптики, рассматриваемой как часть чистой науки. Для создания моего общего метода не было необходимо, чтобы я принял какую-либо специальную точку зрения относительно природы Света"[21].

Как это часто бывает, более ли менее одновременно указанные задачи геометрической оптики рассматривали и другие ученые. Некоторые из них близко подошли к тому же открытию – внешней и внутренней конической рефракции, что и Гамильтон, хотя в данном случае приоритет Гамильтона несомненен.

К открытию явлений внешней и внутренней конической рефракции был близок и выдающийся ученый Дж. Мак-Куллах (James MacCullagh), коллега Гамильтона и Ллойда по Тринити колледжу. Мак-Куллах (1809–1847) еще 21 июня 1831 г. прочел в Ирландской академии мемуар, озаглавленный "Двойное преломление света в кристаллической среде, рассмотренное согласно принципам Френеля".

Когда он узнал об открытии конической рефракции, то объявил, что это лишь очевидное и непосредственное следствие теорем, опубликованных им еще в 1830 г. Это могло бы быть началом неприятной дискуссии, если бы не совершенная мягкость и благородство всех трех главных героев – Гамильтона, Ллойда, Мак-Куллаха. Действительно, Мак-Куллах был весьма близок к тому, чтобы сделать это открытие. Это тем более интересно, что он в своей работе пользовался чисто геометрическими методами в противоположность чисто аналитическим методам Гамильтона.

Надо отметить, что еще один выдающийся ученый был на пути к этому открытию – это Дж. Б. Эри (1801–1892), который написал Гамильтону 19 января 1833 г., что он давно отдавал себе полный отчет в существовании конических точек пересечения лучей (или "ряби", впадин – dimples, как он однажды назвал их) в волнах Френеля [Gr. 1. P. 631]. Конечно, и сам Френель мог их заметить. И Мак-Куллах, и Эри, и Френель могли сделать это открытие, тем не менее успех сопутствовал не им, а Гамильтону, который математически открыл и предсказал коническую рефракцию, а Ллойд по его указаниям осуществил ее экспериментально.

В 1847 г. после смерти Мак-Куллаха Гамильтон в письме Джорджу Салмону еще

---

[21] Письмо Кольриджу от 3.X 1832. Это письмо представляет собой черновик, который не был отправлен. После существенных исправлений Гамильтон отослал его в феврале 1835 г. [Gr. 1. P. 592].

Гамильтон понял, что его предсказание конической рефракции может быть подтверждено экспериментально и что это будет крупным успехом. Ничего подобного не наблюдалось за долгую историю оптики. Особенно важно было то, что он доказал существование этого явления без каких-либо предварительных экспериментальных данных, а вывел его чисто математическим путем.

раз признал, что Мак-Куллах "был очень близок к тому, чтобы самостоятельно построить теорию конической рефракции"[22].

Открытие конической рефракции, произведенное на основе весьма длинных и сложных математических расчетов, вызвало среди современников (Дж. Эри, У. Уэвелл, Дж. Гершель в Англии, Ю. Плюккер в Германии и др.) большой интерес и признание. Его часто сравнивали со сделанным позднее в том же столетии открытием планеты Нептун Леверрье и Адамсом.

Конечно, Гамильтон понимал значение открытия конической рефракции, но...Кто-то однажды заметил: "Я не знаю людей, которые, не видя конической рефракции, поверили бы в ее существование. Я сам обратил два десятка математиков, показывая им конус света". Гамильтон ответил: "Насколько это отлично от моего подхода! Если бы я только видел коническую рефракцию, я бы никогда не поверил в нее. Мои глаза так часто обманывали меня. Я верю в коническую рефракцию, потому что я доказал ее" [Gr. 3. P. 146]. Аналогичное утверждение Гамильтон высказал и почти 20 лет спустя в письме де Моргану [Gr. 3. P. 350].

Динамика света и динамика темноты. Групповая и фазовая скорости

С 1832 г. Гамильтон приступил к изучению физики распространения света и вступил в битву о природе света – корпускулярная (эмиссионная) или волновая – на стороне волновой теории. Как мы уже отмечали, в работах "Теория систем лучей" (геометрическая оптика) Гамильтон по самой сути проблемы не был связан с каким-либо конкретным представлением о природе света. Поэтому перед ним теперь возникла существенно новая задача. На стороне эмиссионной (корпускулярной) теории в Англии стоял Д. Брюстер, против него выступали сторонники волновой теории (Дж. Гершель, Дж. Эри, У. Уэвелл в Кембридже, Баден Пауэл[23] в Оксфорде).

Общее состояние проблемы было таково: в начале XIX столетия в Англии Томас Юнг, во Франции Огюстен Френель показали, что явления интерференции и дифракции легко объясняются, если предположить, что свет есть волновой процесс, распространяющийся в некоторой передающей среде. Однако они столкнулись с неожиданно резкой оппозицией. В серии статей в "Edinburgh Review" с 1802 по 1805 г. лорд Генри Брум (отнюдь не профессиональный физик, а известный политический деятель и оратор) подверг теорию Юнга такой злобной критике, что Юнг уже больше и не пытался отвратить своих коллег от ньютоновской точки зрения. Не менее резкую оппозицию встретил во Франции Френель, против него выступили Лаплас, Био, Пуассон, Малюс, чье влияние преобладало во Французской академии наук. Ситуация еще обострилась, когда потребовалось ввести только поперечные волны. Однако во Франции (в частности, благодаря разумной позиции Ф. Араго) примерно к 1827 г. (год смерти Френеля) волновая теория стала успешно вытеснять корпускулярную. В Англии это еще только предстояло.

---

[22] Письмо Дж. Салмону от 22.VIII 1847. Записная книжка № 140 по каталогу Тринити колледжа. С. 149–150.

[23] Пауэл (Baden Powell, 1796–1860), профессор геометрии в Оксфорде. Опубликовал исследования по оптике и излучению.

В то время когда Гамильтон в колледже между 1824 и 1827 гг. изучал оптику, он читал книги Коддингтона, Вуда и Стэка[24], в которых оптические явления объяснялись с корпускулярной точки зрения. Даже Х. Ллойд в своей книге[25] писал, что "любой ответ на вопрос о природе света является еще сомнительным" (за год до экспериментального подтверждения им конической рефракции, предсказанной теоретически Гамильтоном). То, что волновую теорию поддержал Дж. Гершель (хотя и с осторожными оговорками), который был в то время наиболее известным и уважаемым английским ученым, и поэтому его мнение значило очень много, сыграло важную роль[26]. Основными проблемами, которые казались ему неясными с точки зрения волновой теории света, были дисперсия и адсорбция.

Представители корпускулярной теории защищали ее, отыскивая новые оптические явления, которые, по их мнению, волновая теория не могла объяснить. Это делал Брюстер и многие другие, стоявшие вне университетов и нашедшие в Британской ассоциации содействия развитию науки удобный форум для того, чтобы представлять свои взгляды.

Гамильтон начал свои исследования о природе светоносного эфира с попытки решить проблему дисперсии. Эта проблема состояла в том, что надо было построить такую механическую модель среды, в которой различные длины волн света распространялись бы с различными скоростями и в то же время эта модель объясняла бы и другие оптические явления. Светоносный эфир начала XIX в. был странным "веществом". Для распространения волн света столь высокой частоты и скорости этот эфир должен был иметь свойства упругого твердого тела, подобного стали, и, по-видимому, не сжимаемого и обладающего весьма высоким сопротивлением по отношению к деформации. Конечно, космос не мог быть заполнен "сталью" или чем-либо подобным ей. Тем не менее математический аппарат теории волн в упругой твердой среде мог быть исходным пунктом для построения теории распространения световых волн в эфире. Такие исследования начал в 1828 г. О. Коши. Эта так называемая первая теория Коши правильно предсказывала многие оптические явления, в частности волновые поверхности в кристаллах. Однако перед ней возникли трудности, одна из которых имела принципиальное значение – можно было построить ряд таких теорий, из которых ни одна не имела преимуществ перед другой.

В итоге десятилетних попыток самого Коши[27] и его последователей стало ясно, что светоносный эфир не ведет себя подобно упругому твердому телу.

Гамильтон, как и многие другие теоретики, занимавшиеся проблемой эфира, считал, что эфир состоит из очень мелких частиц, притягивающих и отталкивающих одна другую (соседнюю!) согласно постоянным законам, и что именно для этой модели должно быть развито математическое описание. Эту картину Гамильтон,

---

[24] *Coddington H.* An elementary treatise on optics. 2nd ed. Cambridge, 1825; *Wood J.* The elements of optics. Designed for the use of students in university. 2nd ed. Cambridge, 1801; *Stack J.* A short system of optics. 3rd ed. Dublin, 1820.

[25] *Lloyd H.* Treatise on light and vision. London, 1831. P. 7.

[26] Отметим, что в своей статье "Light" (Encyclopedia Metropolitana. Vol. 4. P. 533) Гершель с похвалой отозвался о гамильтоновой "Теории систем лучей".

[27] *Cauchy A.* Oeuvres complètes. Paris, 1908. Sér. 2. T. 9. P. 390–450; *Whittaker E.* A history of the theories of the aether and electricity. London, 1960. Vol. 1. Ch. 5.

хотя и не без некоторых колебаний предпочел континуальной концепции[28] эфира, разрабатывавшейся его коллегой по Ирландской академии наук Мак-Куллахом. Причин такого выбора было две: 1) исходя из философских соображений Гамильтон предпочитал положить в основание "центры сил" Бошковича; 2) он рассматривал проблему дисперсии, а для этой задачи уже Френелем было показано, что из модели непрерывного эфира нельзя получить дисперсии, а из эфира, состоящего из частиц, разделенных расстояниями, сопоставимыми с длиной волны света, можно.

Только в январе 1839 г. Гамильтон нашел оптическую проблему, которая была ему по вкусу. Все предшествовавшие теории рассматривали распространение света, как если бы волна уже установилась в среде.

В отличие от многих исследователей того времени Гамильтон исходил из некой гипотетической структуры эфира и затем пытался математически вывести из нее законы оптики. Получалось плохо (после Максвелла мы знаем почему)[29]. Движущийся волновой "фронт" определялся как последовательные положения гребня волны. Это были теории некоего "стационарного состояния", которое возникало спустя некоторое время после того, как первая волна вступила в покоящуюся среду, т.е. предполагалось, что частицы эфира уже находятся в состоянии колебания. Гамильтон же хотел изучить действие света, впервые вошедшего в среду, и рассчитать как волна действует, когда свет вступает в темную (darkened) область. Он назвал эту проблему динамикой темноты (dynamics of darkness) или, по предложению Дж. Гершеля, схотодинамикой (skotodynamics от греч. σχοτὲιος – темный). В ней он изучил точным образом, как эластооптическое возмущение в некоторой области этой среды распространяется в ее невозмущенную часть. Это привело его к открытию различия между групповой и фазовой скоростью.

В письме к Гершелю Гамильтон пишет: "Много сделано, может быть, в динамике *света*; мало, я полагаю, в динамике *темноты* (darkness)" [H. 2. P. 599].

Как это было и в других работах Гамильтона, эти исследования привели его к плодотворным математическим методам, включающим теорию "флуктуирующей функции" и асимптотического разложения, называемого в настоящее время "бесселевыми функциями" [H. 2. P. XIV–XV].

Все же наиболее важным открытием было впервые установленное им различие между групповой скоростью и скоростью фазовой.

Открытие этого различия обычно приписывается Рэлею. Он упоминает его в "Теории звука" и в статье "On progressive waves". В этой статье Рэлей отмечает, что первым, кто указал на отличие этих скоростей, был Стокс, о Гамильтоне он не упоминает. Рэлей пишет: "В тихой воде можно наблюдать, что скорость группы

---

[28] В письме Логану (H.F.C. Logan) от 27.VII 1834 [Gr. 2. P. 88] Гамильтон выразил некоторую неудовлетворенность атомами Бошковича на том основании, что они вводят прерывности, которые, как полагал Гамильтон, было бы лучше заменить на "plenum of energies". Во время заседания Британской ассоциации, на котором он подтвердил свою веру в атомы Бошковича, он также утверждал, что заключения Пуассона относительно атомистической структуры теории не являются необходимыми для математического исследования физических законов. Как кажется, имело место явное противоречие. В своих вычислениях, однако, Гамильтон всегда предполагал существование точек массы с действующими между ними силами.

[29] Эти исследования, содержащиеся в записной книжке № 40 (1835), предвосхищают частично последующие исследования Коши.

волн меньше, чем скорость индивидуальных волн, из которых она состоит; волны кажутся продвигающимися через группу и замирают, когда они приближаются к ее внешней границе. Явление, я полагаю, объяснено впервые Стоксом".

Это неверно. Работы Гамильтона[30] были опубликованы на 9–10 лет раньше работы Стокса, а насколько ясно понимал Гамильтон физический смысл различия этих скоростей, хорошо видно из следующего отрывка из его письма Дж. Гершелю: "Я полагаю, что полностью установлено различие между *скоростью распространения данной фазы* [курсив Гамильтона. – *Л.П.*] в пространстве, *уже занятом* некой системой волн, и *скоростью распространения колебаний*, которыми набегающая система занимает все новые области пространства".

Значение понятий групповой и фазовой скорости, их количественное соотношение и применение в оптике и теории распространения волн излагаются практически в любом курсе оптики, теории радиоволн и т.п. Фундаментальна роль этих понятий в процессе формирования квантовой механики (в первую очередь в работах Л. де Бройля и Э. Шредингера).

ОПТИКО-МЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ ГАМИЛЬТОНА

Для того чтобы от оптики Гамильтона перейти к его динамике, надо прежде всего рассмотреть вопросы, связанные с оптико-механической аналогией[31]. Это необходимо не только потому, что сам Гамильтон двигался именно таким путем, но и потому, что оптико-механическая аналогия сыграла исключительно важную роль в развитии механики, оптики, квантовой механики и явилась в некотором смысле слова прообразом (пусть еще элементарным) "великого объединения". С ней связано несколько важных вопросов. Этих вопросов три: 1) связь корпускулярного и волнового аспектов в оптике – прообраз связи уравнений движения систем тел и касательного преобразования в механике; 2) оптико-механическая аналогия Гамильтона; 3) геометризация проблем динамики.

С первого взгляда кажется, что первый из этих вопросов не имеет отношения (во всяком случае прямого) к оптико-механической аналогии. На самом же деле это не так – речь идет не о переходе от оптики к уже хорошо известной в то время механике Лагранжа, а о создании *новой* формы механики – механики Гамильтона. Для нее именно этот аспект оптики имеет решающее значение.

Луч может быть истолкован и как нормаль к волновой поверхности, и как траектория потока некоторых "световых" частиц. Математический формализм теории и в том и в другом случае один и тот же. Уже в этом заключена идея оптико-механической аналогии.

Прежде чем перейти к рассмотрению существа дела, напомним, что лучевой и волновой аспекты той части оптики, которая охватывает явления отражения и преломления света, одинаково приводят к нелинейному дифференциальному урав-

---

[30] Researches on the dynamic of light // Pros. Roy. Irish Acad. 1841. Vol. 1. P. 245, 267–270; Researches respecting vibration connected with the theory of light // Ibid. P. 341–349 [H. 2. P. 576–582]. См. рус. пер. в наст. изд.

[31] Аналогия между оптическими и механическими явлениями была известна еще Иоганну Бернулли (*Бернулли И.* Избр. соч. по механике. М.; Л.: ОНТИ, 1937. С. 26–39).

нению в частных производных, имеющему в прямоугольных декартовых координатах вид

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2=0; \qquad (1)$$

в физической оптике, охватывающей явления интерференции, дифракции и поляризации основным будет уравнение

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)=0. \qquad (2)$$

Как видно, различие между характером и структурой фундаментальных уравнений очень велико. Однако, как хорошо известно, последнее уравнение переходит в первое в предельном случае бесконечно малой длины волны, выражая тем самым переход физической оптики в геометрическую.

Гамильтон ясно понимал, что прежде всего необходимо связать принцип Гюйгенса с принципом наименьшего действия.

Надо заметить, что уже в оглавлении "Theory of systems of Rays" (1827) предусмотрена (в предполагавшейся, но не написанной третьей части) глава 28 "Необыкновенные системы, образуемые одноосными кристаллами", в которой Гамильтоном было намечено рассмотрение аналитического выражения закона Гюйгенса, а рядом с ним в содержании стоит "принцип наименьшего действия".

П. 26 "Третьего дополнения" (1832) к "Теории систем лучей" Гамильтон посвятил "увязке предшествовавшего взгляда на оптику с волновой (undulatory) теорией света". Как указывает заголовок этого отдела, "величины σ, τ, υ или $\partial V/\partial x$, $\partial V/\partial y$, $\partial V/\partial z$, т.е. частные производные первого порядка характеристической функции V, взятые по текущим координатам, представляют собой в волновой теории света компоненты "нормальной медленности" (normal slowness) распространения волн. Фундаментальная формула может быть легко объяснена и доказана согласно принципам этой теории"[32]:

$$\delta V=\delta\int \mathrm{v}\,ds=\sum\left(\frac{\partial\,\mathrm{v}}{\partial\alpha_i}\delta x_i-\frac{\partial\,\mathrm{v}_0}{\partial\alpha_{0i}}\delta x_{0i}\right). \qquad (3)$$

Цель этого раздела состоит в том, чтобы показать правомерность найденных результатов в волновой теории. Все прежние рассуждения базировались на принципе наименьшего действия и развивались в терминах "эмиссионной гипотезы". Гамильтон хочет показать, что все аналитические результаты могут быть сохранены и в терминах волновой теории при использовании принципа Ферма. Заметим, что в своем нобелевском докладе Шредингер[33] дает следующую характеристику принципа Ферма: "Таким образом, принцип Ферма представляется просто *тривиальной квинтэссенцией* волновой теории". В волновой теории этот принцип находит свое

[32] "Нормальная медленность" равна обратной скорости [Н. 1. P. 277].

[33] *Гейзенберг В., Шредингер Э., Дирак П.* Современная квантовая механика. М.; Л.: ОНТИ, 1934. С. 41–60.

обоснование: "только с точки зрения волновой теории принцип Ферма становится вполне понятным и перестает быть чудом"[34].

С точки зрения волновой теории главная функция Гамильтона будет временем распространения света данного цвета от источника x', y', z' до точки x, y, z через некоторую комбинацию сред, т.е.

$$V = V(x, y, z, x', y', z', \chi), \tag{4}$$

а вариация выражения (3) обращается в нуль.

Этот результат Гамильтон называет принципом постоянного действия. Название это выбрано им исходя из двух соображений: во-первых, для того чтобы "отметить его связь с известным законом наименьшего действия" и, во-вторых, "потому что он дает непосредственно дифференциальное уравнение того важного класса поверхностей, которые согласно гипотезе колебаний называются волнами, а согласно гипотезе испускания частиц могут быть названы поверхностями постоянного действия" [H. 1. P. 107].

Это замечание имеет очень большое значение. Прежде всего ясно осознаваемая Гамильтоном связь его оптического метода с принципом наименьшего действия механики указывает на большую общность, существующую между математической оптикой и механикой. Это показывает, что уже в то время (1830) Гамильтон вплотную подошел к идее оптико-механической аналогии. От представления поверхностей постоянного действия для распространяющегося в пространстве потока частиц – один шаг к картине движения материальных корпускул. Однако Гамильтон хочет быть свободным от каких бы то ни было гипотетических элементов, даже если они заключены лишь в способе выражения.

В "Третьем дополнении" Гамильтон приходит (рассматривая проблему теории лучей с точки зрения принципа наименьшего действия) к следующим общим уравнениям луча:

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x_i} ds = d \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \alpha_i}. \tag{5}$$

Легко видеть, что эти уравнения имеют точно ту же форму, что и уравнения динамики Лагранжа. В самом деле, обозначив $\alpha_i = dx_i/ds = x'_i$, найдем

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x'_i} - \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x_i} = 0, \tag{6}$$

где $\mathrm{v} = \mathrm{v}(x_i, x'_i)$. Эти уравнения Лагранжа второго рода[35], которые являются необходимым и достаточным условием существования экстремума интеграла принципа Гамильтона. Гамильтон, который прекрасно знал работы Лагранжа, Лапласа и

[34] Там же. С. 45–46.

[35] Уравнения Лагранжа впервые встречаются в ранней его работе, напечатанной в "Miscellanea Taurinensia" (1760. Vol. 7; см. также: Oeuvres. Paris, 1867. T. 1. P. 411). Полученный результат, конечно, не является неожиданным по самому смыслу вариационной задачи. Гамильтон назвал эту работу бессмертной и стоящей выше всякой похвалы.

Пуассона и называл "Аналитическую механику" Лагранжа величественной математической поэмой, не мог не заметить этого.

Гамильтонов метод в динамике есть прямое развитие его оптических исследований. Не вдаваясь в детали, укажем, что характеристическая функция V в оптике соответствует интегралу действия в динамике, величины σ, τ, υ соответствуют компонентам импульса, уравнение $\Omega = 0$ в форме (2.5) "Третьего дополнения" есть уравнение энергии, а в форме (2.2) соответствует первому из уравнений динамики Гамильтона; "хроматический индекс" χ в обоих случаях соответствует некоторой функции заданной полной энергии; уравнения движения Гамильтона содержатся в выражениях (2.8), (2.9) и (3.1) (см. с. 15, 16).

Основная черта гамильтонова метода в оптике – связь принципа наименьшего действия (или принципа Ферма) с контактным преобразованием (построением Гюйгенса) – переносится в динамику, где исходя из принципа наименьшего действия уравнения движения приводятся к некоторому бесконечно малому контактному преобразованию. Этот характерный для гамильтоновой динамики дуализм определяет не только ее внутреннюю структуру, но и ее фундаментальное значение в различных ветвях физической науки.

Итак, и оптические и механические явления могут быть описаны как с помощью корпускулярной модели, так и с помощью модели волн; принцип наименьшего действия в форме Эйлера–Лагранжа (или этот же принцип в форме Якоби) соответствует принципу наименьшего времени Ферма. Описание с помощью волн – бесконечное семейство поверхностей – уравнение в частных производных Гамильтона–Якоби; описание с помощью частиц – ортогональные траектории к этим поверхностям – принципы Ферма и Якоби[36].

Основные понятия гамильтоновой механики (импульсы $\mathbf{p}$, функция Гамильтона H, форма $\mathbf{p}d\mathbf{q}-Hdt$, уравнение Гамильтона–Якоби) возникли при перенесении на общие вариационные принципы (в частности, на принцип Гамильтона $\delta\int \mathcal{L}dt = 0$) весьма простых и естественных понятий геометрической оптики, управляемой частным вариационным принципом – принципом Ферма.

ДИНАМИКА

Вариационный принцип Гамильтона

В 150-летней истории вариационных принципов до Гамильтона мы находим в оптике имя Ферма, в механике – имена Лейбница, Мопертюи, Эйлера, Лагранжа, Пуассона. За изложением этой истории, для которой в настоящей статье просто нет места, читатель может обратиться к книгам[37]. В них приведены как работы перечисленных (и других) предшественников Гамильтона, так и анализ этих работ в контексте развития математики, механики и физики в связи с философской пробле-

---

[36] Вариационные принципы механики (далее сокращенно: ВПМ). М.: Физматгиз, 1959. С. 116–143; *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. М.: Мир, 1965. С. 302–319; *Синг Дж.Л.* Классическая динамика. М.: Физматгиз, 1963. Гл. 2–4.

[37] *Полак Л.С.* Вариационные принципы механики, их развитие и применение в физике (далее сокращенно: ЛП). М.: Физматгиз, 1961. С. 7–97; ВПМ. С. 6–174.

матикой XVII – первой трети XIX в. Здесь же ограничимся несколькими краткими замечаниями общего характера.

Вариационные принципы были сформулированы в первоначальном виде в "век философии". Они были, и не раз, в центре философских дискуссий и более или менее туманных словопрений. Они могли быть истолкованы как выражение телеологической структуры процессов природы в противоречии с причинным (уже тогда господствовавшим среди физиков и механиков) описанием явлений. Однако в то время эти два подхода, кажущиеся нам сегодня взаимно исключающими, отнюдь не обязательно воспринимались таковыми. В различных формах философы и ученые того времени утверждали (или допускали) предустановленную гармонию "божественного творения" и подобного ему безграничного в своих возможностях интеллекта человека. Недаром познание природы считалось у гуманистов лучшим выражением любви к творцу, путем богопознания. Мир сам глубочайше интеллектуален (хотя он отнюдь не обязательно наилучший из всех возможных миров, как учил Лейбниц). Поэтому расширение представлений о мироздании путем анализа не обязательно реализующихся, но возможных миров с выделением одного из них как реального при помощи условия минимума (экстремума!) некоторой величины являлось для них оправданным с философской (и теологической) точки зрения. Возможность выделить с помощью такого условия из всех мыслимых миров мир реальный поражала тогдашних ученых. Впрочем, и в наше время можно совсем не редко встретить такое, например, высказывание: "существует закон *космической лености* [курсив мой. – *Л.П.*], называемый "принципом наименьшего действия", который устанавливает, что, когда тело движется от одного места к другому, оно избирает путь, требующий наименьшей затраты работы"[38].

Однако уже у Лагранжа вариационные принципы перестают быть математическим чудом и делаются одним из методов аналитической механики. У Гамильтона они представляют собой математическую схему (никакой теологии), в которую в принципе могут быть включены все науки, совокупность которых дает картину мироздания. Для Гамильтона важно не столько решение задачи интегрирования систем дифференциальных уравнений движения, сколько построение математического аппарата, который пока (в его работах) объединяет оптику и механику, а впоследствии охватит и другие разделы физики.

Вот некоторые сведения о начальном периоде развития вариационных принципов механики (и физики).

Пьер Луи Моро Мопертюи (1698–1759), возглавлявший знаменитую Лапландскую экспедицию, автор многочисленных философских и естественно-научных работ, в том числе "Физическая Венера", "Рассуждение о белом негре" и т.д., был довольно долгое время президентом Берлинской академии наук во время царствования Фридриха II. В его "Essai de cosmologie" содержался в весьма туманной форме принцип наименьшего действия, которому он в других своих работах пытался придать более или менее разумную математическую форму и иллюстрировать наглядными примерами. Настоящими создателями этого принципа, конечно, являются Эйлер и Лагранж.

---

[38] *Рассел Б.* Человеческое познание, его сфера и границы. М.: Изд-во иностр. лит., 1957. С. 356. Перевод ошибочный: надо не "затраты работы", а "действие".

Работы Мопертюи вызвали большую дискуссию среди современников и резкую критику, в том числе и со стороны гаагского профессора Кёнига. Дискуссия между Мопертюи и Кёнигом перешла в спор Фридриха II и Вольтера, в котором первый поддерживал Мопертюи, а второй – Кёнига. В конце концов Фридрих II и Вольтер окончательно порвали друг с другом. Присущие Мопертюи самомнение и даже самовлюбленность, эксцентричность послужили прекрасным поводом для насмешек Вольтера, который в блестящей "Истории доктора Акакия и уроженца Сен-Мало" создал уничтожающую сатиру на Мопертюи, и памфлет этот был сожжен рукой палача по приказу Фридриха II 24 декабря 1752 г. К сожалению, принцип наименьшего действия был открыт значительно раньше, чем более простой и более глубокий принцип Гамильтона. Это обстоятельство отразилось и в печатных работах Гамильтона по динамике (1834), первая из которых посвящена характеристической функции, естественным образом связанной с принципом наименьшего действия, а главная функция, связанная с принципом Гамильтона, появилась лишь во второй работе.

При рассмотрении принципа наименьшего действия необходимо иметь в виду его отличительную черту: на варьируемые движения накладывается ограничение, состоящее в том, что для них *интеграл энергии* $E = h$ сохраняет постоянное значение. Это важное ограничение является единственным[39].

Трудности, связанные с ограничением, накладываемым на вариации в принципе наименьшего действия, заставили искать новую форму принципа, свободную от этого ограничения. Эту форму достаточно простым путем нашел Якоби (1847).

Для голономной системы с n степенями свободы как для исходного, так и для варьированного движения будем иметь

$$T = h - U(x, y, z) = \sqrt{T(h-U)}\,, \tag{1}$$

и, согласно принципу наименьшего действия,

$$\int_{t_0}^{t_1} 2\sqrt{T(h-U)}dt \tag{2}$$

принимает стационарное значение для движений с постоянной энергией h. Теперь уже требование h = const для всех сравниваемых движений не является существенным. Подынтегральная функция в (2) является однородной функцией первой степени относительно скоростей, так что значение интеграла зависит только от траектории системы в пространстве конфигураций, метрика которого

$$ds^2 = \sum\sum a_{jk}dq_j dq_k \tag{3}$$

и не зависит от скорости движения вдоль этой траектории. Это означает, что интеграл (2) принимает в действительном движении стационарное значение по сравнению с его значениями для соседних движений, соединяющих те же концевые точ-

[39] Принцип Гамильтона, который схож с принципом наименьшего действия, имеет перед ним то преимущество, что он не требует одинаковости энергии для всех варьируемых траекторий. Зато он требует, чтобы частицы покрывали все траектории за одно и то же время, чего не требует принцип наименьшего действия.

ки в пространстве. Это и есть принцип наименьшего действия в форме Якоби [ВПМ. С. 294–314], который сводит задачу об определении траектории изображающей точки в пространстве конфигураций к обычной задаче вариационного исчисления с фиксированными концами. Для задачи о движении частиц в пространстве под действием сил консервативного поля $U(x, y, z)$ выражение (2) принимает вид

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} 2\sqrt{2(h-U)}ds = 0, \tag{4}$$

где s – длина дуги. Эта форма записи напоминает принцип Ферма в оптике.

Однако значительно раньше этих результатов Якоби Гамильтон в своих исследованиях об общем методе динамики сформулировал другой вариационный принцип, истоки которого лежат в его оптических работах и получивший его имя.

Первой работой Гамильтона в области динамики является неопубликованная при его жизни рукопись (также было, кстати сказать, и с его первой работой по оптике), помеченная 1833 г. и озаглавленная «Проблема трех тел, рассматриваемая с помощью моей "характеристической функции"» (опубл. в 1940 г. [Н. 2. P. 1–103]; см. также [ВПМ. С. 759–762]). Эта работа содержит попытку применить характеристическую функцию для решения классических задач небесной механики. В главном ее содержание таково: после общих замечаний о проблеме движения Солнца, Юпитера и Сатурна вводятся характеристическая функция V и ее вариация δV, затем рассматриваются возмущения Юпитера и результаты сравниваются с результатами Лапласа; рассмотрение приближенных выражений для возмущений, живой силы, возмущений почти круговых орбит, вариации констант (элементов) приводит к изменению постановки задачи и, наконец, вводится и доказывается в общем случае, что $\partial V/\partial h = t$ и что уравнения в частных производных

$$\sum\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 = 2F(r), \quad \sum\left(\frac{\partial V}{\partial x_0}\right)^2 = 2F(r_0) \tag{5}$$

имеют общее решение. В заключение находится выражение V для различных законов силы.

Уже в этой работе получены многие существенные результаты, вошедшие затем в две его основные работы. Из этих результатов наиболее важным является найденное первоначально для частного случая движения по эллиптической орбите соотношение

$$\partial V/\partial h = t, \tag{6}$$

где $V = \int_0^t \sum m\text{v}^2\, dt$ – характеристическая функция, h – "постоянная живых сил" по терминологии Гамильтона (полная энергия системы), t – время. Он сразу понял важность этого результата и записал: «*Это будет чрезвычайно важная теорема, если мы сможем найти, что в общем случае* $\partial V/\partial h = t$» [Н. 2. P. 49; ВПМ. С. 762]. И далее тут же находим: «...(8 января 1834 г.) тремя страницами далее я дал общее доказательство справедливости этой теоремы $t = \partial V/\partial h$. При помощи этой теоремы

интегрирование дифференциальных уравнений движения любой системы тел (включая вращение) сводится к нахождению вида функции V, дифференцированию ее по начальным координатам и h и определению конечных координат как функций полученных таким образом частных производных и начальных координат. Полученные таким образом выражения для конечных координат не должны содержать h». В этом результате заложены исходные предпосылки Гамильтона[40].

Важнейшие открытия Гамильтона в аналитической механике изложены были им в двух объемистых работах (108 с.) "Об общем методе динамики" (см. наст. изд.). Они потребовали от него наименьшей затраты времени по сравнению со всеми другими его важными исследованиями.

Интересно, что они изложены вполне упорядоченно и к ним неприменимы жесткие замечания Ф. Клейна, Лармора и других, которые были сделаны ими по поводу "Теории систем лучей" и приведены нами выше. Эти работы возникли непосредственно из "Теории систем лучей" и показали исключительную способность Гамильтона быстро создавать огромную по объему теорию, почти не имеющую аналогов в механике по общности и абстрактности. Призванием Гамильтона не было применение его теорий к частным физическим и механическим задачам. Это не значит, что он не интересовался прикладными аспектами, но по большей части не публиковал такие результаты. Это относится и к механике. Значение Гамильтона не столько в его непосредственном вкладе в решение конкретных задач механики, сколько в тех колоссальных возможностях, которые он открыл для других исследователей в механике и сопредельных науках. Это точно выразил Дж. Максвелл в письме к П. Тэту: "Полезность Гамильтона не в том, что он сделал сам, а в тех исследованиях (выполненных едва ли наполовину), которые он как бы заставил осуществить других ученых. Для того чтобы понять его, Вы должны подняться до него и, пройдя затем через все виды наук, вернуться вновь к нему, и тогда он даст Вам полезный совет"[41].

Впервые Гамильтон упоминает о своей новой теории в письме Х. Ллойду в 1833 г. Он пишет, что нашел форму новой динамической функции для эллиптического движения и что, используя свою новую систему, он работает над уравнениями движения для любого числа взаимно притягивающихся точек[42].

Далее в течение 1833 г. Гамильтон был занят изучением основ алгебры, дискус-

---

[40] Практически все работы, посвященные "механике Гамильтона", публикуются в настоящей книге. Поэтому мы почти не излагаем хода рассуждений и выкладки Гамильтона; пояснения и уточнения даны нами в комментариях, необходимых для понимания текста Гамильтона. Работы Гамильтона, опубликованные при его жизни, и часть рукописей по динамике света напечатаны во втором томе математических трудов Гамильтона [Н. 2]. Из работ по динамике, вошедших в этот том, ранее были опубликованы менее четверти. Гамильтон достигал выводов трудной и тяжелой предварительной работой и рассмотрением многих примеров и находил общие результаты постепенно через частные. Когда он, в конце концов, публиковал свои результаты, они появлялись в очень компактной и конденсированной форме, что делало его статьи трудными для чтения и давало очень мало указаний на путь, каким он прибыл к его концу. Многие публикуемые рукописи имеют весьма незавершенную форму, но они ясно показывают метод работы Гамильтона. Издатели-редакторы этого тома А. Конвей и Дж. Мак-Коннел печатают эти рукописи полностью, хотя сам Гамильтон не был, очевидно, полностью удовлетворен ими и поэтому опубликовал только короткие сводки их содержания.

[41] *Knott C.G.* Life and scientific works of Peter Guthrie Tait. Cambridge: Univ. press, 1911. P. 99–100.

[42] Письмо Х. Ллойду от 9. II 1833 [Gr. 2].

сией с Поттером, женитьбой, Собранием Британской ассоциации в Кембридже, но он сохранял намерение вернуться к механике. В сентябре этого же года он опять пишет Х. Ллойду: "Вы, может быть, помните мое письмо в феврале о распространении моего оптического метода и функции на физическую астрономию, о которых я думал тогда. С тех пор я нашел, что почти та же идея приходила мне на ум в 1826 г. в то время, когда я сделал мои главные шаги в оптике. Этот цикл мыслей также заставил меня вернуться к ним после того, как я совершенно забыл некоторые из них среди деталей вычисления. Я даже определил явную форму динамической функции для случая обычных частиц в пустоте"[43]. Гамильтон нашел свою записную книжку 1826 г., где он развивал принцип постоянного действия для случаев движения частиц и атмосферной рефракции, в то время как готовился к экзаменам в колледже. Впечатляющее открытие старых идей, которые теперь были подготовлены к тому, чтобы предстать в совершенно новом свете!

В этом письме он сообщает Ллойду, что пишет популярную статью для "Dublin University Review", причем испытывает некоторые родовые муки. Совет колледжа просил его написать "легкую книгу" об его оптических методах, и он рассматривал эту статью как некоторое упражнение и подготовку к книге о свете, которая, впрочем, никогда не была им написана. По своему характеру Гамильтон не мог писать о чем-либо, что не было для него в это время на первом месте. Так появилась статья "Об общем методе выражения путей света и планет с помощью коэффициентов характеристической функции". Это была крайне неровная статья. Подробное историческое введение было рассчитано на среднего читателя, изложение вопроса о характеристической функции могло остановить самого выносливого читателя, а приложение к планетным движениям было слишком коротким, чтобы продвинуть читателя в понимании проблемы. В декабре он написал неопубликованную им рукопись о задаче трех тел, в которой хотя и не были получены какие-либо новые неизвестные ранее результаты, но в каком-то смысле слова он отточил свою теорию. Затем летом и осенью 1834 г. он написал указанные выше две знаменитые статьи "Об общем методе динамики".

Гамильтон полностью осознавал важность своей новой динамики. Она важна не только в силу того значения, которое может иметь для решения проблем динамики, оптики и астрономии, но она также простирается на "невидимый мир", описанный в его вводной лекции по астрономии (1833), который является истолкователем видимого мира. Уэвеллу он просто написал, что "всякий раз, как она [новая динамика. – *Л.П.*] будет подхвачена другими, она совершит, может быть, переворот"[44].

Интересно, что после отсылки первой из своих двух статей "Об общем методе динамики" Гамильтон на некоторое время погрузился в изучение "Критики чистого разума" Канта. Однако следов влияния философии Канта во второй статье, написанной в течение месяца сразу после Эдинбургского собрания Британской ассоциации, не видно.

Гамильтону принадлежит принципиальная идея нахождения фундаментальной функции, из которой дифференцированием и конечными преобразованиями (без ка-

---

[43] Письмо Х. Ллойду от 2.IX 1833 // Manuscript Trinity College. Цит. по: *Hankins T.L.* Sir William Rowan Hamilton. Baltimore, 1980. P. 173.

[44] Письмо У. Уэвеллу 31.III 1834 [Gr. 2. P. 81].

кого-либо интегрирования) могут быть получены все решения уравнений движения. Он впервые доказал существование и полезность такой функции в геометрической оптике ("характеристическая функции V"), а затем и в динамике ("главная функция"). Так как и геометрическая оптика, и механика имеют, по существу, единую вариационную основу, то открытие Гамильтона можно отнести и к *вариационному исчислению в целом*, а специальная форма интеграла несущественна.

Введенная во второй работе "Об общем методе в динамике" Гамильтона *главная функция* S, подсказанная методами, примененными им в геометрической оптике, позволяет получить динамически возможные движения системы. Главная функция Гамильтона в явном виде представляет собой интеграл $\int_{t_1}^{t_2} L dt$, взятый вдоль действительной траектории (т.е. вдоль пути в пространстве конфигураций, удовлетворяющего уравнениям движения) и выраженный через начальные и конечные значения координат, а также начальные и конечные значения времени:

$$S = S(q_{0i}, q_{ti}, t_0, t). \tag{7}$$

Знание этой функции было бы исключительно полезно для изучения динамической системы, если бы ее можно было каким-либо способом составить, не зная заранее интегралы уравнений движения Лагранжа.

Рассмотрим теперь связь принципа Гамильтона и уравнений Эйлера–Лагранжа, следуя изложению Биркгофа[45].

Пусть уравнения

$$x_i = x_i(t, \lambda) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

определяют систему функций, зависящих от параметра λ, причем при $\lambda = 0$

$$x_i(t, 0) = \overset{0}{x}_i(t). \tag{9}$$

Допустим, что функции $x_i(t, \lambda)$ непрерывны и имеют непрерывные первые и вторые производные по t и λ, а также что достаточно близко к концам рассматриваемого интервала (t_0, t_1) эти функции обращаются в $\overset{0}{x}_i(t)$ тождественно при любом λ:

$$x_i(t, \lambda) = x_i^0(t) \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \varepsilon,\ t_1 - \varepsilon \leqslant t \leqslant t_1).$$

В этом случае интеграл

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(x_i, \ldots, x_m,\ \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_m) dt, \tag{10}$$

где F непрерывна вместе со своими частными производными первого и второго

[45] *Биркгоф Дж.Д.* Динамические системы. М.; Л.: ГИТТЛ, 1941. С. 35–36.

порядка, называется стационарным[46] при $x_i = x_i^0(t)$, если для всякой системы функций описанного типа имеем

$$\delta I = \left.\frac{\partial I}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} \delta\lambda = 0. \tag{11}$$

Это равносильно уравнению

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \lambda} \right) dt = 0 \tag{12}$$

при $\lambda = 0$. Интегрируя по частям и заметив, что $\delta x_i = (\partial x_i/\partial\lambda)\, \delta\lambda$ обращается в нуль на концах интервала (t_0, t_1), получаем уравнение, эквивалентное предыдущему:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{\partial F}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} \right) \right] dx_j dt = 0. \tag{13}$$

В частности, можно положить

$$x_i(t,\ \lambda) = x_i^0(t) + \lambda \delta x_i, \tag{14}$$

где δx_i – произвольные непрерывные функции от t с непрерывными производными первого и второго порядка, подчиненные только условию, что они обращаются в нуль достаточно близко от обоих концов интервала.

Таким образом, найдем, что требование стационарности интеграла I равносильно системе m дифференциальных уравнений относительно $x_1^0, \ldots,\ x_m^0$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0. \tag{15}$$

Это уравнения Эйлера–Лагранжа, в которых только $\mathcal{L}$ заменено на F. Отсюда уравнениям Эйлера–Лагранжа можно придать вариационную форму, известную

[46] Необходимо отчетливо различать стационарное значение и экстремум и ближе рассмотреть их взаимоотношение. Стационарное значение требует только равенства нулю первой вариации без какого-либо ограничения в отношении второй вариации. Экстремум требует равенства нулю первой вариации плюс добавочные условия относительно второй вариации. Кроме того, проблему экстремума рассматривают, предполагая, что мы находимся внутри границ пространства конфигураций. Функция, которая не имеет экстремума внутри области, может иметь его на границе этой области. На границе смещения необратимы. Для необратимых смещений функция может иметь экстремум без того, чтобы она имела в этой точке стационарное значение. В этом случае экстремум существует без равенства нулю первой вариации. Так, например, если шар катится по наклонному желобу, то он будет в равновесии в самой низкой точке желоба, где касательная к траектории горизонтальна. Если же остановить шар раньше с помощью колышка, то шар будет в этом случае в наинизшем доступном для него положении, хотя угловой коэффициент касательной не обращается в нуль и высота не имеет стационарного значения. Это условие больше не требуется потому, что шар достиг границы доступного ему пространства конфигураций и здесь вариация положения необратима.

под названием принципа Гамильтона:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}dt = 0. \qquad (16)$$

В соответствии с понятием вариации можно произвести любую замену переменных в уравнениях (15) посредством подстановки этих переменных в функцию $\mathcal{L}$. От этого в значительной мере зависит удобство лагранжевой формы уравнений движения.

Принцип Гамильтона был им записан в двух формах:

$$1)\ \delta\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q_i,\ \dot{q}_i,\ t)dt = 0, \qquad (17)$$

где $\mathcal{L} = E_{\text{кин}} - E_{\text{пот}}$[47] (необходимые и достаточные условия стационарности (17) – уравнения Эйлера–Лагранжа);

$$2)\ \delta\int_{t_0}^{t_1} [\textstyle\sum p_i\dot{q}_i - H(q_i,\ p_i,\ t)]dt = 0. \qquad (17')$$

Найдем аналогичные дифференциальные уравнения для интеграла (17′).

Проварьировав выражение $\left[\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H\right]$ по p_i, получим

$$\delta\mathcal{L} = \sum\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i, \qquad (18)$$

но скобки перед δp_i равны нулю вследствие преобразования Лежандра. Следовательно, произвольное варьирование p_i не влияет на вариацию $\mathcal{L}$. Поэтому если теперь рассматривать p_i не как заданные функции q_i и $\dot{q}_i$, а как вторую систему независимых переменных, то можно обобщить соответственно принцип Гамильтона и на этот случай и определить его стационарное значение.

Тогда второе выражение принципа Гамильтона (17′) при независимых произвольных вариациях q_i, p_i для $2n$ переменных сопряжено с $2n$ уравнениями Эйлера–Лагранжа (см. выше):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} \equiv \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0, \qquad (19)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{p}_i} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial p_i} \equiv -\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0, \qquad (20)$$

т.е. мы получили канонические уравнения Гамильтона из интеграла (17′). Структура дифференциальных уравнений, получающихся из выражения (17′), проще, чем

---

[47] По аналогии с термодинамикой можно было бы назвать функцию $\mathcal{L} = E_{\text{кин}} - E_{\text{пот}}$ "свободной энергией" в отличие от "полной энергии" $E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}}$.

структура уравнений, получающихся из (17): они не второго, а первого порядка и все производные выделены, а не скрыты какими-либо алгебраическими операциями.

В общем виде утверждение, что интеграл вариационного принципа во второй форме (17′) принимает стационарное значение при произвольной вариации переменных q_i и p_i, было доказано в 1919 г. Ливенсом[48].

С математической точки зрения дифференциальные уравнения Эйлера–Лагранжа и вариационное уравнение принципа Гамильтона являются различными способами выражения одного и того же утверждения. Однако первые не могут быть выражены в словах, которые бы яснее осветили суть дела, чем голые формулы, а принцип Гамильтона, напротив, может быть выражен так: лагранжево действие имеет стационарное значение для действительной траектории. Это выражение легче связать с физическими понятиями.

Необходимо также иметь в виду следующее принципиально важное обстоятельство.

Во времена Эйлера, Лагранжа и Гамильтона, Якоби еще не было известно фундаментальное требование формулировки законов природы – инвариантность и ковариантность, открытое лишь в XX в., но оказалось, что в развитой ими вариационной концепции механики инвариантность выполняется автоматически. В этой концепции расчеты и их результаты остаются справедливыми в любой системе координат. Никто из создателей вариационного подхода в механике, разумеется, не предвидел, да и не мог предвидеть, всей важности этого не только для вычислительной схемы решения дифференциальных уравнений движения сложных задач, но и для единственности и истинности описания процессов, происходящих в макро- и микрокосмосе.

Укажем еще на некоторое предвосхищение в гамильтоновой механике замечательной теоремы Нётер.

Применение циклических переменных позволяет указать на связь закона сохранения энергии со временем в классической механике; в теории относительности энергия также соответствует четвертой (временнóй) компоненте четырехмерного тензора энергии-импульса. Рассмотрим склерономную систему, которая не содержит явно времени. Будем рассматривать t не как независимую переменную, а примем, что $n+1$ переменных q_i и t являются функциями некоторого параметра τ. Обозначим производную по τ штрихом. Тогда

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \left(\mathcal{L}(q_i, \frac{\dot{q}_i}{t'} \right) t' d\tau; \tag{21}$$

так как только t' входит в подынтегральное выражение, а t не входит, то t является циклической координатой. Найдем импульс, связанный с циклической координатой t:

$$p_t = \frac{\partial(\mathcal{L}t')}{\partial t'} = \mathcal{L} - \left(\sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\dot{q}_i}{t'^2} \right) t' = \mathcal{L} - \sum p_i \dot{q}_i = -(\sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}). \tag{22}$$

---

[48] *Livens G.H.* On Hamilton's principle and the modified function in analytical dynamics // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1919. Vol. 39. P. 113.

Согласно известной теореме импульс, соответствующий циклической координате, остается постоянным в процессе движения. В (22) выражение в скобках есть полная энергия E, равная для обычной механической системы $T + U$. Следовательно, для консервативной и неконсервативной систем обобщенный импульс, связанный со временем t, есть отрицательная величина полной энергии. Если система консервативна, то $p_i = -E = \text{const}$ и мы получили закон сохранения энергии.

Посмотрим теперь, как же сам Гамильтон определяет место своего принципа и связанного с ним метода в системе физических наук? Ведь он недвусмысленно отказался признать космологическое значение принципа наименьшего действия. В самом деле, Гамильтон пишет:

"Хотя закон наименьшего действия стал, таким образом, в ряд высочайших теорем физики, все же его притязания на космологическую необходимость на основе экономии во Вселенной в настоящее время обычно отвергаются. И это представляется справедливым. Среди других причин это вытекает и из того, что величина, которая претендует на то, чтобы быть сэкономленной, в действительности часто расточительно расходуется" [H. 1. P. 317].

Оценивая значение своей работы об общем методе динамики, Гамильтон прежде всего подчеркивает, что благодаря найденной им новой математической форме "динамика и оптика будут точно рассмотрены как следствие общего принципа"[49]. Для него основой является установление единой схемы, в которой бы из некоторого основного соотношения выводились все законы механики и оптики.

Итак, Гамильтон придает своему методу основное значение: этот метод должен охватить всю физику. Но это универсальное значение разработанного им метода основывается на его математической форме. Единство и простота, симметрия, достигаемая таким путем, – вот главнейшие и определяющие преимущества нового метода, по мнению Гамильтона[50].

Не только в самих статьях, опубликованных в "Philosophical Transactions", он избегает каких-либо "философских вопросов", но и в письме к де Моргану оценивает свою работу как лежащую в области математической разработки задач динамики. Несмотря на резко выраженные интересы к общим вопросам теории познания, Гамильтон пишет свои статьи максимально формализованно[51].

Он сам характеризует свои исследования так: "Мои собственные исследования по динамике лежат в совершенно ином направлении, они приводят меня к системе строгих и общих выражений для интегралов дифференциальных уравнений движения системы материальных точек"[52].

Мы имеем здесь довольно распространенный в истории науки случай. Какая-либо общая проблема постепенно освобождается от полуфилософских пут и, теряя в

---

[49] Письмо дяде Джеймсу от 12.III 1834 [Gr. 2. P. 74].

[50] "Мне хотелось бы, чтобы интеллектуальную красоту науки... по крайней мере края ее величия увидели все, так как все созданы для того, чтобы черпать наслаждение в этом возвышающем зрелище".

[51] "Unmetaphysisch", как он выражается в одном письме к Уэвеллу.

[52] Письмо А. де Моргану от 18.II 1842 [Gr. 2].

очаровании (псевдо)всеобщности, столь любимый "популяризаторами", делается по-иному общей, более глубокой и эвристически ценной[53].

Так были заложены основы аналитической механики Гамильтона, ставшие в дальнейшем основой динамики в смысле Гамильтона–Якоби, так как замечательный немецкий математик Якоби (1804–1851) блестяще развил и значительно обогатил идеи Гамильтона в области интегрирования дифференциальных уравнений движения.

Что касается Якоби, то он интересовался именно важнейшим для механики вопросом об интегрировании уравнений движений и не связывал с вариационными принципами каких-либо далеко идущих, зачастую спекулятивных, обобщений.

Дальнейшее развитие собственно математической стороны вариационного принципа Гамильтона (и принципа наименьшего действия) естественно пошло по пути, подсказанному проблематикой и подходами вариационного исчисления (в нем, кстати сказать, есть и "поля Гамильтона" [ВПМ. С. 289–314]). Из этих работ наиболее важной является большая статья, опубликованная в 1848 г. выдающимся русским математиком М.В. Остроградским (1801–1862) [Там же. С. 315–388]. В этой статье принцип Гамильтона, сформулированный им в 1836 г. (как мы отмечали выше) для склерономной системы (кинетическая энергия представлялась в виде квадратичной формы от обобщенных скоростей), был обобщен Остроградским на общий случай системы с нестационарными связями. В этой же работе Остроградский обратил внимание на то, что в общем случае для приведения уравнений движения к каноническому виду требуются только дифференцирования и исключения переменных. В связи с этим принцип Гамильтона иногда называют принципом Гамильтона–Остроградского.

Мы лишь кратко перечислим рассмотренные в этом аспекте проблемы (см. [ВПМ, ЛП]): 1) вторая вариация интеграла действия; 2) изохронная и изоэнергетическая вариация; 3) синхронное варьирование; 4) обобщение вариационных принципов механики на неголономные системы; 5) геометризация проблем динамики; 6) интегрирование уравнения Гамильтона–Якоби; 7) интегральные инварианты Пуанкаре–Картана; 8) вариационный принцип Гёльдера; 9) вариационный принцип Фосса.

Отсутствие места не позволяет нам также рассмотреть с необходимой подробностью значение вариационных принципов в вопросах, связанных с формальной

---

[53] Краткая, но очень четкая характеристика динамики Гамильтона–Якоби дана в кн.: *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. С. 136. Приводим ее: "Гамильтонова механическая система задается четномерным многообразием (фазовым пространством), симплектической структурой на нем (интегральным инвариантом Пуанкаре) и функцией на нем (функцией Гамильтона). Лагранжева механика включается в гамильтонову как частный случай... Гамильтонова точка зрения позволяет исследовать до конца ряд задач механики, не поддающихся решению иными средствами (например, задачу о притяжении двумя неподвижными центрами и задачи о геодезических на трехосном эллипсоиде). Еще большее значение гамильтонова точка зрения имеет для приближенных методов теории возмущений (небесная механика), для понимания общего характера движения в сложных механических системах (эргодическая теория, статистическая механика) и в связи с другими разделами математической физики (оптика, квантовая механика и т.п.)".

устойчивостью динамических систем вблизи точки равновесия, или периодического движения, хотя Биркгоф замечает, что можно даже сказать, "что в этом состоит их [вариационных принципов. – *Л.П.*] главное значение для динамики"[54].

Канонические уравнения Гамильтона и уравнение Гамильтона–Якоби

Уравнения Эйлера–Лагранжа выражают необходимые условия стационарности некоторого интеграла относительно вариации переменных, входящих в его подынтегральную функцию. Если интеграл является инвариантом относительно преобразования координат, то соответствующие уравнения Эйлера–Лагранжа выражают условия, которые не могут зависеть от выбора координат, иначе говоря, уравнения Эйлера–Лагранжа являются ковариантными дифференциальными уравнениями.

Развивая свой "оптический" метод, Гамильтон в 1835 г. выводит уравнения, получившие название "канонических уравнений Гамильтона". Они появлялись в механике и раньше.

Еще в 1809 г. Пуассон ввел функцию $\sum_i \dot{q}_i p_i - T$, рассматриваемую как функцию от q_i и p_i, и вывел половину гамильтоновых уравнений[55].

Лагранж в 1809 г., рассматривая варьирование элементов орбит, установил систему уравнений в гамильтоновой форме, в которые вместо функции H входила пертурбационная функция P[56]. Лагранж применил эти дифференциальные уравнения в каноническом виде в своей теории возмущений и отметил, что, несмотря на то что число их в 2 раза больше, чем число обычных уравнений динамики, они обладают некоторыми преимуществами.

Во втором издании "Аналитической механики"[57] Лагранж приводит следующие уравнения:

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{\partial R_i}{\partial s_i}, \quad \frac{ds_i}{dt} = \frac{\partial R_i}{\partial \alpha_i},$$

где α_i – начальные значения координат, R_i – начальные значения $\partial T/\partial q_i = p_i$. Это простейший пример системы канонических элементов. Однако Лагранж не заметил глубокой связи между этими уравнениями и уравнениями движения.

В 1834–1835 гг. Гамильтон не только написал канонические уравнения, но и положил их в основу своих замечательных работ по динамике[58]. Поэтому принятое в механике наименование "канонические уравнения Гамильтона", безусловно, правильно.

---

[54] *Биркгоф Дж.Д.* Динамические системы. М.; Л.: ГИТТЛ, 1941. С. 53.

[55] *Poisson S.D.* Mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique // J. École Polytechn. 1809. T. 8. P. 266–344.

[56] *Lagrange J.* Second mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les problemes de mécanique, dans lequel on simplifie l'aplication des formules générales à ses problĕmes // Mém. Inst. 1809. P. 343–352.

[57] *Лагранж Ж.* Аналитическая механика. М.; Л.: ГТТИ, 1950. Т. 1. С. 420–426.

[58] С математической точки зрения теория Гамильтона–Якоби является лишь частным случаем теории характеристик Коши.

Для перехода от лагранжевой к гамильтоновой форме динамики воспользуемся преобразованием Лежандра[59] (хотя этот переход можно осуществить и без него, воспользовавшись методом неопределенных множителей Лагранжа).

Использовав преобразование Лежандра, мы заменим уравнения Лагранжа каноническими уравнениями Гамильтона

$$\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i, \quad \dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i. \qquad (23)$$

Как мы уже отметили выше, они обладают большим преимуществом по сравнению с уравнениями Лагранжа – производные во времени в них имеются только в левых частях уравнений, так как H не содержит производных q_i и p_i по t.

Это исторически первая запись канонических уравнений (1835). Для любой системы, описываемой уравнениями Лагранжа, будут иметь место и уравнения Гамильтона.

Если функция H зависит явно от t, то скорость ее изменения $\dot{H} = \partial H / \partial t$, а если не зависит явно от t, $H = \text{const}$ (это равенство называют интегралом энергии).

Надо отметить, что две группы уравнений (23) неодинаковы по содержанию. Первые n уравнений

$$\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i \qquad (24)$$

получены исключительно на основе определения функции H и совершенно не связаны с законами динамики; они эквивалентны n уравнениям, определяющим переменные

$$p_i = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i. \qquad (25)$$

Динамические закономерности находят отражение лишь во второй группе уравнений (23):

$$\dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i. \qquad (26)$$

Это различие, однако, несущественно для приложений, и в них эти уравнения можно считать совершенно равноправными.

Уравнения Гамильтона (23), полученные им для голономных систем, могут быть без большого труда выведены и для механических систем других типов (неголономные, системы голономные с непотенциальными силами, системы голономные с силами трения типа сил Рэлея; последние два типа легко обобщаются на случай неголономной системы).

Наконец, заметим, что можно получить как функцию Гамильтона H из функции Лагранжа $\mathcal{L}$, так и, наоборот, функцию $\mathcal{L}$ из H.

---

[59] "Преобразование Лежандра – вспомогательный математический прием, состоящий в переходе от функций на линейном пространстве к функциям на сопряженном пространстве. Преобразование Лежандра сродни проективной двойственности и тангенциальным координатам в алгебраической геометрии. Оно часто встречается в физике, например при определении термодинамических величин" (См.: *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. С. 54). Надо заметить, что так называемое преобразование Лежандра встречается впервые не у Лежандра, а у Эйлера, если не у Лейбница (см.: *Stäckel P.* // Bibl. Math. 1990. Vol. 3. P. 517).

Исторически исследования в динамике концентрировались вокруг задач с функциями Лагранжа $\mathcal{L}$ и Гамильтона H в виде квадратичных форм.

Это имело место как в силу физических соображений, так и благодаря возможности использования римановой n-мерной дифференциальной геометрии. Вначале рассматривали, как правило, лишь обратимые системы. Однако, как заметил Леви-Чивита[60], если $\mathcal{L}$ имеет вид $T + U$, но содержит явно время t, то $\mathcal{L}$ можно заменить консервативной функцией необратимого типа при условии, что t вводится как $(n + 1)$-я координата (соответствующий импульс оказывается циклической координатой). Гамильтон нашел исключительно важное и красивое преобразование, делающее квадратичную по скоростям функцию Лагранжа линейной по скоростям при одновременном удвоении числа механических переменных. Преобразование Гамильтона, применимое не только к специально механическому виду функции Лагранжа, сводит все лагранжевы задачи к особенно простой и симметричной изящной форме, которую Якоби назвал "канонической"; исходные n дифференциальных уравнений Лагранжа второго порядка заменяются $2n$ дифференциальными уравнениями первого порядка. Открытие этих уравнений означало не только новую эру в развитии механики, но и новый подход к проблеме построения единой и единственной физической картины мира.

Это прекрасно видно в частной и общей теории относительности. Что же касается квантовой механики, то Гейзенберг указывает, что в ней "математическая схема в конце концов внешне похожа на классическую теорию и отличается от последней только наличием перестановочных соотношений, при помощи которых уравнения движения могут быть выведены из функции Гамильтона"[61].

Теория канонических преобразований была разработана в основном Якоби [ВПМ. С. 288–314] и Софусом Ли [ВПМ. С. 404–424]. Хотя работы Якоби имели своей целью решение задачи интегрирования уравнений, они в той теоретико-групповой форме, которую придал касательным (или, что почти то же самое в механике, каноническим) преобразованиям Софус Ли, приобрели принципиальный характер и сыграли фундаментальную роль в развитии дуальной концепции движения, столь важной для микро- и макрофизики XX в.

Итак, пусть дифференциальные уравнения движения записаны на основании вариационного принципа Гамильтона. Возникает вопрос об их фактическом интегрировании. Для этой цели Гамильтоном и Якоби была развита специальная теория, которая заключает в себе три последовательных этапа. Прежде всего необходимо найти возможно более простую форму дифференциальных уравнений движения. Эта форма найдена в канонических уравнениях Гамильтона. Затем надо установить общие законы таких преобразований этих дифференциальных уравнений, при которых они сохраняли бы свою форму. Такими законами оказались канонические преобразования и теория их инвариантов. Наконец, надо развить собственно теорию интегрирования систем канонических уравнений. Решение этой задачи привело к установлению и интегрированию уравнения в частных производных Гамильтона–Якоби.

---

[60] *Levi-Civitá T.* // Atti e rass. tecn. Soc. ing. e arch. Torino. 1895. Vol. 31. P. 816–823.

[61] *Гейзенберг В., Шредингер Э., Дирак П.* Современная квантовая механика. М.: ГТТИ, 1934. С. 21.

Именно тут Гамильтон не то чтобы совершил ошибку, а скорее не заметил важное и принципиальное упрощение, которое спустя четыре года заметил Якоби и (после справедливой критики теории Гамильтона) дал необходимое обобщение.

На связь уравнений в частных производных первого порядка и систем обыкновенных дифференциальных уравнений указал еще в 1819 г. Коши в заметке в "Bulletin de la Société philomatique" (воспроизведенной вновь в 1841 г.[62]). Он показал, что интегрирование уравнений в частных производных первого порядка может быть сведено к интегрированию единственной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Якоби позже нашел частный случай этой теоремы для уравнений динамики.

Кэли в 1862 г.[63] отметил, что изложение содержания считавшегося не опубликованным мемуара Коши 1831 г. дано в "Extrait de Mémoire présenté à l'Academie de Turin, 11 oct. 1831", опубликованном литографически с датой "1832 г. Турин" с дополнением, датированным 6 марта 1833 г. Это краткое изложение начинается так: "§ 1. Вариация произвольных постоянных. Пусть даны $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка, связывающие переменные t, ... с n функциями от t, обозначенными $x, y, z, \ldots$, и n другими функциями t, обозначенными $u, v, w, \ldots$, вида

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dQ}{du}, \quad \frac{dy}{dt}=\frac{dQ}{dv}, \quad \frac{dz}{dt}=\frac{dQ}{dw}, \tag{27}$$

$$\frac{du}{dt}=-\frac{dQ}{dx}, \quad \frac{dv}{dt}=-\frac{dQ}{dy}, \quad \frac{dw}{dt}=-\frac{dQ}{dz}, \tag{28}$$

причем происхождение этих уравнений безразлично, и пусть даны выражения для вариаций постоянных в интегралах написанной выше системы". Этого, кажется, досточным для того, чтобы считать, что в 1831 г. Коши был уже знаком с той формой уравнений, которую Гамильтон придал уравнениям движения.

Таким образом, до работ Гамильтона были уже известны в математике (в той ее области, которую мы теперь называем теорией дифференциальных уравнений) уравнения, имеющие форму канонических уравнений механики. Однако основной шаг, необходимый для того, чтобы сделать уравнения такого вида фундаментальными уравнениями механики и показать их связь с другими уравнениями, был сделан Гамильтоном, который, насколько можно судить по имеющимся опубликованным материалам, не знал этой работы Коши. Впрочем если бы и знал, то от чисто математической работы Коши еще очень длинный путь до *основных уравнений* механики. Гамильтону потребовалось для этого прежде всего ввести вместо независимых переменных, принятых ранее в механике, q_i, $\dot{q}_i$ переменные q_i, p_i, что имело принципиальное значение не только для механики, где p_i – обобщенные импульсы, определяемые равенствами $p_i = \partial\mathcal{L} / \partial\dot{q}_i$. (Заметим, что отсюда возникло фазовое пространство, и отметим важнейшую роль этих переменных в квантовой и статистической механике.) Он ввел функцию $H(q_i, p_i, t)$ – гамильтониан и положил

---

[62] *Cauchy A.* Mémoire sur l'integration des equations aux derivées partielle du premier ordre // Exer. anal. phys. math. 1841. T. 2. P. 238–272.

[63] *Cayley A.* Report of the progress of the solution of certain special problems of dynamics // Rep. Brit. Assoc. Adv. Sci. 1862. P. 184–232; The collected mathematical papers. Cambridge: Univ. press, 1891. Vol. 4. P. 514.

эти уравнения в *основу* механики, а также указал на их связь с теорией преобразований и так называемым уравнением Гамильтона–Якоби. Особенно важно то, что он показал взаимозаменяемость уравнений Лагранжа и канонических уравнений и глубокую связь последних с вариационным принципом механики в форме Гамильтона.

Дав высокую оценку результатам Гамильтона, Якоби отметил сразу и недостатки его теории: "Мне кажется, что Гамильтон представил свое *прекрасное открытие* [курсив мой. — *Л.П.*] в неправильном освещении, благодаря чему оно оказалось одновременно без нужды сложным и ограниченным..."[64].

Критика Якоби исследования Гамильтона содержала два основных замечания. На первом месте стояло замечание о том, что не доказано существование решения двух одновременно имеющих место уравнений. Гамильтон такое доказательство не опубликовал, однако он обладал им для специального случая – орбита под действием центральной силы, поскольку в записной книжке о проблеме трех тел, где содержатся записи начала 1833 г., это доказательство изложено (см. [H. 2. P. 79, 80]). На второе замечание труднее ответить. Оно состоит в том, что использование Гамильтоном двух дифференциальных уравнений в частных производных препятствует приложению метода Лагранжа для решения таких уравнений. В самом деле, в немногих местах, в которых он образует характеристическую функцию для специальной динамической задачи.(см., например, [H. 2. P. 103]), мы не можем уточнить, каким методом он пользовался, так как он не дает прямых указаний об этом. Кажется вероятным, что он сначала интегрирует дифференциальные уравнения движения, а затем исключает прямым интегрированием правую сторону уравнения

$$V = \int_{t_0}^{t_1} 2T dt. \tag{31}$$

Выразив это в терминах начальной и конечной конфигурации, Гамильтон получает соответствующую форму характеристической функции.

Гамильтон впервые узнал о статье Якоби от Х.Ф.К. Логана (H.F.C. Logan), который написал ему, что, по его мнению, ни Пуассон, ни Якоби не дали теории Гамильтона той справедливой оценки, которую она заслуживает[65]. В более позднем письме Логан несколько изменил свою точку зрения и просил Гамильтона ускорить публикацию его исследований в этой области. Интересно отметить, что Гамильтон в письме Лаббоку в Лондон горько жалуется на трудности с получением иностранных журналов и просит его прислать ему статью Якоби[66].

Гамильтон не видел статьи Якоби до получения письма Логана и увидел ее только шесть месяцев спустя, когда он ответил Логану, что прочел перевод некоторых замечаний Якоби в "Journal de mathématique" Лиувилля. Он был польщен похвалой Якоби, но огорчен тем, что Якоби нашел его метод без нужды ограниченным. Он писал Логану: "Если бы я имел досуг приняться за этот вопрос снова,

[64] *Якоби К.* Лекции по динамике. М.; Л.: ОНТИ. 1936. С. 6.

[65] Письмо Х.Ф.К. Логана, 1837 [Gr. 2. P. 85].

[66] Письмо Дж.В. Лаббоку от 1. X 1837 [H. 2. P. 283].

я не сомневаюсь в том, что показал бы, что в области обобщения мы могли бы поменяться местами". Гамильтон думал, конечно, о своем "Исчислении основных соотношений", о котором он сообщил во введении ко второму очерку и которое Логан побуждал его опубликовать возможно быстрее.

Гамильтон встретился с Якоби в 1842 г. в Манчестере на очередном собрании Британской ассоциации. Описывая собрание, он пишет, что видел "много Бесселя и некоторое количество Якоби"[67]. Из этих двух замечательных немецких ученых Бессель, по-видимому, произвел большее впечатление на Гамильтона, чем Якоби. Оба ученых наверняка слушали работы Гамильтона о теории света, которые были представлены в математической и физической секциях. Якоби в своей работе "О новых общих принципах аналитической механики" отозвался о Гамильтоне как о "знаменитом королевском астрономе Ирландии" и позже как о "Лагранже этой страны" [Gr. 2. P. 388].

Вряд ли можно представить более приятный отзыв для Гамильтона с его преклонением перед творческим обаянием Лагранжа и, в частности, перед его "Аналитической механикой"[68].

С точки зрения задачи интегрирования канонических уравнений Гамильтона отметим еще следующие их премущества: 1) в отличие от функции L функция H зависит только от переменных и не содержит каких-либо производных; 2) увеличение вдвое числа переменных расширяет область возможных преобразований; 3) в лагранжевой механике не существует единого метода упрощения функции L, в то время как в гамильтоновой механике он существует и сводит всю задачу интегрирования к нахождению одной фундаментальной функции, являющейся производящей функцией некоторого преобразования.

В методе преобразования координаты q_i и p_i уже не рассматриваются (в отличие от метода прямого интегрирования) как функции t, а являются просто некоторыми переменными величинами – координатами точки в фазовом пространстве. Задача о движении в рассуждениях и выводах не фигурирует, важно лишь, чтобы при преобразовании сохранялись канонические уравнения. В этом заключена уже возможность применения гамильтонова формализма (как

---

[67] Письмо Е.Р. Эдеру от 5.VII 1842 [Gr. 2. P. 390–391].

[68] Отметим одно обстоятельство, важное для приложений. Пусть функция S представляет собой сумму функций, каждая из которых в отдельности зависит от координаты q (и, кроме того, от постоянных интегрирования α_i):

$$S = S_1(q_1)+\ldots+S_i(q_i).$$

Тогда уравнение в частных производных

$$H(q_1,\ q_2,\ldots,\ \partial S_1/\partial q_1,\ \partial S_2/\partial q_2,\ldots) = V(\alpha_i) \qquad \text{(A)}$$

распадается на i обыкновенных дифференциальных уравнений

$$F_i(\partial S_i/\partial q_i,\ q_i) = \alpha_i,$$

или, разрешая их,

$$\partial S_i/\partial q_i = p_i(q_i,\ \alpha_i).$$

В данном случае говорят, что уравнение (A) решается разделением переменных.

принято говорить в настоящее время) к широкому кругу задач немеханического характера.

Для лучшего понимания динамической проблемы введем в рассмотрение пространство $2n + 2$ измерений с координатами q_i, p_i, t, H, которое Ланцош[69] называет расширенным фазовым пространством, а Синг[70] – пространством состояний и энергии ($N = 2n + 2$ – число степеней свободы системы, q_i и p_i – сопряженные переменные). Динамическая система определена, если заданы $(2n + 1)$-мерная поверхность энергии и находящаяся на этой поверхности изображающая точка. Пусть уравнение поверхности энергии имеет вид

$$\Omega(q_i,\ p_i,\ t) = 0. \tag{36}$$

Легко видеть, что динамика консервативной системы в фазовом пространстве с гамильтоновой функцией $H(q_i, p_i)$ математически тождественна динамике в пространстве $2n + 2$ измерений (q_i, p_i, t, H) с функцией энергии Ω. Этот изоморфизм интересен потому, что он объединяет вместе противоположные подходы к гамильтоновой динамике. В динамике в пространстве (q_i, p_i, t, H) достигнута большая общность, причем как время t, так и гамильтониан H входят в уравнения математически равноправно с q, p, так что теория вполне пригодна для применения в релятивистском случае. В то же время динамика консервативной системы в фазовом пространстве охватывает те проблемы, которые являются наиболее интересными в ньютоновой динамике и возникают из рассмотрения движения систем частиц и твердых тел.

Сделаем в заключение краткое замечание о теореме Лиувилля и теореме возврата Пуанкаре. Теорема Лиувилля[71] может быть записана так: якобиан

$$\frac{\partial(q_{11},\ q_{21},\dots,\ q_{n1},\ p_{11},\ p_{21},\dots,\ p_{n1})}{\partial(q_{10},\ q_{20},\dots,\ q_{n0},\ p_{10},\ p_{20},\dots,\ p_{n0})} = +1, \tag{37}$$

что означает, что преобразование от (q_{i0}, p_{i0}) к (q_{i1}, p_{i1}), осуществляемое интегралами уравнений Гамильтона (при фиксированных t_0 и t_1), обладает свойством сохранения протяженности (объема, меры) фазового пространства; иначе говоря, "фазовая жидкость несжимаема"[72]. Эта теорема и уравнения Гамильтона явились исходным пунктом для обоснования так называемой теоремы возврата Пуанкаре[73] (1890), которая самым существенным образом изменила дальнейшее развитие механики.

Использовав только одно свойство уравнений Гамильтона – теорему Лиувилля о

---

[69] *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. М.: Мир, 1965; см. также: *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: Гостехиздат, 1957.

[70] *Синг Дж.Л.* Классическая динамика. М.: Физматгиз, 1963.

[71] *Liouville J.* // J. math. 1849. T. 16. P. 257.

[72] Это означает, что фазовый поток гамильтоновых уравнений сохраняет фазовый объем. Отсюда вытекает, например, что устойчивость в гамильтоновой системе не может быть асимптотической.

[73] *Poincaré H.* // Acta math. 1890. Vol. 13. P. 67–73. Модернизированная формулировка теоремы Пуанкаре была дана Ван Флеком (*Van Fleck E.B.* // Bull. Amer. Math. Soc. 1915. Vol. 21. P. 335). Доказательство Пуанкаре корректно, хотя в нем нет непосредственной ссылки на понятие нулевого множества (понятие лебеговой меры относится к более позднему времени).

сохранении меры при преобразовании с помощью оператора T_t (объем, протяженность) фазового пространства, которое является инвариантом преобразования, определяемого каноническими уравнениями, – можно получить теорему возврата Пуанкаре. Для этого надо рассмотреть автономную систему

$$\dot{x}_i = \overline{X}_i, \tag{38}$$

обладающую двумя следующими свойствами.

1. $\Delta = 0$, т.е. объем пространства переменных инвариантен относительно преобразования, определяемого решениями уравнений (38): "Фазовая жидкость несжимаема". В наиболее интересных случаях применений уравнений Гамильтона это условие выполняется.

2. Существует замкнутая область Ω конечного объема $m\Omega$ такая, что начинающиеся в ней характеристики целиком располагаются в ней ("жидкость движется в замкнутом сосуде"). Такая область переводится сама в себя и поэтому называется *инвариантной областью*.

Теорема Пуанкаре[74] устанавливает, что если α есть любая сколь угодно малая замкнутая подобласть области Ω, то существуют характеристики, которые бесконечное число раз пересекают подобласть α. Точнее, для любого сколь угодно большого значения t_1 можно указать такие движения системы, при которых изображающая точка для некоторого $t > t_1$ окажется в области α.

Теорему Пуанкаре – теорему возврата – можно считать отправным пунктом в новом подходе к задачам классической динамики. До нее считалось, что *решение* задачи динамики – нахождение зависимости положения системы от времени t и заданных начальных значений координат и скоростей частиц. Однако для большей части задач такое решение получить не удается; отсюда интерес механиков к теореме Пуанкаре. Основное внимание поэтому в настоящее время обращено не на изучение индивидуальных свойств характеристик, а на исследование *статистических свойств целого семейства характеристик*. Такой подход реализуется, конечно, не только при применении и исследовании уравнений механики.

Дальнейшее исследование теоремы Пуанкаре связано с выяснением следующего вопроса: какую долю времени своего движения изображающая точка находится в области α? Аналогичный вопрос возникает и тогда, когда мы имеем дело с дискретными моментами $n\tau$. Тогда спрашивается, какая часть этих моментов характеризуется попаданием изображающей точки в область α? Ответ на эти и аналогичные вопросы дается так называемыми *эргодическими теоремами*. Они восходят к трудам Л. Больцмана[75]; впервые эргодическая теорема была доказана Дж.Д. Биркгофом[76]. Несколько более слабый результат незадолго до него был установлен фон Нейманом[77]. Строгое доказательство принадлежит также А.Н. Колмогорову[78].

---

[74] Простое доказательство этой теоремы Пуанкаре см.: *Парс Л.А.* Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. С. 439–441.

[75] *Больцман Л.* Избранные труды. М.: Наука, 1984.

[76] *Bierkhof G.D.* // Proc. Nat. Acad. Sci. 1931. Vol. 17. P. 656.

[77] *Neumann J. von* // Ztschr. Phys. 1929. Bd. 57. S. 30; *Нейман И. фон.* Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964. С. 325–356.

[78] *Колмогоров А.Н.* // ДАН СССР. 1959. Т. 98. С. 527; *Песин Я.Б.* // УМН. 1977. Т. 32. С. 55.

Оригинальное доказательство для случая, когда усреднение производится по дискретным значениям t, дано Ф. Риссом[79]. Анализ и рассмотрение этой важнейшей проблемы выходят далеко за пределы темы настоящей статьи.

Канонические преобразования

Как мы видели, геометрическая оптика Гамильтона в частной форме, применимой для изотропного пространства, послужила исходным пунктом для его динамики. В ней эквивалентны корпускулярный и волновой подходы к описанию траектории динамической системы или распространения луча[80] как нормали к поверхности некоторой волны. Поэтому уже сам Гамильтон использовал построение Гюйгенса, которое представляет собой не что иное, как некоторое преобразование (по существу касательное), которое устанавливает соответствие между точками и касательными элементами в этих точках двух волновых поверхностей. Это значит, что исходный пункт динамики Гамильтона представляет собой рассмотрение движения как некоторого преобразования.

Мы уже выше обращали внимание на аналогию гамильтоновой оптики и механики с принципом Гюйгенса. Здесь уместно отметить, в чем состоит ограниченность этой аналогии[81].

Для механики основной группой преобразований являются канонические преобразования.

В 1837 г. Якоби[82] доказал следующую теорему относительно уравнений Гамиль-

---

[79] *Riesz F.* // Communs math. helv. 1945. Vol. 17. P. 221.

[80] Термин "траектория" связывает математическое понятие с физическими понятиями динамики. Слово "луч" связывает его с оптикой, так что с первого взгляда ему нет места в динамике. Однако волновая механика де Бройля и Шредингера уничтожила барьер между динамикой и оптикой. Если в динамике нам нужно слово "волна", то слово "луч" естественно сопровождает его. Изложение общей динамической теории обычно столь же обязано методу Гамильтона в оптике, сколько и его методу в динамике, так как, в то время как в его оптике все координаты равноправны, в его динамике t было на особом положении.

[81] Сопоставим контактное преобразование в динамике с простым геометрическим построением Гюйгенса, которое можно рассматривать как такое преобразование. Тогда его общее аналитическое выражение должно позволить обобщить результаты, полученные для конечных систем, на динамические системы с бесконечным числом степеней свободы.

На самом деле идеи Гюйгенса не развивались в этом направлении. Причина состоит в том, что в практических применениях принципа Гюйгенса излучение – возмущение среды, которую для удобства изложения можно кратко назвать "эфиром", – в общем происходит из источников.

Эти источники с точки зрения динамики суть сингулярности, в которых энергия вводится в эфир; наличие этих сингулярностей препятствует нам развить принцип Гюйгенса таким способом, который был бы естественным, если бы мы имели дело с замкнутой консервативной динамической системой. В частности, решение динамической проблемы с конечным числом степеней свободы есть решение, имеющее смысл для всех значений t, как последующих, так и предшествующих времени t_0, в то время как в проблеме излучения мы не можем проследить излучение назад за момент его выхода из источника. Формулы, полезные для практического применения принципа Гюйгенса, будут, вообще говоря, применимы только к времени t, следующему за некоторым начальным временем t_0; результаты, полученные подстановкой t, меньшего, чем t_0, не имеют никакого отношения к каким-либо реальным явлениям.

[82] *Jakobi K.* // C.r. Acad. sci. Paris, 1837. P. 61.

тона: эти уравнения при канонических преобразованиях сохраняют свою форму[83], а общую теорию групп касательных преобразований, которые в механике выступают как канонические[84], дал в 1877 г. Софус Ли. Группу преобразований можно определить либо посредством бесконечно малых преобразований, либо посредством инвариантов этой группы. Первый способ, в котором задаются бесконечно малые изменения канонических переменных при бесконечно малом каноническом преобразовании, выражен уравнениями Гамильтона, второй – инвариантностью действия.

Так как новые переменные Q_i, P_i канонические, то они должны удовлетворять принципу Гамильтона, т.е.

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}[\Sigma P_i\dot{Q}_i - \tilde{H}(Q,P,t)]dt = 0, \tag{39}$$

в то время как для старых переменных

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}[\Sigma p_i\dot{q}_i - H(q,p,t)]dt = 0. \tag{40}$$

Оба соотношения должны выполняться одновременно. Отсюда следует, что подынтегральные функции могут отличаться не больше чем на полную производную по времени некоторой функции F.

Если под интегралом принципа Гамильтона прибавить еще полную производную любой функции вида $F = F(q, Q, t)$, то ничего не изменится, так как очевидно, что

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} dF(q,Q,t) = \delta F\Big|_{t_1}^{t_2} = 0, \tag{41}$$

потому что на границах интегрирования все δq и δQ равны нулю. Общее каноническое преобразование удовлетворяет соотношению

$$\sum_k p_k dq_k - Hdt = \sum_k P_k dQ_k - Hdt - dF. \tag{42}$$

Приведем таблицу, в которой для четырех главных форм производящей функции F выписаны уравнения преобразования (в предположении, что между переменными, от которых зависит функция F, нет соотношения вида $\varphi_r(\alpha_i, \beta_i) = 0$):

$F = F(q_i, Q_i, t)$	$F = F(q_i, P_i, t)$	$F = F(p_i, Q_i, t)$	$F = F(p_i, P_i, t)$
$p_i = \dfrac{\partial F}{\partial q_i}$	$p_i = \dfrac{\partial F}{\partial q_i}$	$q_i = -\dfrac{\partial F}{\partial p_i}$	$q_i = -\dfrac{\partial F}{\partial p_i}$
$P_i = -\dfrac{\partial F}{\partial Q_i}$	$Q_i = \dfrac{\partial F}{\partial P_i}$	$P_i = -\dfrac{\partial F}{\partial Q_i}$	$Q_i = \dfrac{\partial F}{\partial P_i}$
$H = \tilde{H} - \dfrac{\partial F}{\partial t}$	$H = \tilde{H} - \dfrac{\partial F}{\partial t}$	$H = \tilde{H} - \dfrac{\partial F}{\partial t}$	$H = \tilde{H} - \dfrac{\partial F}{\partial t}$.

[83] Канонические преобразования сохраняют вид уравнений Гамильтона; один первый интеграл уравнений Гамильтона позволяет понизить порядок системы сразу на две единицы; движение в лагранжевой натуральной системе происходит по геодезической конфигурационного пространства, имеющего некоторую риманову метрику.

[84] *Lie S.* Gesammelte Abhandlungen. Leipzig, 1922. Bd. 3. S. 49.

В зависимости от выбора функции преобразования F [85]

$$F = F(q_i, Q_i, t), \quad F = F(q_i, P_i, t), \quad F = F(p_i, Q_i, t), \quad F = F(p_i, P_i, t)$$

получаем одну из четырех форм канонического преобразования. Из них особенно часто пользуются второй и реже – первой. Третья форма совершенно эквивалентна второй, так как понятия "старые" и "новые" координаты и импульсы относительны, а функции $F(p_i, Q_i, t)$ и $F(q_i, P_i, t)$ отличаются друг от друга лишь наименованием "старых" и "новых" координат и импульсов.

Производящая функция канонического преобразования может быть чисто математической величиной, гамильтонова же главная функция S, которая является производящей, тесно связана с вариационным интегралом. Эта функция имеет поразительную геометрическую интерпретацию: она определяет расстояние между двумя точками в соответственно определенной метрической геометрии, выраженное как функция координат этих точек. Главная функция есть производящая функция того частного вида канонического преобразования, которое непосредственно без участия каких-либо промежуточных внешних точек связывает два состояния "фазового флюида", соответствующие двум различным моментам времени.

Перейдем теперь к таким каноническим преобразованиям, для которых новые обобщенные координаты и импульсы отличаются от прежних только на бесконечно малые величины, т.е.

$$Q_r = q_r + \lambda g_r, \qquad P_r = p_r + \lambda h_r,$$

где λ – бесконечно малая постоянная.

Легко показать, что если

$$\sum({}_h r dq_r - g_r dp_r) = -dK,$$

то

$$g_r = \partial K / \partial p_r, \qquad h_r = -\partial K / \partial q_r,$$

Таким образом, "*весь процесс движения можно рассматривать как постепенное развертывание контактного преобразования*"[86].

Сочетание представления о механическом движении как о некотором преобразовании с теоретико-групповой точки зрения Софуса Ли и вариационного принципа Гамильтона позволяет существенно углубить и обогатить картину движения, связав в таком подходе свойства пространства и времени с законами сохранения, выходящими далеко за рамки классической механики. Для этого оказалось необходимым привлечь важнейшее понятие инвариантов непрерывных групп преобразований. Это сделано в знаменитой работе Э. Нётер [ВПМ. С. 611–630]. Мы здесь лишь кратко перечислим основные этапы, предшествующие формулировке и доказательству этой теоремы.

Еще в 1851 г. Сильвестр впервые ввел понятие об инвариантах алгебраических форм. В 1872 г. Ф. Клейн в так называемой Эрлангенской программе "Сравнитель-

---

[85] Такая функция F называется производящей функцией данного преобразования. Задание этой функции однозначно определяет уравнения преобразования.

[86] *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.: ГТТИ, 1937. С. 335–336; см. также: *Nordheim L.* Die Principie der Dynamik // Handbuch der Physik. 1927. Bd. 5. S. 439.

ное обозрение новейших геометрических исследований" сформулировал принцип, что каждая геометрия многообразия задается системой инвариантов относительно некоторой группы преобразований.

В 70-х годах XIX в. С.Ли установил связь между интегралами дифференциальных уравнений и инвариантами непрерывных групп [ВПМ. С. 404–424]. Отсюда вытекает возможность интерпретации механики в терминах непрерывной группы преобразований и ее инвариантов. Основываясь на объединении вариационного исчисления и методов теории групп Ли, Э. Нётер в 1918 г. развила алгоритм, позволяющий найти систему инвариантов любой физической теории, формулируемой при помощи лагранжева или гамильтонова формализма [ВПМ. С. 612].

Теорема Нётер гласит, что всякому непрерывному преобразованию координат, обращающему в нуль вариацию действия, при котором задан также закон преобразования поля, соответствует определенный инвариант, т.е. сохраняющаяся комбинация функций поля и их производных[87]. Так, инвариантности лагранжевой функции относительно смещения начала отсчета в пространстве (однородности пространства) соответствует закон сохранения импульса; инвариантности лагранжевой функции относительно смещения начала отсчета времени (однородности времени) соответствует закон сохранения энергии; инвариантности ее относительно пространственных поворотов (изотропности пространства) соответствует закон сохранения момента импульса; инвариантность относительно преобразований Лоренца, т.е. вращения в плоскостях (x, t), (y, t), (z, t), приводит к обобщенному закону сохранения движения центра масс. Таким образом, в четырехмерном пространстве-времени имеем всего десять фундаментальных законов сохранения. Собственно говоря, физический смысл принципа Гамильтона глубже всего выражается теоремой Нётер.

Подводя итоги, можно сказать, что вариационные принципы механики и связанная с ними механика Гамильтона в целом не только выражают в инвариантной форме уравнения движения макроскопических систем, но и заключают в себе синтез дискретного и континуального аспектов (волна-частица) движения и являются выражением обобщенного принципа причинности в закономерностях эволюции физических систем.

История применений механики Гамильтона практически охватывает все разделы теоретической физики, механики, астрономии. В рамках настоящей статьи невозможно изложить даже основные проблемы, связанные с этими применениями. За многими подробностями мы отсылаем читателя к книге [ЛП] и многочисленным книгам по основам теоретической физики, классической механики, вариационному исчислению и т.п.

ТЕОРИЯ КВАТЕРНИОНОВ

16 октября 1843 г. Гамильтон установил фундаментальную теорему умножения кватернионов, лежащую в основе некоммутативных алгебр, а в ноябре 1843 г. он прочитал об этом открытии доклад в Ирландской академии. Вот как сам Гамильтон описывает это открытие:

---

[87] *Визгин В.П.* Развитие взаимосвязи принципов инвариантности с законами сохранения в классической физике. М.: Наука, 1972. 240 с.

"Дорогой Арчибальд, 1) я желал бы при удобном случае поговорить с тобой о кватернионах; такой случай сейчас представился благодаря твоему упоминанию во вчерашней записке, полученной мною сегодня утром, что ты размышлял о нескольких пунктах, связанных с ними [кватернионами. – *Л.П.*], особенно об умножении векторов.

2) Во всей теории кватернионов нет важнее и фундаментальнее вопроса, чем этот, – что представляет собой умножение? Каковы его правила, объекты и результаты? Какие аналоги существуют между ним и другими действиями, получившими одно общее название? И наконец, каково его (если таковое возможно) применение?

3) Если попутно с этим предметом мне позволят говорить о себе, то я сделаю это таким образом, что привлеку и тебя, коснувшись "дочетвертичного периода", когда ты, будучи ребенком, уже перенял от меня идею вектора, представленную тройками (triplets); случайно я запомнил год и месяц – октябрь 1843 г., когда вскоре по возвращении из Корка и Парсонстауна, куда я ездил в связи с заседаниями Британской ассоциации, желание открыть законы умножения вновь возникло во мне с силой и страстностью, желание, дремавшее в течение многих лет, хотя и в те годы почти удовлетворенное и обсуждавшееся с тобой лишь время от времени.

Каждое утро в начале указанного месяца твой (тогда) маленький братец Вильям Эдвин и ты имели обыкновение за завтраком спрашивать меня: "Ну, папа, можешь ли ты умножать триплеты?" И я всегда был принужден отвечать, печально качая головой: "Нет, я могу производить над ними лишь действия сложения и вычитания".

4) Но 16 числа того же месяца, оказавшегося понедельником и днем совещания Королевской ирландской академии, когда я шел в академию, чтобы председательствовать, по набережной Королевского канала в сопровождении твоей матери, которую, вероятно, подвезли сюда, то, несмотря на ее разговор со мною, мои мысли так четко работали в подсознании, что дали, наконец, результат, важность которого я тотчас же ощутил. Казалось, замкнулась электрическая цепь и вспыхнула искра, пришел вестник (как я моментально почувствовал) плодов многих долгих лет неуклонно направленной работы мысли во мне, который станет достоянием других, если мне доведется жить достаточно долго, чтобы в точных выражениях сообщить открытие. Я не смог подавить импульса – не философского в сущности – вырезать на камне Бругамского моста, мимо которого мы проходили, основную формулу со знаками i, j, k, именно $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, которая содержит решение проблемы[88], но, конечно, как надпись она давно уже стерлась. Более прочный след, однако, сохранился в книгах совещаний за это число (16 октября 1843 г.) в виде замечания, регистрирующего факт, что я тогда попросил и получил разрешение прочитать доклад о кватернионах на первом общем заседании сессии; чтение имело место в понедельник 13 следующего ноября. Этими четырьмя пунктами заканчиваю свое первое письмо, но надеюсь в скором времени написать второе.

Твой любящий отец *У.Р. Гамильтон*"[89]

---

[88] Несколько лет спустя после 1843 г. на мосту через канал, на месте, где Гамильтон пережил своё внезапное озарение, была установлена памятная надпись.

[89] Письмо Арчибальду Х. Гамильтону от 5.VIII 1865 [Gr. 2].

Теория кватернионов с единицами 1, i, j, k объединила два исторически развивавшиеся независимо направления: исследования алгоритма алгебры и "геометрические исчисления". Многосторонняя разработка теории кватернионов (сам термин также введен Гамильтоном) у Гамильтона охватывала: 1) аксиоматическое построение теории функций комплексного переменного; 2) принцип перманентности; 3) исчисление с векторами, характеризующееся развитым символическим аппаратом (понятие оператора $\nabla = \frac{d}{dx}i + \frac{d}{dy}j + \frac{d}{dz}k$ и на его основе понятия градиента, векторной функции скалярного аргумента, годографа и т.д.).

Теории кватернионов, которую сам Гамильтон рассматривал как "универсальную математику, он посвятил 109 работ и две большие книги. Огромные тома "Лекций о кватернионах" и "Элементов кватернионов" – нелегкое чтение. В рецензии на третий том Грэйвса анонимный рецензент журнала "Nature"[90] не без остроумия заметил: "Многие математики хотели бы видеть эти большие тома на своих полках, но они же в общем предпочитали, чтобы они оставались там". Теория кватернионов не заменила собой всю математику, а тем более и физику, как о том мечтал Гамильтон. Тем не менее она оказала большое и принципиальное влияние на развитие математики и физики. Она стимулировала исследования по важнейшим направлениям: 1) теории гиперкомплексных чисел и ассоциативных алгебр; 2) линейной алгебре; 3) векторному анализу; 4) теории электромагнитного поля. Настоящей трагедией Гамильтона была не неудачная женитьба, не алкоголь, а упорная вера в то, что кватернионы представляют собой ключ к математике физической вселенной. Он заблуждался, как мы это ясно видим сейчас, более чем через 120 лет после его смерти, когда настаивал: "Я должен утверждать, что это открытие [кватернионы. – *Л.С.*] кажется мне столь же важным для середины XIX в., каким открытие (исчисления) флюксий было для конца XVII в." Никогда ни один великий математик не был столь безнадежно неправ. Работы Гамильтона, посвященные созданию и разработке теории кватернионов, место этих работ в развитии теории гиперкомплексных чисел, векторной алгебры и векторного анализа, влияние их на развитие математической физики освещены в следующей статье настоящего издания.

НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ НАУЧНЫЕ РАБОТЫ

Перечислим кратко другие заслуживающие упоминания результаты, полученные Гамильтоном.

1. В записной книжке № 53 (1839) появляется разложение по функциям, получившим наименование бесселевых [H. 2. P. 509]. Общий член асимптотического разложения по бесселевым функциям был впервые введен Гамильтоном без доказательства[91].

Формула общего члена разложения в ряд так называемых бесселевых функций в явном виде была впервые дана Гамильтоном[92].

---

[90] Nature. 1889. Vol. 40. P. 614.

[91] *Hamilton W.R.* // Trans. Roy. Irish Acad. 1843. Vol. 19. P. 313.

[92] *Hamilton W.R.* // Philos. Mag. 1857. Vol. 14. P. 375; см. также: *Watson G.N.* Treatise on the theory of Bessel functions. 2nd ed. Cambridge: Univ. press. P. 12, 195, 655.



Бюст Гамильтона

Как известно, Пуассон только указал на закон образования последовательных членов этих рядов, не дав явного выражения общего члена; оно было получено Гамильтоном.

Гамильтон также подсчитал $J_0(40)$ исходя из сходимости этих рядов.

2. В записной книжке № 53 (1839) Гамильтон вводит оператор, получивший впоследствии наименование оператора Хевисайда [Н. 2. Р. 542][93].

3. "Флуктуирующая функция", которая была введена и подробно рассмотрена Гамильтоном[94], впервые намечена им в записной книжке № 52 (1839), которая опубликована [Н. 2. Р. 451–526].

---

[93] См. также: *Jeffreys F.* Operational methods in mathematical physics. London, 1927; *Poole J.* Theory of linear differential equations. 1936. Ch. 2.

[94] *Hamilton W.R.* // Trans. Roy Irish Acad. 1843. Vol. 19. P. 264–321.

В ней появляется "принцип флуктуации" (principle of fluctuation) Гамильтона, который он через четыре года разовьет в теорию флуктуирующей функции (fluctuating function). Вот как звучит первое упоминание Гамильтоном этого принципа: "В предшествующих исследованиях мы открыто или молчаливо использовали принцип, состоящий в том, что если какое-либо число действительных переменных умножается на синус или косинус бесконечно большого кратного числа этой переменной и интегрируется в каких-либо конечных пределах (или даже в большей части случаев в пределах от минус до плюс бесконечности), то результат стремится к нулю; и впоследствии, если функция не постоянно конечна, мы должны следить только за теми значениями переменной, которые бесконечно мало отличаются от тех *n* значений, которые делают функцию бесконечной" [H. 2. P. 520]. Из этого ясно, что флуктуирующая функция Гамильтона не имеет сколько-нибудь близкого отношения к современному физическому понятию флуктуаций.

4. В 1846 г. Гамильтон разработал понятие годографа[95] и сформулировал относящуюся к нему теорему. Хотя элементарные свойства годографа могут быть доказаны простыми геометрическими аргументами, Гамильтон не привел ни одного графика, что крайне затрудняет понимание его изложения.

5. В 1856 г. Гамильтон открыл новое "исчисление", основанное на отношении сторон икосаэдра. Исходя из этого, он назвал его *исчислением икосаэдров*, хотя оно и не зависит от геометрических свойств икосаэдра, как это подразумевается названием.

На самом деле это есть изучение области, которую теперь называют теорией граф, область, которая не существовала как таковая в XIX в. Тем не менее подобные проблемы не были совершенной новостью во времена Гамильтона; проблемы такого типа исследовались Лейбницем, Эйлером, Вандермондом, Пуансо и другими, но исчисление икосаэдров Гамильтона привлекло большое внимание к этой области[96].

Гамильтон, кроме того, написал много стихотворений (он примыкал по духу своей лирики к так называемой Озерной школе английского романтизма). В эволюции человеческого познания труды Гамильтона сделали его имя бессмертным.

---

[95] *Hamilton W.R.* The hodograph, of a new method of expressing in symbolical language the Newtonian law of attraction [H. 2. P. 287–292]; On a theorem of hodographic isochronism [H. 2. P. 293]; On a theorem of anthodographic isochronism [H. 2. P. 293–294].

[96] *Biggs N.L., Lloyd E.K., Wilson R.J.* Graph theory 1736–1936. Oxford: Clar. press, 1976; *Colthurst J.R.* // Proc. Roy. Irish Acad. A. 1945. Vol. 50. P. 112–121; *Ore O.* // Amer. Math. Month. 1960. Vol. 67. P. 55.

Н.В. АЛЕКСАНДРОВА

ИСЧИСЛЕНИЕ КВАТЕРНИОНОВ ГАМИЛЬТОНА

ОТКРЫТИЕ КВАТЕРНИОНОВ КАК ОБОБЩЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

В начале XIX в. в работах нескольких ученых (об этом пишет Гамильтон в "Предисловии к Лекциям о кватернионах") появилась геометрическая интерпретация комплексных чисел и операций с направленными отрезками *плоскости*. И сразу же начались естественные для математиков поиски гиперкомплексных чисел, которые изображались бы точками трехмерного пространства. Начались в 1796–1806 гг., когда и функций-то комплексной переменной еще не было, когда еще не родились Вейерштрасс и Риман, когда еще не было ни публикаций Коши, ни рецензий на них: "выдумки Коши – вздор, способный запутать умы..."; "...оставим в стороне формулы метафизического происхождения, изобретателем которых был Коши и которые никто и никогда не будет употреблять..."

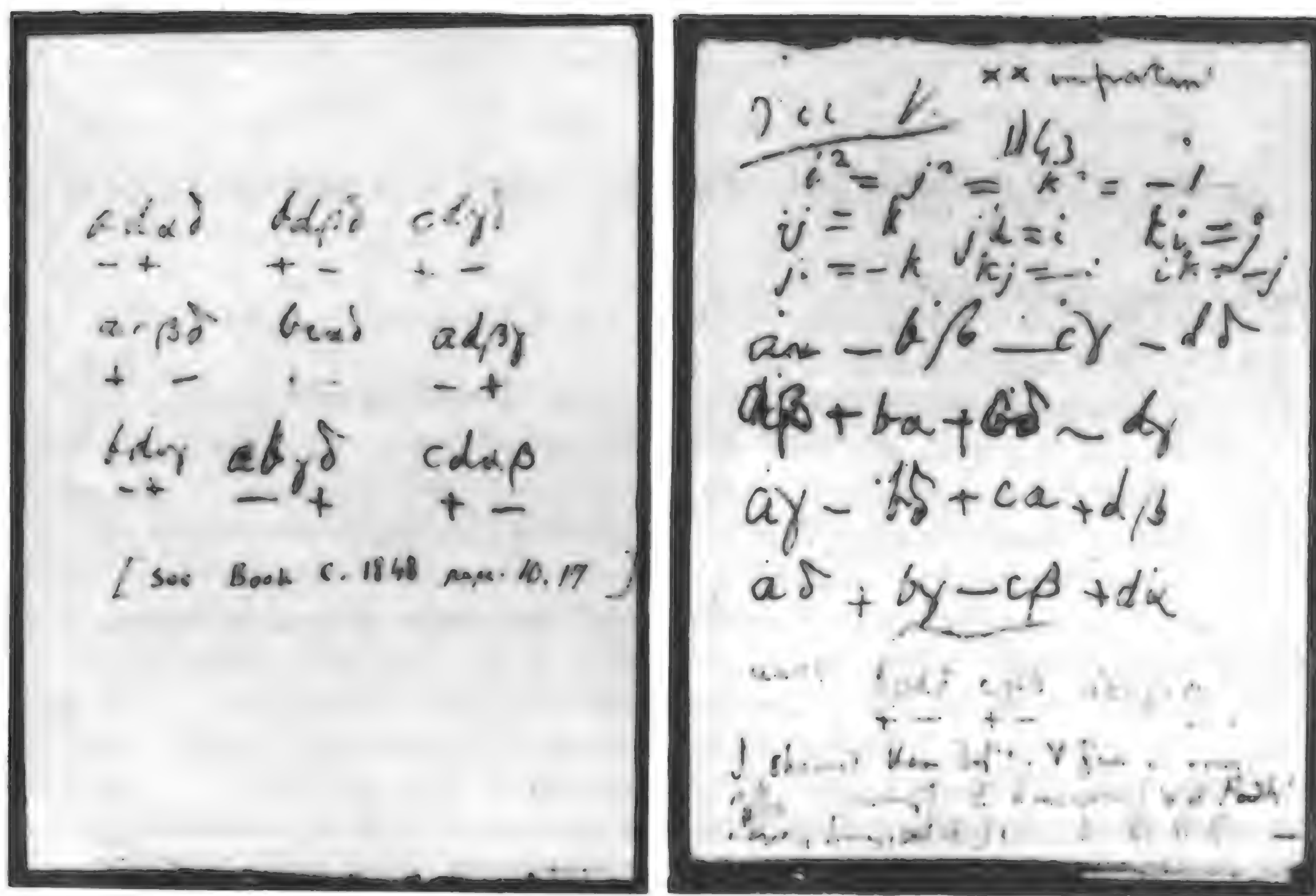
Об этих попытках ученых разных стран, о том, что именно было достигнуто к 1830 г. – к началу исследований Гамильтона – и что из этого ему было известно, об истории своего открытия Гамильтон подробно и доверительно рассказывает в "Предисловии" (1853); он не ведет читателя логически прямым путем, а заводит его в те же тупики, в которые попадал и сам, и достигает, как кажется, прямо-таки драматического эффекта.

Несмотря на то что Гамильтон не имел "претензии писать историю науки, и даже – одного раздела математических рассуждений", в "Предисловии" приведен не только "отчет о развитии... собственных мыслей", но и почти исчерпывающий обзор всех работ по комплексным и гиперкомплексным числам. Гамильтону не были известны только две, но самые важные работы: он не знал о статье К. Весселя (1745–1818) и не мог знать о размышлениях К. Гаусса о "мутациях пространства".

Статья неизвестного математикам норвежского землемера "Об опыте аналитического представления направления..." (1797) была опубликована в 1799 г., но стала известной математическому миру лишь век спустя, когда ее "открыли" и вновь опубликовали в 1899 г. Подробный анализ работы Весселя содержится в статье Ф.Д. Крамара "Векторное исчисление конца XVIII и начала XIX вв."[1]. Рассуждения Весселя с незначительными вариациями повторили в 1835–1836 гг. и Гамильтон, и Дж.Т.Грэйвс (об этом см. в п. 37–40 "Предисловия" в наст. изд.).

В записных книжках Гаусса есть две серии записей, относящихся, как полагают, к 1819 г. (опубликованы в "Werke" Гаусса в 1900 г.). Гаусс рассматривал задачу преобразования (мутации) пространства с точки зрения, родственной подходу Га-

[1] Историко-математические исследования. 1963. Вып. 18. С. 225–280.



Записная книжка, в которой Гамильтон впервые записал основные формулы умножения кватернионов

мильтона: формулы Гаусса только обозначениями отличаются от соответствующих формул Гамильтона. Принципиальная часть работы им выполнена, но до создания *исчисления* дело просто не дошло.

Десятилетние попытки Гамильтона развить теорию "триплетов" завершились открытием кватернионов. Гамильтон немедленно начал публикацию своих открытий – это серии сообщений "О кватернионах, или о новой системе мнимых в алгебре" в "Philosophical Magazine" (1844–1850) и "О символической геометрии" в "Cambridge and Dublin Mathematical Journal" (1846–1849). Обе эти серии (одна из 18, другая из 10 сообщений) не были окончены, хотя в обеих обещано: "Продолжение следует". Публикации доставляют поучительную картину формирования понятий, развития методов, поисков поля приложений, выработки языка, "стиля" теории... Видно, как постепенно понятия становятся привычными автору и он уже забывает приводить подробные объяснения, как это делал вначале. Много раз Гамильтон пишет: "линии имеют точно то же направление или точно противоположное...", прежде чем вводит, наконец, термин "коллинеарные линии".

Мы обрываем серию "О кватернионах..." раньше, чем она окончилась в "Philosophical Magazine" (окончив пунктом, где введен символический вектор ∇), но и эти страницы дают живое представление о биении мысли ученого и о том, как он предполагал включить всю математику, все дисциплины в свою теорию, объединяющую алгебру и геометрию, – науку о "чистом времени" и науку о пространстве.

Кватернион построен по образу и подобию "обыкновенных мнимых": для обозначения "следующих" мнимых единиц были введены следующие за i буквы алфавита j, k, при этом $j^2 = k^2 = -1$. Кроме того, Гамильтон обозначил векторные величины греческими буквами, а скалярные – латинскими, чтобы с первого взгляда различать мнимые и действительные величины (впоследствии он стал называть их "векторные и скалярные"). Различные представления кватерниона подобны различным формам комплексного числа: форме $x + iy$ соответствует $w + ix + jy + jz = \mathrm{S}q + \mathrm{V}q$; аналогом тригонометрической формы $\cos\varphi + i\sin\varphi$ является $\cos\theta + \alpha\sin\theta$ (где α – вектор оси вращения, а 2θ – угол, на который поворачивается вектор ρ вокруг оси α); наконец, показательной форме $re^{i\varphi}$ аналогично представление $\mathrm{T}q.\,\mathrm{U}q$.

Набор кватернионных тождеств возрастал со скоростью лавины, использование их и создало те специфические методы, свойственные теории кватернионов, о которых Ф. Клейн писал: "Легкость и изящество, с которыми получаются на этом пути глубоко содержательные теоремы, действительно изумительны; этим и объясняется восхищение кватернионистов своей системой, которая... вскоре была ими расширена за разумные границы в ущерб не только для математики в целом, но и для самой теории кватернионов. Такому развитию способствовал и высокоразвитый формальный аппарат системы, богато питаемый символикой обозначений, внушавшей глубокое уважение, доходившее до благоговения. Возникло много больших надежд на дальнейшее систематическое развитие теории кватернионов, наподобие теории обыкновенных чисел... Крайней целью было создание... теории функций для кватернионов, от которой ожидали совершенно новых, необычайно широких результатов для всей математики"[2].

Приведем пример самого распространенного приема рассуждений: произведение двух векторов составлено, вообще говоря, из скалярной и векторной частей: $\alpha\beta = \mathrm{S}.\alpha\beta + \mathrm{V}.\alpha\beta$. Если умножить это произведение на третий вектор γ, то $(\mathrm{S}.\alpha\beta)\gamma$ – вектор, а $(\mathrm{V}.\alpha\beta)\gamma$ снова имеет скалярную и векторную части. Таким образом,

$$\mathrm{S}(\alpha\beta\gamma) = \mathrm{S}(\mathrm{V}.\alpha\beta)\gamma.$$

Мы видим первое определение векторно-скалярного произведения и цепочку чрезвычайно употребительных тождеств:

$$\mathrm{S}.\alpha\beta\gamma = \mathrm{S}.\beta\gamma\alpha = \mathrm{S}.\gamma\alpha\beta = \mathrm{S}(\mathrm{V}.\beta\gamma)\alpha = \mathrm{S}(\mathrm{V}.\gamma\alpha)\beta = \mathrm{S}(\mathrm{V}.\alpha\beta)\gamma.$$

Характерная черта теории кватернионов – использование вспомогательных операторов и векторов (см. примеры в работе "О кватернионах", п. 24, 25).

Последние двадцать лет жизни Гамильтон отдал развитию теории кватернионов, им написаны 109 статей и две книги "Lectures on quaternions" (1853) и "Elements of quaternions" (опубл. 1866). С 1857 г. начинается плодотворная переписка между Гамильтоном и шотландским физиком П.Г. Тэтом (1831–1901). В статьях (свыше 70) и в четырех книгах по теории кватернионов Тэт развил приложения теории к геометрии и физике, вместе с Гамильтоном он создал методы и приемы изложения и доказательств и, будучи блестящим лектором, изложил в систематической форме

---

[2] *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.; Л.: ОНТИ, 1937. С. 227–229.

теорию кватернионов, чего так не хватало книгам Гамильтона. Тэт стал подлинным преемником Гамильтона и признанным главой школы после его смерти.

В рамках теории кватернионов было развито исчисление с векторными величинами. Из приведенных отрывков видно, что методы теории кватернионов не вошли в современное векторное исчисление[3]. Понятия же претерпели в основном два изменения. Произведение двух векторов в теории кватернионов является, вообще говоря, кватернионом:

$$(x_1 i + y_1 j + z_1 k)(x_2 i + y_2 j + z_2 k) = -(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) +$$
$$+ i(y_1 z_2 - y_2 z_1) + j(x_2 z_1 - x_1 z_2) + k(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Это полное произведение в векторном анализе 1) разбито на два – скалярное и векторное и 2) скалярное произведение отличается знаком от $S.\alpha\beta$ – скалярной части произведения $\alpha\beta$.

Алгебра кватернионов отличается от обычной алгебры только некоммутативностью произведения: по любым двум элементам произведения определяется третий и произведение обращается в нуль, только если один из сомножителей равен нулю. В современной векторной алгебре операции над векторами не носят алгебраического характера и произведение может обращаться в нуль при неравных нулю множителях.

Гамильтон определил вектор как "перенос". Его символ i означает, во-первых, единичный вектор оси Ox, во-вторых, мнимую единицу и, наконец, в-третьих, оператор вращения – верзор. Когда Гамильтон восклицает: "Наконец, искомый закон операции умножения найден", – это относится к комплексным единицам. Для оператора поворота i_R этот результат будет получен отдельно ("О кватернионах", п. 7).

Изучение функций кватернионов Гамильтон начинает с рассмотрения частных случаев: 1) аргумент – скалярная величина, функция – векторная; 2) и аргумент, и функция – векторы; 3) аргумент – вектор, функция – скаляр; наконец, частным же случаем теории кватернионов, четвертым, является алгебра и математический анализ, когда и аргумент, и функция – скалярные величины.

1. Теория векторной функции скалярного аргумента развита Гамильтоном в 1846 г. Гамильтон ввел понятие годографа и применил теорию к задачам небесной механики[4], легко и красиво были получены результаты, которые отчасти уже были известны Ламберту и Мёбиусу (как это выяснилось позднее). В "Лекциях о кватернионах" раздел, посвященный векторной функции скалярного аргумента, был изложен очень сжато, без каких-либо доказательств и пояснений, вероятно, потому

---

[3] Будем говорить "векторный анализ", чтобы отличить современное векторное исчисление от векторного исчисления теории кватернионов. Это название употребляли его создатели – Гиббс и Хевисайд.

[4] Путь движущейся точки Гамильтон называл "орбитой"; кривая, которую описывает конец вектора скорости точки, если эти векторы перенесены в некоторое начало, была названа "годографом". Наиболее красивая теорема, доказанная Гамильтоном, состоит в том, что в случае движения по орбите под действием центральной силы, подчиненной закону Ньютона, годограф всегда является окружностью.

LECTURES

ON

QUATERNIONS:

CONTAINING A SYSTEMATIC STATEMENT

OF

A New Mathematical Method;

OF WHICH THE PRINCIPLES WERE COMMUNICATED IN 1843 TO

THE ROYAL IRISH ACADEMY;

AND WHICH HAS SINCE FORMED THE SUBJECT SUCCESSIVE COURSES OF LECTURES DELIVERED IN 1848 AND SUBSEQUENT YEARS

IN

THE HALLS OF TRINITY COLLEGE, DUBLIN:

WITH NUMEROUS ILLUSTRATIVE DIAGRAMS, AND WITH SOME GEOMETRICAL AND PHYSICAL APPLICATIONS.

BY

SIR WILLIAM ROWAN HAMILTON, LL. D., M. R. I. A.,

FELLOW OF THE AMERICAN SOCIETY OF ARTS AND SCIENCES;
OF THE SOCIETY OF ARTS FOR SCOTLAND; OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY OF LONDON; AND OF THE ROYAL NORTHERN SOCIETY OF ANTIQUARIES AT COPENHAGEN;
CORRESPONDING MEMBER OF THE INSTITUTE OF FRANCE; HONORARY OR CORRESPONDING MEMBER OF THE IMPERIAL OR ROYAL ACADEMIES OF ST. PETERSBURGH, BERLIN, AND TURIN;
OF THE ROYAL SOCIETIES OF EDINBURGH AND DUBLIN; OF THE CAMBRIDGE PHILOSOPHICAL SOCIETY;
THE NEW YORK HISTORICAL SOCIETY; THE SOCIETY OF NATURAL SCIENCES AT LAUSANNE; AND OF OTHER SCIENTIFIC SOCIETIES IN BRITISH AND FOREIGN COUNTRIES;
ANDREWS' PROFESSOR OF ASTRONOMY IN THE UNIVERSITY OF DUBLIN AND ROYAL ASTRONOMER OF IRELAND



DUBLIN:
HODGES AND SMITH, GRAFTON-STREET,
BOOKSELLERS TO THE UNIVERSITY.
LONDON. WHITTAKER & CO., AVE-MARIA LANE.
CAMBRIDGE: MACMILLAN & CO.
1853.

Титульный лист "Лекций о кватернионах"

что материал был известен из аналитической геометрии и теоретической механики. Эта теория приобрела "современный" вид после того, как Тэт ее изложил с некоторыми объяснениями и чертежами.

Введя векторную функцию двух скалярных аргументов, Гамильтон развил и теорию поверхностей.

В этих исследованиях (1846) появилась и другая векторная функция скалярных аргументов ∇u вместе с "новой характеристикой операции – символом, определенным формулой $\nabla = \frac{id}{dx} + \frac{jd}{dy} + \frac{kd}{dz}$". Вначале Гамильтон использовал обозначение ∇, затем "положенную на бок" букву дельта; после работ Тэта окончательно принят знак ∇.

В первых публикациях Гамильтон объясняет, как оперировать с символом ∇[5]. Его "доказательства" выглядят как набор мнемонических правил, хотя через 40 лет во время дискуссии о преимуществах и недостатках теории кватернионов и векторного анализа предложение принять вектор ∇ для облегчения запоминания формул вызвало резкие протесты кватернионистов – они рассматривали ∇ как "реальный вектор"[6].

За семь лет, прошедших между публикацией первой статьи и книги "Лекции о кватернионах", Гамильтон не расширил по объему, не изменил по стилю изложение этого материала и только исправил запись

$$-\lhd^2 = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d}{dz}\right)^2 \quad \text{на} \quad -\lhd^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}.$$

Предвидя "чрезвычайную важность оператора", Гамильтон посвятил ему в 1853 г. две страницы, которые выглядят как "заявка": "Поверхностного обзора этих формул достаточно, чтобы убедить любого, кто хотя бы слегка знаком (а я не претендую на хорошую осведомленность) с современными исследованиями в *аналитической физике* по тяготению, электричеству, магнетизму и т.д., что уравнения этого раздела (как я намекнул выше) должны стать широко полезными в изучении природы, когда исчисление кватернионов привлечет больше внимания, чем до сих пор, и им как инструментом исследования овладеют руки, более искусные, чем мои..."[7].

Необычность методов, лаконичное изложение, некоторые неточности и ошибки,

---

[5] Хотя и сам Гамильтон вначале не очень уверенно манипулировал с ∇: так, он утверждал, что соотношение $\nabla^2 v = -\Delta v$ справедливо для любой функции – скалярной, векторной или кватернионной. Легко убедиться, что это неверно.

[6] Совершенно неясно, как они обходили, скажем, такие несоответствия: для любых векторов $S.\alpha\beta = S.\beta\alpha$; если же один из сомножителей ∇, то $S.\nabla\rho = -\left(\frac{\partial\rho_x}{\partial x} + \frac{\partial\rho_y}{\partial y} + \frac{\partial\rho_z}{\partial z}\right)$, а $S.\rho\nabla$ представляет собой оператор (часто употреблявшийся в теории кватернионов)

$$S.\rho\nabla = -\left(\rho_x\frac{\partial}{\partial x} + \rho_y\frac{\partial}{\partial y} + \rho_z\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

[7] Lectures on quaternions. Dublin, 1853. P. 610.

вероятно, основательно затрудняли понимание; книгу и сейчас называют "нечитабельной".

2. Рассматривая векторную функцию векторного аргумента, Гамильтон уделяет особенное внимание линейной векторной функции, но даже и "особенное внимание" не помогает пониманию – седьмая глава, в которой изложен этот материал, трактует о множестве предметов. Полностью справедлив отзыв Г. Ганкеля: «Самую теорию вместе с некоторыми применениями ее он изложил в обширных "Lectures on quaternions" в форме, очень неудобной для математиков на материке, но, по-видимому, очень естественной для англичан. Дело в том, что эта теория изложена в разбросанных отрывках, проблемы рассматриваются не во всей общности, но сначала лишь в некоторых специальных случаях, далее излагается все это несвязно, благодаря разным применениям и другим исследованиям для того, чтобы только лишь впоследствии закончить задачу во всем ее объеме, да и то иногда лишь случайно. Тут присоединяется еще необычно обширное, непрерывное повторяющееся изложение...» Добавим только, что эта характеристика завершается словами: "...теория кватернионов, этот продукт блестящих открытий знаменитого и гениального математика"[8].

Учение Гамильтона о линейной векторной функции – источник современной теории линейных преобразований векторов; важнейшие результаты этой теории получены в исчислении кватернионов, правда, часто их трудно распознать современному читателю из-за непривычности формы и "чуждых" методов.

В "Лекциях о кватернионах" Гамильтон дал следующее определение "линейной и векторной функции": "Положим для краткости $\nu = \Phi(\rho)$, или просто $\nu = \Phi\rho$; векторная функция будет линейной, или дистрибутивной, если

$$\Phi(\rho + \rho') = \Phi\rho + \Phi\rho', \quad \Delta\Phi\rho = \Phi\Delta\rho, \quad \Phi(x\rho) = x\Phi\rho$$" [9].

Мы видим, что определение Гамильтона связывает линейную функцию с разностями и дифференциалами, что представлялось ему самым существенным. В "Элементах кватернионов" (1866) Гамильтон вместо приведенного определения дает довольно расплывчатое описание: он отмечает, что дифференциал функции от кватерниона $f(q)$ или fq представляет собой функцию переменных q и dq, "всегда дистрибутивную относительно дифференциала dq, рассматриваемого как независимая переменная, независимо от вида данной функции fq. Мы видим также, что если умножить дифференциал dq переменной q на любой скаляр x, то дифференциал dfq функции fq также умножается на тот же самый скаляр, или что $f(q, xdq) = xf(q, dq)$"[10]. Нечеткость определений компенсировалась тем, что Гамильтон записывал любое линейное уравнение в виде

$$\beta S.\alpha\rho + \beta' S.\alpha'\rho + \beta'' S.\alpha''\rho = \sigma,$$

а следовательно, любую векторную функцию как

$$\Phi\rho = \beta S.\alpha\rho + \beta' S.\alpha'\rho + \beta'' S.\alpha''\rho;$$

---

[8] *Ганкель Г.* Теория комплексных числовых систем, преимущественно обыкновенных мнимых чисел и кватернионов Гамильтона вместе с их геометрическим толкованием. Казань, 1912. С. 242.

[9] Lectures on quaternions. Dublin, 1853. P. XLVI.

[10] Elements of quaternions. 3rd ed. New York, 1969. Vol. 6. P. 443.

это была "стандартная триномиальная форма для линейной векторной функции вектора".

Главной задачей теории линейной векторной функции было решение линейного уравнения вида $\Phi\rho = \sigma$, т.е. задача обращения функции Φ. Сначала Гамильтон рассматривал некоторые частные случаи (функции Φ), например уравнения $V.\alpha'\alpha\rho = \sigma$, $V.q\rho = \sigma$ и другие, а затем – "самый общий возможный вид *линейного и векторного уравнения* $\sum\beta S.\alpha\rho + V.r\rho = \sigma$". Общий метод решения был усовершенствован в дальнейшем и самим Гамильтоном, и Тэтом, но в основных чертах все наиболее важные приемы были созданы к 1853 г.

Впоследствии У. Гиббс (1839–1903) существенно использовал представление векторной функции $\Phi\rho = (\beta S.\alpha + \beta' S.\alpha' + \beta'' S.\alpha'')\rho$ в своей теории диад, назвав оператор вида $\beta S.\alpha$ "диадой". В его методе уже легко узнать прообраз современной теории. Кроме того, Гиббс вместо "линейной векторной функции" стал систематически рассматривать "линейное преобразование пространства".

Гамильтон (одновременно с Кэли – в 1854 г.) вывел характеристическое уравнение линейного преобразования, которое долго называли "символическим уравнением Гамильтона–Кэли" или "символическим кубическим уравнением". В "Элементах кватернионов" Гамильтон привел многие важные свойства линейной векторной функции, исследовав характеристическое уравнение. Собственные векторы линейного преобразования, к которым пришел Гамильтон, совершенно теряются среди бесчисленных вспомогательных векторов и многих других векторов с интересными свойствами.

3. Наконец, перейдем к скалярной функции векторного аргумента, которая в теории Гамильтона теснейшим образом связана с векторной функцией векторного аргумента. Определение последней содержало следующее "продолжение": "...и если мы условимся писать $f(\rho, \omega) = S.\rho\Phi\omega$, то скалярная функция f будет одновременно: 1) коммутативна, или симметрична, относительно двух векторов, от которых она зависит, и 2) линейна, или дистрибутивна, относительно каждого из них"[11]. Эту и только эту скалярную функцию вектора изучает Гамильтон. В "Лекциях о кватернионах" он утверждает, что любая линейная функция обладает свойствами 1), 2). Второе свойство, справедливость которого очевидна, он подробно доказывает, первое же оставляет без всякого доказательства. Между тем оно означает $S.\rho\Phi\omega = S.\omega\Phi\rho$ или $(\rho, A\omega) = (\omega, A\rho)$, т.е. Гамильтон полагал, что каждое линейное преобразование является симметрическим!

В "Элементах кватернионов" это ограничение снято; здесь Гамильтон вводит "сопряженную функцию": "...каждой такой функции Φ всегда соответствует линейная векторная функция Φ', которая может быть названа *сопряженной*, связанная с первой следующим *уравнением сопряжения*: $S.\lambda\Phi\rho = S.\rho\Phi'\lambda$, где λ и ρ – два произвольных вектора"[12].

[11] Lectures... P. XLVI.

[12] Elements... Vol. 1. P. 485.

ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ КВАТЕРНИОНОВ

Только после работ Тэта идеи Гамильтона были облечены в общедоступную форму. Келлэнд (1808–1879), автор более позднего учебника по теории кватернионов (1873), свидетельствует: "Первая работа сэра У. Гамильтона "Lectures on quaternions" была очень неясна мне и, смею сказать, другим до тех пор, пока проф. Тэт не опубликовал свои статьи по этому предмету... Тогда, и не раньше, наука предстала предо мной во всей своей простоте"[13].

Тэту принадлежат многочисленные теоремы и результаты теории. Опытный педагог и лектор, Тэт упорядочил и систематизировал изложение и создал, по признанию Хевисайда, "единственно доступный трактат по этому предмету". О стимулирующем влиянии переписки Тэта с Гамильтоном уже упоминалось. Наконец, Тэт развил приложения теории кватернионов к геометрии и физике. Это означает, что именно ему принадлежит первое изложение аналитической геометрии на векторном языке, а также что именно Тэт перешел от набросков Гамильтона (об операторе ∇) к изложению современных курсов (во втором издании "Treatise on quaternions", 1877).

В двух последних обширных главах "Кинематика" и "Физические приложения" Тэт приводит формулы Стокса и Гаусса–Остроградского; в кватернионных обозначениях формулы имеют действительно компактный вид:

$$\int S.\sigma d\rho = \iint S.\nabla\sigma U\nu ds, \quad \iiint S.\nabla\sigma d\nu = \iint S.\sigma U\nu ds,$$

здесь $U\nu$ – единичный вектор нормали, $S.\nabla\sigma = -\mathrm{div}\sigma$, $V.\nabla\sigma = \mathrm{rot}\sigma$, кроме того, согласно тождеству $S(V.\alpha\beta)\gamma = S(\alpha\beta\gamma)$ опущен символ V в $S(V.\nabla\sigma)U\nu = S.\nabla\sigma U\nu$. Можно еще добавить, что лишь в лекциях Гиббса появились замечания о направлении обхода контура, о стороне поверхности интегрирования...

Тэт часто пишет о заведомо известных вещах, поэтому приводит их без доказательства. В то же время он подробно выводит не менее известные соотношения, вероятно, для того чтобы показать, как "работают" кватернионы.

Тэт подводит читателей к понятиям скалярного и векторного поля; у него отсутствует термин "поле", перенесенный в математику позднее Максвеллом, Тэт использует принятые тогда выражения "скалярная функция вектора точки" и "вектор σ – функция вектора точки". Как обычно, широко используются кватернионные тождества, а в приложениях к механике и физике – тождества с оператором ∇, например

$$dF = -S.d\rho\nabla F, \quad V(d\rho V.\nabla\sigma) = (S.d\rho\nabla)\sigma - \nabla(S.\sigma d\rho),...$$

В поисках физических приложений Тэт рассматривает, кроме векторной функции $\rho(x, y, z)$, и ее малые приращения σ, т.е. некоторое подобие поля скоростей точки; он констатирует, что вектор $V.\nabla\sigma$ направлен по оси вращения и равен удвоенной угловой скорости. Он устанавливает также, что в случае если линейное преобразование состоит в смещении по нормали и вращения нет, то $V.\nabla\sigma = 0$.

Рассматривая то или иное понятие, например вектор, Тэт подчеркивает, что оно не зависит от системы координат. Тэт искал новые определения, которые позволили бы вообще исключить из теории кватернионов координаты. По мнению Тэта,

[13] *Kelland P., Tait P.G.* Introduction to quaternions. London, 1882. P. IX.

основной вклад Гамильтона в науку состоял в том, что благодаря ему "из наиболее неестественной системы, т.е. из аналитической геометрии, выросла, как по волшебству, абсолютно естественная!!!" (фраза выделена курсивом) и далее: "Самое несчастливое... что самообладание Гамильтона покинуло его при составлении его великого первого тома. Стоило ему отказаться навсегда от всех манипуляций с i, j, k – и его триумф был бы полным"[14]. Вот эта цель стояла перед Тэтом – "совершенно устранить из формул... фрагменты их декартовой скорлупы, которая еще упорно цеплялась за них". В 1870 г. Тэт изобрел свое первое определение оператора ∇, "свободное от декартова символизма", а вскоре он мог уже предложить несколько таких определений. Например, можно определить ∇ соотношением $-S.\alpha\nabla = d_\alpha$, где α – единичный вектор некоторого направления, а d_α – символ производной по этому направлению. Самым предпочтительным Тэт считал следующее: если $\rho = ix + jy + kz$, $F(x, y, z) = 0$, тогда

$$dF = \frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz = -S.d\rho\nabla F = 0.$$

Тэт не забывал подчеркнуть, что при таком определении "сама природа этой формулы показывает, что ∇ есть инвариант", т.е. не зависит от системы координат.

Благодаря Тэту с кватернионами "из первых рук" познакомился Дж.К. Максвелл (1831–1879), его школьный друг. Максвелл увидел в "доктрине векторов" математический аппарат исследований и тот язык, на котором должна излагаться теория электричества и магнетизма. Но в середине прошлого века исчисление векторов существовало только как часть теории кватернионов. Эту часть Максвелл выделил из теории кватернионов и изложил в "Трактате по электричеству и магнетизму" (1873) в разделе "Предварительные сведения".

Максвелл высоко ценил возможность мыслить векторами: "Изобретение исчисления кватернионов есть шаг вперед в познании величин, связанных с пространством, который по своей важности можно сравнить только с изобретением пространственных координат Декартом"[15]. Кватернионы, как таковые, Максвелл не вводил в своих работах: "Мы старались избегать любых процедур, требующих от читателя знания исчисления кватернионов. В то же время мы без колебаний вводили идею вектора, если была необходимость в этом"[16].

А такая необходимость была как раз самой настоятельной. Ко времени создания "Трактата" Максвелла в физике не было единой общепризнанной теории электричества и магнетизма. Пожалуй, самой распространенной была теория В. Вебера (1804–1890), по которой существуют две (положительная и отрицательная) невесомые жидкости; смешиваясь, они нейтрализуют друг друга; между ними существует дальнодействие, т.е. мгновенная передача действия одного тока на другой. Другая теория родилась в Англии – теория электромагнитного поля Фарадея. Максвелл отлил в математическую форму теорию Фарадея и связал ее с теорией света, высказав предположение, что и свет, и электричество сводятся к колебаниям эфира и по существу тождественны. Увидев, что эта теория оперирует

---

[14] *Tait P.G.* On the importance of quaternions in physics // Philos. Mag. 1890. Vol. 29. P. 92.

[15] *Максвелл Дж.К.* Статьи и речи. М.: Наука, 1968. С. 39.

[16] *Maxwell J.C.* A treatise on electricity and magnetism. London, 1873. Vol. 2. P. 257.

с направленными величинами, Максвелл решил, что она должна иметь совершенно естественное изложение на языке векторов. По-видимому, Максвелл считал, что исчисление векторов имеет осязаемую наглядность: "Эта отрасль математики... станет, может быть под каким-нибудь новым именем, могущественным методом сообщения истинно научных знаний лицам, очевидно лишенным вычислительного духа". Позднее Хевисайд утверждал приблизительно то же: человек, не образованный математически и не привыкший к манипуляциям с проекциями на оси координат, естественно мыслит векторами.



П.Г. Тэт

Максвелл построил очень детализированную модель эфира, передающего электрические и магнитные возмущения поля. После того как он с помощью этой модели установил уравнения, описывающие законы распространения электрических и магнитных возбуждений, Максвелл больше не возвращался к этой модели.

Теория Максвелла не нашла немедленного понимания, признания физиков. Против нее были три (основные) возражения: 1) не было доказательств существования близкодействия; 2) вывод уравнений Максвеллом был крайне неубедительным; 3) математический аппарат теории (векторное исчисление) вызывал противодействие физиков, которому способствовал фанатизм школы кватернионистов (по словам Ф. Клейна).

СОЗДАНИЕ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

Так история признания векторного исчисления оказалась связанной с историей принятия теории электричества и магнетизма Фарадея–Максвелла. Значение, которое "Трактат" Максвелла имел для развития векторного исчисления, невозможно переоценить. Благодаря этой книге векторы вошли в физику. Для многих ученых эта книга – источник первого знакомства с векторами и причина дальнейшего изучения векторных методов. В частности, это относится к О. Хевисайду и У. Гиббсу, выделившим "векторный анализ" из теории кватернионов.

Максвелл критически пересмотрел всю теорию, целесообразно и экономно отобрал необходимое и создал удобный инструмент. Он практически не использовал ничего из *методов* теории кватернионов; так, он не отказался от декартовых координат, поэтому он существенно приблизил исчисление к современному. Максвелл рассматривал не числа $w + ix + jy + kz$, а только частный случай – векторы $xi + yj + zk$. В работах Максвелла используются термины "поле", "поле вихревое, безвихревое", "поле соленоидальное", введенные в 1851 г. У. Томсоном (1824–1907). Максвелл приводит "общее условие соленоидальности поля $dX/dx + dY/dy +$

+ dZ/dz = 0, т.е. скалярная часть S.∇σ равна нулю". Он дал определение силовой линии (основного понятия теории Фарадея) и привел уравнения силовых линий

$$\frac{1}{a}\frac{dx}{ds}=\frac{1}{b}\frac{dy}{ds}=\frac{1}{c}\frac{dz}{ds}.$$

Тот факт, что векторное исчисление Максвелла "было родом" из теории кватернионов, наложил отпечаток на понятия, вводимые Максвеллом: при кватернионном перемножении

$$\nabla\sigma=-\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)+i\left(\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}\right)+j\left(\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}\right)+k\left(\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}\right)$$

получается rotσ и величина, которую Максвелл назвал "конвергенцией". Также первоначально в теории фигурировал вектор, противоположный градиенту, $-\left(\frac{d\psi}{dx}i+\frac{d\psi}{dy}j+\frac{d\psi}{dz}k\right)$. В исследованиях Максвелла впервые появляются в явном виде основные формулы векторного анализа; в частности, многочисленные результаты Г. Ламе (1795–1870), переведенные на векторный язык Максвеллом, сразу же приобрели тот вид и ту форму изложения, который они сохранили до настоящего времени, формулы Стокса, Гаусса–Остроградского записаны в координатной форме, т.е. отличаются от формул современных курсов только тем, что нет оговорок относительно гладкости поверхности и т.п., а не "кватернионной лаконичностью", как у Тэта.

Опубликованные в 1911 г. фрагменты из писем Максвелла к Тэту показывают, что он размышлял именно над теми сторонами теории кватернионов, которые через двадцать лет стали предметом острой полемики между кватернионистами и "отщепенцами" – сторонниками векторного анализа: как использовать и векторы, и координаты? как быть с тем, что квадрат вектора отрицателен? как избавиться от двусмысленности – ведь векторные величины могут играть роль то мнимой единицы, то оператора в теории кватернионов? – и т.п.

Теория Фарадея–Максвелла победила благодаря работам Больцмана, Герца и Хевисайда. Эти ученые развили и продолжили идеи Максвелла по самым разным направлениям. Л. Больцман (1844–1906) высоко ценил механическую основу теории Максвелла, именно подробное обсуждение этих идей составило ядро курса лекций по электричеству и магнетизму, который Больцман читал в Венском университете (и издал в 1891–1893 гг.).

Другую сторону работ Максвелла ценил Г. Герц (1857–1894): "На вопрос, что такое максвеллова теория, я не знаю ответа короче и определеннее, чем: максвеллова теория – это система максвелловых уравнений... Нельзя изучать эту удивительную теорию, не испытывая по временам такого чувства, как будто в математических формулах есть самостоятельная жизнь, как будто они умнее нас, умнее даже своего автора, как будто они дают нам больше, чем в свое время было в них вложено"[17]. В своих статьях Герц подчеркнуто обходился классическими математическими средствами – без векторных методов Максвелла.

---

[17] *Hertz H.* Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft. Leipzig, 1914. S. 23.

Итак, Больцман, который первым экспериментально подтвердил справедливость теории Фарадея–Максвелла (в частности, он доказал, что диэлектрическая постоянная равна квадрату показателя преломления – соотношение, следовавшее из уравнений Максвелла), и Герц, установивший электромагнитную природу света (1889), решительно избегали векторного языка и векторных методов Максвелла. Из признанных последователей Максвелла только Хевисайд взял теорию в таком виде, какой она вышла из рук создателя, – теорию, оперирующую с векторными величинами. В ходе исследований Хевисайд преобразовал и уравнения Максвелла[18], и исчисление векторов, превратив его в современный векторный анализ.

К 80-м годам XIX в. совершенно независимо было развито несколько векторных систем. В частности, в Америке в 1877 г. Гиббс, начав преподавание курса электричества и магнетизма, "увидел, что необходимо овладеть векторными методами". Вскоре он начал читать студентам-физикам курс "Элементы векторной алгебры и векторного анализа", который затем издал частным образом и разослал ученым в разные страны; таким образом было распространено около 130 экземпляров "Элементов векторного анализа" в двух частях (1881–1884).

Хевисайд начинает свои исследования по электромагнитной теории с 1872 г. в Англии. К 1885 г. он уже преобразовал векторное исчисление теории кватернионов и пришел к своей системе, которую предлагал как некоторое видоизменение теории кватернионов, удобное для работы физика, согласованное с "декартовой математикой", т.е. использующее декартовы координаты.

Отличия их векторных систем от кватернионной состояли главным образом в трех моментах.

1. Полное кватернионное произведение векторов разбито на два разных – скалярное и векторное (эти названия вместо "скалярная, векторная часть произведения" ввел Хевисайд).

2. Скалярное произведение определено как $|\alpha| \cdot |\beta| \cdot \cos\varphi$ с тем, чтобы квадрат любого вектора был положительной величиной.

3. Векторный анализ допускал изложение на языке декартовых координат, которые использовались самым естественным образом.

Самую глубокую и значительную теорию развил в середине XIX в. немецкий математик Г. Грассман (1809–1879) в работе "Линейное учение о протяженности". Теория, созданная Грассманом, не была понята современниками, не оказала никакого влияния на науку XIX в. и не исследована полностью и до сих пор. Создается впечатление, что книги Грассмана (1844, 1861) смогли понять лишь те математики, кто занимался близкими проблемами – Гаусс написал Грассману (в ответ на присланную книгу), что также размышлял над метафизикой комплексных величин; Мёбиус, увидев результаты, родственные его барицентрическому исчислению, поддерживал Грассмана; наконец, Гамильтон смог распознать в "Линейном учении о протяженности" (что совсем не просто) общие элементы с его кватернионами. Отзыв Гамильтона о труде Грассмана в "Предисловии к Лекциям о кватернионах" нарушил молчание, которое было единственной "оценкой" работы ученого. Из этого отзыва, в частности, Г. Ганкель узнал об учении своего соотечественника.

---

[18] Об этом см.: *Маркчев Н.Т.* Сравнение различных форм системы уравнений Максвелла // Максвелл и развитие физики XIX–XX веков. М.: Наука, 1985. С. 84–96.

Он обратился с письмом к Грассману, привлек внимание Клебша к работам Грассмана и подал последнему надежду, что его труд будет продолжен.

Некоторый интерес к работам Грассмана возбудили попытки Гиббса восстановить историческую справедливость и воздать должное немецкому математику. Однако действительное признание и высокая оценка идей Грассмана пришли только в 30-х годах XX в. с работами Э. Картана. (Он ввел понятия "внешнего произведения Грассмана", "внешних квадратичных форм" и развил теорию внешних дифференциальных форм.) Подход Картана оказался очень глубоким и плодотворным и оказал длительное и значительное влияние на многие области математики. С работ Картана начинается все растущий интерес к трудам Грассмана, в том числе развитие внешних алгебр Грассмана.

В то время когда Гиббс начинал читать первые курсы векторного анализа (1879), в Петербурге Осип Иванович Сомов (1815–1876) уже опубликовал литографированные лекции по теоретической механике в векторном изложении (1872, 1874, 1877); его книга была переведена на немецкий язык в 1878 г. В последнее время опубликованы работы, посвященные Сомову, его механике и векторному исчислению[19].

И Гиббс, и Хевисайд послали оттиски своих работ Тэту. Если они надеялись, что последовательные кватернионисты с терпимостью отнесутся к побочной ветви теории, они ошиблись. С 1890 по 1894 г. на страницах журнала "Nature" и в научных статьях (Хевисайда, Тэта, Маколея) разгорелась ожесточенная дискуссия, которую Хевисайд назвал судебным процессом "Векторы против Кватернионов". Так как она началась как раз в период общего интереса к электромагнитной теории (после решающих экспериментов Герца), то оказалась очень полезной для ознакомления научного мира с векторным анализом. Одной из последних статей дискуссии была статья Кэли "Координаты против Кватернионов"! Сторонники чистой теории кватернионов сплотились, организовав "Всемирный союз содействия кватернионам" (1895).

Хотя теория кватернионов и не заменила собой всю математику (и тем более физику), она связана многочисленными нитями с несколькими математическими и физическими науками, она доставила им важные идеи и стимулировала исследования по важнейшим направлениям. Кроме линейной алгебры (многие понятия которой развились не из линейных уравнений, а из теории кватернионов) и векторного анализа, назовем теорию гиперкомплексных чисел и теорию ассоциативных алгебр.

Уникальное место исчисления кватернионов определено теоремой Фробениуса (1878): Единственными ассоциативными алгебрами над полем реальных чисел, в которых произведение равно нулю только при равенстве нулю хотя бы одного множителя, являются поле реальных чисел, поле обыкновенных комплексных чисел и алгебра реальных кватернионов.

Ассоциативные алгебры исследованы американскими математиками – отцом и сыном – Б. Пирсом и Ч.С. Пирсом; последний доказал, что все линейные ассоциативные алгебры могут быть выражены в матричной форме. В частности, теория

[19] *Крамар Ф.Д., Молюков И.Д.* Иосиф Иванович Сомов – математик, механик, педагог. Алма-Ата, 1965; *Никифорова Т.Р.* Осип Иванович Сомов. М.; Л.: Наука, 1964.

кватернионов с единицами 1, i, j, k тождественна матричной алгебре с матрицами

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Одно из направлений исследований по системам комплексных чисел восходит к "Предварительному очерку бикватернионов" (1873) У.К. Клиффорда (1845–1879). Основополагающими трудами здесь являются "Теория винтов" Р. Болла и работы Александра Петровича Котельникова (1865–1944) по винтовому исчислению. Многие из важных результатов Котельникова переоткрыты Штуди, который связал исчисление с теорией групп.

После того как вместе с теорией Максвелла векторные методы вошли в физику, векторное исчисление заняло бесспорное место в математике. К этому же времени относится и замечательное распространение языка и аппарата векторного исчисления на функциональный анализ и теорию интегральных уравнений. Когда в 1905 г. Э. Шмидт (1876–1959) перенес геометрический язык на гильбертово пространство, то новым был по существу только один момент: результаты Пинкерле и Фреше излагались посредством векторного анализа – его понятия, язык и методы, видоизмененные подходящим образом, сразу же стали рабочим инструментом теории интегральных уравнений.

В течение XX в. время от времени предпринимались попытки сделать теорию кватернионов языком современной физики. Так, шведский ученый О. Фишер написал две книги (1951 и 1957), в которых он излагает большую часть физики в терминах кватернионов Гамильтона. Тот факт, что матрицы, которым эквивалентны единицы 1, i, j, k, совпадают с матрицами Паули, играющими важную роль в квантовой механике, является источником новых и новых надежд приложить теорию кватернионов к физическим наукам. В статье, написанной к столетнему юбилею теории кватернионов, Дирак сделал попытку применить кватернионы в теории относительности. Дирак устанавливает связь между кватернионом q и вектором ξ в пространстве-времени таким образом, чтобы перенести в теорию относительности аппарат теории кватернионов. Оказалось, что уравнения Максвелла, записанные в кватернионной форме, являются аналогом условий Коши–Римана, т.е. условиями кватернионной аналитичности. Исследование ее роли в физике еще не завершено окончательно.

В последние годы частичный возврат от векторов к кватернионам происходит в таких разделах физики, так квантовая электродинамика, теория элементарных частиц, теория твердого тела, теория калибровочных полей, которая является обобщением теории Максвелла. В диссертации Ю.А. Курочкина "Кватернионы и некоторые приложения их в физике" (1976) рассмотрены возможные направления приложений кватернионов и дан обзор таких работ.

В самое последнее время развиваются новые и тонкие методы для изучения геометрических свойств пространства-времени физического мира. Одним из создателей таких методов является американский физик Роджер Пенроуз. Он ввел в рас-

смотрение модель на основе четырехмерного комплексного векторного пространства. Его книга "Structure of space-time" (1968) переведена на русский язык (1972)[20] и уже породила обширную литературу, в частности с ней связаны статьи Ю.И. Манина "Калибровочные поля и голоморфная геометрия", С.Г. Гиндикина и Г.М. Хенкина "Преобразование Пенроуза и комплексная интегральная геометрия"[21].

Отметим, что, во-первых, эти исследования охватывают широчайший круг проблем: космологических (доказано необходимое существование сингулярностей пространства-времени, связанных с наличием "черных дыр" и т.д.), квантово-механических (туннельный переход) и теории элементарных частиц, а во-вторых, что эти исследования потребовали разработки тонких и сложных математических методов и, в частности, использования теории кватернионов.

---

[20] *Пенроуз Р.* Структура пространства-времени. М.: Мир, 1972.

[21] См.: Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1981. Т. 17. С. 3–54; 57–112.

КОММЕНТАРИИ*

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

[1] (с. 12). Несмотря на часто выражавшиеся намерения, Гамильтон так и не опубликовал адекватное изложение своих методов применительно к оптическому прибору вращения, хотя, если судить по рукописям, много размышлял над соответствующим кругом проблем. В этой связи можно указать на его краткую заметку "О некоторых результатах, проистекающих из идеи характеристической функции в оптике" (1833) [H. 1. P. 297], и на опубликованные в этом томе выдержки из его рукописей. На заседании Королевской ирландской академии 24 июня 1844 г. Гамильтон прочитал свою работу об усовершенствовании двойного ахроматического объектива, но эта работа не была опубликована. Мемуар "Об усовершенствовании двойного ахроматического объектива" [H. 1. P. 387–460], по-видимому, является черновым вариантом указанной работы.

[2] (с. 12). Доложено 26 апреля 1830 г. [H. 1. P. 107–144].

[3] (с. 14). Уравнение (2.3) выражает тот факт, что якобиан $\partial(\partial V/\partial x, \partial V/\partial y, \partial V/\partial z)/\partial(x', y', z')$ или $\partial(\partial V/\partial x', \partial V/\partial y', \partial V/\partial z')/\partial(x, y, z)$ с учетом уравнения (2.2) обращается в нуль.

[4] (с. 15). Если воспользоваться соотношением (3.1), то первые строки в уравнениях (2.8) и (2.9) можно записать в виде (см. (6.15))

$$\frac{dx}{dV} = \frac{\partial\Omega}{\partial\sigma} \quad \text{и т.д.,} \qquad \frac{d\sigma}{dV} = -\frac{\partial\Omega}{\partial x} \quad \text{и т.д.}$$

Эти уравнения, имеющие вид канонических уравнений в динамике, описывают распространение элемента поверхности $V = \text{const}$ как контактное преобразование вдоль луча.

[5] (с. 19). Более подробные сведения относительно этих преобразований приведены в примечании 15 [H. 1. P. 488].

[6] (с. 24). Уравнение (5.5) означает, что якобиан $\partial(\partial V/\partial x, \partial V/\partial y, \partial V/\partial z)/\partial(x, y, z)$ обращается в нуль вследствие уравнения (5.3).

[7] (с. 42). Подставив в (8.7) $\delta\sigma : \delta\tau : \delta\upsilon = \sigma : \tau : \upsilon$.

[8] (с. 50). Соотношения (4.7) позволяют рассматривать Ω' как функцию переменных $\sigma, \tau, \upsilon, x', y', z', \chi$. Так как $\delta\Omega' = 0$ при любых независимых вариациях $\delta x', \delta y', \delta z'$, три первых уравнения (9.4) мы получим, положив $\delta\sigma = \delta\tau = \delta\upsilon = \delta\chi = 0$. Используя их, вариацию $\delta\Omega'$ можно выразить через вариации $\delta\sigma, \delta\tau, \delta\upsilon, \delta\chi$ и полученное выражение тождественно приравнять $\lambda\delta\Omega$. Тогда при $\lambda = 1$ мы получим последние четыре уравнения (9.4) без дальнейших преобразований.

[9] (с. 71). В одной из записных книжек Гамильтона редакторы английского издания его трудов нашли следующий простой пример, иллюстрирующий сказанное:

Приложения к «Третьему дополнению»

Параболический рефлектор вращения:

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad \frac{\partial z}{\partial x} = (p =) x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (q =) y,$$

$$\frac{\Delta W}{\Delta \nu} = \frac{\Delta T}{\Delta \nu} = z - x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = -\frac{(\Delta\sigma)^2 + (\Delta\tau)^2}{2(\Delta\nu)^2},$$

---

* Комментарии составлены Н.В. Александровой (исчисление кватернионов) и Л.С. Полаком (остальные разделы). При их составлении использованы отдельные замечания и примечания А. Журдена, Мак-Коннела, А. Кэли, Ч. Пранге, А.В. Конвея, Дж. Синга, Х. Хальберстома, Р. Ингрема и др. Некоторые устаревшие обозначения: $\sin\theta^2$ для квадрата $\sin\theta$, символ ∵ в смысле "следовательно" – заменены современными обозначениями.

следовательно,

$$\Delta W = \Delta T = -\frac{(\Delta\sigma)^2 + (\Delta\tau)^2}{2\Delta\nu}.$$

Для одного параболического рефлектора или рефрактора вращения, обыкновенного или необыкновенного, $T = \Delta T$, поэтому

$$T = -\frac{(\Delta\sigma)^2 + (\Delta\tau)^2}{2\Delta\nu} = -\frac{(\sigma - \sigma')^2 + (\tau - \tau')^2}{2(\nu - \nu')}.$$

[10] (с. 72). К выражениям, задающим функции T и W, необходимо добавить сумму скачкообразных приращений, приобретаемых функцией T при переходе через отражающую или преломляющую поверхность.

[11] (с. 73). Эти соображения легли в основу работы "Об усовершенствовании двойного ахроматического объектива", доложенной Гамильтоном на заседании Королевской ирландской академии 24 июня 1844 г., но неопубликованной. Черновые наброски работы помещены в кн. [Н. 1. Р. 387–460].

[12] (с. 94). Эта часть работы Гамильтона основана на использовании уравнений (15.5), в которых частные производные можно считать постоянными коэффициентами. Следовательно, речь здесь идет об исследовании общей прямолинейной конгруэнции.

[13] (с. 94). Либо в одном и том же направлении, либо в противоположных направлениях.

[14] (с. 98). То есть фокальными плоскостями.

[15] (с. 99). Фокальные линии.

[16] (с. 102). [Н. 1. Р. 1–106]. Классификация систем лучей вводится на с. 15 [Н. 1]. При заданных начальной точке и цвете лучи образуют дважды бесконечную систему кривых, но линии лучей образуют трижды бесконечную систему, или комплекс.

[17] (с. 123). Развитая здесь оптическая теория является теорией первого порядка, и описываемая "дисторсия" не имеет никакого отношения к современному употреблению термина "дисторсия" в теории аберраций. Мы можем предполагать в данном случае, что зрачок глаза стянут в точку, и поэтому в него от каждого объекта может проникать только один луч.

[18] (с. 125). Углы φ_1', φ_2' соответствуют конечной системе, не согласующейся с начальным выбором обозначений у Гамильтона. Чтобы привести эту работу в соответствие с первоначально введенными Гамильтоном обозначениями в этом разделе вместо φ_1, φ_2, φ_1', φ_2' следует читать φ_1', φ_2', φ_1, φ_2 и опустить знаки минус в соотношениях (21.22) и (21.23). Необходимо воспользоваться соотношением (15.28).

[19] (с. 130). Используя соотношения

$$\alpha\delta\alpha + \beta\delta\beta + \gamma\delta\gamma = 0,\ \alpha'\delta\alpha' + \beta'\delta\beta' + \gamma'\delta\gamma' = 0.$$

[20] (с. 134). Величина S есть не что иное, как обобщение величины V введенной в п. 2 (соотношениями (2.4)). Если через точки $(0, 0, z')$, $(0, 0, z)$ провести плоскости с нормалями, проходящими соответственно в направлениях σ', τ', υ', σ, τ, υ, и если эти плоскости пересекают начальный и конечный лучи в точках P, Q, то $-S = \int_P^Q v\,ds$.

[21] (с. 140). Точка перехода – то же самое, что сопряженная точка. Условие (24.15) связывает девять координат точек A, B, C, лежащих на одном луче. При заданных точках A и B условие (24.15) определяет конечное число точек перехода C на луче. В том что эти точки C не зависят от того, какая именно точка B выбрана, можно убедиться с помощью рассуждений, связанных с уравнениями (24.16). Действительно, если точки A, B, C удовлетворяют условию (24.15), то существует соседний неломаный луч, соединяющий A и C. Следовательно, если мы выберем на луче ABC любую другую точку B'', то в B'' найдется смещение, удовлетворяющее уравнению (24.16), а именно: любое смещение к этому соседнему лучу. Такое смещение удовлетворяет уравнениям (24.14). Следовательно, условию (24.15) удовлетворяют точки A, B'', C, а также точки A, B, C.

[22] (с. 150). Уравнения (27.1) выражают лишь то, что колебание происходит по некоторой заданной прямой в плоскости (26.1), если величину $\omega/2\pi$ рассматривать как частоту. Отождествление с нормальной скоростью распространения требует еще одного допущения, относительно которого см.: *Fresnel A.* Oeuvres complètes. Paris, 1868. T. 2. P. 529.

[23] (с. 151). Из примечания к более поздней работе (см.: *Hamilton W.R.* On a mode of deducing the equation of Fresnel's wave // Philos. Mag. 1841. Vol. 19. P. 381–383) видно, что в то время Гамильтон не был знаком с методом, предложенным Френелем в работе: Mémoire sur la double refraction // Mém Acad. Sci. 1827. T. 7. P. 45–176. См. также: *Fresnel A.* Oeuvres complètes. T. 2. P. 561, где имеется примечание редактора Э. Верде.

[24] (с. 153). Последнее множество ныне известно под названием оптических осей.

[25] (с. 153). Обсуждение геометрических свойств волновой поверхности см.: *Salmon J.* Analytic geometry of three dimensions. London, 1915. Vol. 2. Chap. 14.

[26] (с. 156). Приняв скорость света в вакууме равной единице.

[27] (с. 158). Конус (29.10) неэквивалентен выражениям (29.9); (29.10) содержит (29.9) вместе с его преломлением в $x_0 = 0$. Следовательно, когда r_1 мало, (29.10) определяет двойной круговой конус, а (29.9) – единичный круговой конус.

[28] (с. 160). При малых $\sigma_{''}$ и $\tau_{''}$ мы получаем из (30.4)

$$\omega^2 = b^2 - 2r_{''}b^3\left(\sigma_{''} \pm \sqrt{\sigma_{''}^2 + \tau_{''}^2}\right),$$

и подставляя в (30.3), приходим к (30.6).

[29] (с. 163). Отнесенные к координатам, задаваемым соотношениями (28.3), эллипсоиды (30.10) вблизи острия могут быть приближенно описаны уравнениями

$$(z_{'} - b) + 2br_{'}x_{'} = \text{const}.$$

Эти плоскости пересекают внешний конус по параболам.

[30] (с. 163). Сечение поверхности $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = \text{const}$ плоскостью $z_{''} = b$ есть окружность

$$x_{''}^2 + y_{''}^2 + 4r_{''}bx_{''} = \text{const}.$$

Центр этой окружности расположен на окружности плоского касания в точке, диаметрально противоположной основанию нормали к волне единичной скорости.

[31] (с. 167). Эти работы Гамильтона опубликованы также в [H. 1. P. 1–293]. Там же на с. 214–218 приведены веские соображения относительно решения первого класса задач; по поводу приложений см., в частности, работу Гамильтона "Об усовершенствовании двойного ахроматического объектива" [H. 1. P. 387–460].

[32] (с. 169). Подробно эти зависимости приведены в *примеч.* 25 "Кардинальные точки и аберрации, выраженные через T''" [H. 1. P. 508–510].

[33] (с. 170). См. подробности в примеч. 21 "Об эллипсоиде, к которому приближенно нормальны лучи, выходящие из осесимметричного [оптического] прибора" [H. 1. P. 503].

ФИЗИЧЕСКАЯ ОПТИКА

[1] (с. 176). $\text{vers} \triangleq (1 - \cos\varphi)$.

[2] (с. 178). Легко получить

$$\Delta_g\xi_{g,\,h,\,t} = -\xi_{g,\,h,\,t}\,\text{vers}\sum_{(i)1}^{n} u_i\,\Delta_g x_{g,\,i} + \text{члены},$$

которые исчезают при суммировании согласно (3). Уравнения (3) определяют симметрию среды [H.2. P.469].

[3] (с. 178). Обычные методы интегрирования приводят к интегралу вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{f(k+k') - f(k-k')\}\frac{dk}{k}.$$

Это выражение может быть записано так:

$$4k' \int_{-\infty}^{\infty} f(k)dk \,/\, (k^2 - k'^2),$$

где $f(k)$ – четная функция k. Этот интеграл должен быть истолкован как главное значение по Коши [H.2. P. 581].

[4] (с. 182). См. статью "О динамике света" в [H. 2. P. 576–577] и в наст. изд., с. 175–177.

[5] (с. 183). В книге М. Джеммера "Эволюция понятий квантовой механики" (М.: Наука, 1985) по поводу установления понятия групповой скорости допущены по меньшей мере две ошибки.

1. "Понятие групповой скорости восходит к сэру Джорджу Габриэлу Стоксу". См. его статью: Notes on hydrodynamics // Cambridge and Dublin Math. J. 1849. Vol. 4. P. 219–240. – Idem: *Stocs G.C.* Math. and phys. papers. Cambridge: Univ. press, 1883. Vol. 2. P. 221–242.

2. «Формула для групповой скорости $g = dv/(dv/V)$, с помощью которой легко проверить утверждение де Бройля [скорость частицы $v = \beta c$ в точности равна групповой скорости фазовых волн. – *Л.П.*], была известна Гамильтону, как видно из его неопубликованных работ. Она [? – *Л.П.*] увидела свет только в труде лорда Рэлея "Теория звука" .... (с. 240)».

На самом деле Гамильтон разработал понятие "групповой скорости" на 10 лет раньше Стокса, вывел соответствующие формулы в 1839 г. и опубликовал основные результаты в двух статьях: Proc. Roy. Irish Acad. 1841. Vol. 1. P. 267–270, 341–349. См. [ВПМ, с. 763–767] и в наст. изд.

[6] (с. 183). Этот мемуар никогда не был опубликован. В [H. 2] были опубликованы две рукописи (№ XIX и XX. P. 451–575), которые, несомненно являлись материалом для этой работы.

[7] (с. 183). Подробное изложение этих результатов дано в записной книжке № 53 и опубликовано впервые в 1940 г. [H. 2. P. 527–575].

ОПТИКО-МЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ

[1] (с. 188). Эти работы вошли в английское издание трудов Гамильтона [H. 1. P. 1–163].

[2] (с. 188). Third supplement [H. 1. P. 164–293]. Рус. пер. см. с. 10 в наст. изд.

[3] (с. 189). История теоремы Малюса изложена в примечании 2 редакторов англ. изд. [H. 2. P. 463–464].

[4] (с. 189). См. [H. 2. P. 333].

[5] (с. 193). Более подробный обзор развития оптики до Гамильтона см., например, в кн.: *Whittaker E.T.* A history of the theories of aether and electricity. London: Nelson, 1951. Vol. 1. Ch. 1, 4.

[6] (с. 194). Выражение $\left(\int_0^{\varepsilon} d\varepsilon\right)$ в формулах (7) и (10) означает $\int_0^{\varepsilon} d\varepsilon \int_0^{\varepsilon} d\varepsilon$.

[7] (с. 203). То есть в кристаллической среде.

[8] (с. 207). Эта аннотация воспроизведена в содержании неопубликованной третьей части "Теории систем лучей". См. [H. 1. P. 9].

ДИНАМИКА

[1] (с. 215). Представлено капитаном военно-морского флота Бофортом, членом Королевской академии (впоследствии адмирал сэр Френсис Бофорт (1774–1857)), сын Д.А. Бофорта, который принял очень большое участие в создании Ирландской академии наук. Капитан Бофорт был гидрологом флота и его имя не забыто, так как он ввел шкалу силы ветра и табулировал регистрацию погоды, употребляемую до сих пор.

[2] (с. 215). О развитии теоретической динамики см.: *Полак Л.С.* Вариационные принципы механики, их развитие и применение в физике. М.: Физматгиз, 1961.

[3] (с. 215). Гамильтон имеет в виду гипотезу Бошковича о строении материи (1743).

[4] (с. 216). В момент, когда писалась эта работа, были известны семь планет и четыре астероида.

[5] (с. 217). Впоследствии Гамильтон развил это предположение в "Исчислении основных соотношений" [Н. 2. Р. 297–410].

[6] (с. 217). Лагранж в "Аналитической механике" пользовался отрицательчой функцией U, обозначая ее V.

[7] (с. 218). Гамильтон обозначает частную производную через δ. Здесь сохранено это обозначение.

[8] (с. 218). Термин "живая сила" (vis viva) был впервые применен Лейбницем. Термин "энергия" был введен Томасом Юнгом (в кн. "A Treatise on Natural Phylosophie". Lect. VIII), а термин "работа" – Кориолисом. Гамильтон в письме к Тэту, написанном в 1862 г., говорил: «Энергия и Работа в их старом английском значении – это вещи мне знакомые. Но у меня лишь самые туманные представления о современном значении этих терминов». Понятие "механической работы" возникло в тесной связи с изучением машин. "Я охотно отмечаю этот важный пример плодотворного воздействия чисто технической проблемы – в данном случае вопроса о полезном действии машин – на теоретические исследования", – пишет Ф. Клейн (Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.; Л.: ОНТИ, 1937. Ч. 1. С. 109).

[9] (с. 221). Эти уравнения в точности аналогичны уравнениям $\Omega = 0$, $\Omega' = 0$ "Третьего дополнения" [Н. 1. Р. 170, 485]. Критические замечания Якоби см. с. 507–508 в наст. изд.

[10] (с. 225). Функция V, очевидно, не зависит от выбора осей координат, и рассматриваемые движения эквивалентны изменениям осей координат. Следовательно, значение V не меняется при таких движениях.

[11] (с. 226). "Marks of position" мы переводим дословно – отметки положения; по существу говоря, это обобщенные координаты.

[12] (с. 228). Уравнение (7.1) проще всего можно получить следующим образом без введения декартовых координат. Пусть T будет функцией η, η', причем однородной функцией второй степени относительно η', и удовлетворяет уравнению $T = U + H$, где U представляет собой функцию η; H – постоянная вдоль каждой из рассматриваемых кривых. Если мы напишем

$$V = 2\int_0^t T dt = \int_0^t \Sigma \frac{\partial T}{\partial \eta'} d\eta,$$

то получим

$$\delta V = \int_0^t \Sigma\delta\left(\frac{\partial T}{\partial \eta'}\right) d\eta + \int_0^t \frac{\partial T}{\partial \eta'} \delta d\eta = \Sigma\frac{\partial T}{\partial \eta'}\delta\eta - \Sigma\frac{\partial T_0}{\partial e'}\delta e + \int_0^t \Sigma\delta\left(\frac{\partial T}{\partial \eta'}\right) d\eta_0 - \int_0^t \Sigma d\left(\frac{\partial T}{\partial \eta'}\right)\delta\eta,$$

но

$$\Sigma\frac{\partial T}{\partial \eta'}\delta\eta' = 2T = T + U + H,$$

и, следовательно,

$$\Sigma\delta\left(\frac{\partial T}{\partial \eta'}\right)\eta' = \Sigma\frac{\partial T}{\partial \eta}\delta\eta + \Sigma\frac{\partial U}{\partial \eta}\delta\eta + \delta H.$$

Отсюда мы находим, что

$$\delta V = \Sigma\frac{\partial T}{\partial \eta'}\delta\eta - \Sigma\frac{\partial T_0}{\partial e'}\delta e + t\delta H - \int_0^t \Sigma\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta'} - \frac{\partial T}{\partial \eta'} - \frac{\partial U}{\partial \eta}\right) d\eta dt.$$

Это (исходя из принципа наименьшего действия) ведет к уравнениям (18.8), из которых непосредственно следует уравнение (7.1).

[13](с. 232) $\Sigma\frac{\partial T}{\partial \eta'}\delta\eta - \Sigma\frac{\partial T}{\partial e'}\delta e = \delta V - t\delta H.$

[14] (с. 236). Если v – скорость центра тяжести, то

$$(x_{11}-a_{11})^2+(y_{11}-b_{11})^2+(z_{11}-c_{11})^2=v^2t^2=2H_{11}t^2/\sum m.$$

[15] (с. 238). Термин "центробарический" был впервые введен Мёбиусом.

[16] (с. 239). Если V выражена как функция ξ, η, ζ, α, β, γ, то

$$\frac{\partial V_,}{\partial x_i}=\frac{\partial V_,}{\partial \xi_i}\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),\qquad \frac{\partial V_,}{\partial x_n}=-\sum\frac{\partial V_,}{\partial \xi}.$$

[17] (с. 244). Относительная конфигурация $2(n-1)$ начальных и конечных положений планет определяется $6n-12$ взаимными расстояниями, и, кроме того, мы имеем три координаты любой из планет относительно Солнца.

[18] (с. 258). Уравнение (16.1) легко сводится к хорошо известной форме теоремы Ламберта (см.: *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика).

[19] (с. 259). Этот специальный случай теоремы Ламберта был дан Эйлером в 1742 г. (Miscellanea Beroline. T. 7).

[20] (с. 267). Это представляет собой соотношение, связывающее расстояния пяти точек в пространстве. Оно может быть написано более симметрично в форме детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & s_2 & d_5 & d_2 & s_1 \\ 1 & s_2 & 0 & d_3 & s_3 & d_1 \\ 1 & d_5 & d_3 & 0 & s_4 & s_5 \\ 1 & d_2 & s_3 & s_4 & 0 & d_4 \\ 1 & s_1 & d_1 & s_5 & d_4 & 0 \end{vmatrix}$$

[21] (с. 273). $2\sum_,\frac{m_r+m_n}{m_n}T_,^{(r)}=\sum_, m(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\xi}^2)=\frac{2\sum m}{m_n}T_,-\frac{1}{m_n}\sum_, m_i m_k[(\dot{\xi}_i-\dot{\xi}_k)^2+\ldots],$

$$\frac{2}{m_n}\sum m_r T_,^{(r)}+2\sum_, T_,^{(r)}=\frac{2}{m_n}(\sum_, m_r)T_,+2T-\frac{1}{m_n}\sum_, m_i m_k[(\dot{\xi}_i-\dot{\xi}_k)^2+\ldots].$$

[22] (с. 274). Уравнения (20.6), (20.8) получаются путем приравнивания нулю частных производных V по произвольным постоянным $h^{(i)}$, $g^{(i)}$. Относительно этого метода получения характеристической функции см. с. 184–214.

[23] (с. 276). Из (12.3) мы имеем

$$\sum m\xi'=\frac{\sum m}{m_r}\sum_,\frac{\partial V_,}{\partial \xi}$$

и отсюда

$$\xi_i'=\frac{1}{m_i}\frac{\partial V}{\partial \xi_i}+\frac{1}{m_n}\sum_,\frac{\partial V_,}{\partial \xi};$$

следовательно, выражение (69) для T дает

$$T_1=\frac{1}{2}\sum_,\frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial V_,}{\partial \xi_i}\right)^2+\frac{1}{2m_n}\left(\sum_,\frac{\partial V_,}{\partial \xi}\right)\quad \text{и т.д.}$$

[24] (с. 277). Интегрируя по частям.

[25] (с. 280). Иначе мы получили бы одно или более уравнений, связывающих начальные и конечные точки. Конечно, когда мы подставляем точные значения, то ξ_i, η_i, ζ_i обозначают фактические координаты в момент времени t.

[26] (с. 283). Мы имеем $\frac{\partial w^{(k)}}{\partial g^{(k)}} = t$, но $w^{(k)}$ зависит от начальных и конечных координат, а также от $g^{(k)}$.

Таким образом, отсюда следует $\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial g^{(k)2}}\delta g^{(k)} + \delta, \frac{\partial w^{(k)}}{\partial g^{(k)}} = \delta t$; (22.4) следует непосредственно отсюда же и затем получаем (22.3) путем суммирования. Уравнение (22.5) получается путем нахождения частной производной (21.8) по $g^{(k)}$.

[27] (с. 283). Чтобы получить (22.6), рассмотрим $V_{,2} = \sum_{,} m_i m_k W^{(i,\,k)}$, где $W^{(i,\,k)}$ задано посредством (22.12).

Три группы членов получаются из выражения $\frac{1}{m_i}\frac{\partial V_{,2}}{\partial \alpha_i}$:

1) из интегрированной части $W^{(i,\,k)}$ получаем $-\frac{m_k}{m_n}\frac{\partial w^{(k)}}{\partial \alpha_k}$. Это слагаемое пренебрежимо мало по сравнению с первым членом в $\Delta\alpha'$ уравнения (22.2);

2) из (22.3), где t явно встречается на верхней границе интеграла, получаем

$$\frac{\partial t}{\partial \alpha_i} = m_i\left(\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial g^{(i)2}}\right)^{-1}\left(\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial \alpha_i \partial g^{(i)}}\right)\Big/\sum_{,} m\left(\frac{\partial^2 w}{\partial g^2}\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial t}{\partial H_{,}} = 1\Big/\sum{}' m\left(\frac{\partial^2 w}{\partial g^2}\right)^{-1},$$

поскольку $\Delta t = \partial V_{,2} / \partial H$, мы видим по (22.5), что эта группа членов уничтожается членами, включающими Δt;

3) из остальных членов, которые встречаются в (22.7).

[28](с. 284) $\frac{\partial \alpha_i'}{\partial \beta_i'} = -\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial \alpha_i \partial \beta_i} = \frac{\partial \beta_i'}{\partial \alpha_i}$, $\frac{\partial \alpha_i'}{\partial \gamma_i} = -\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial \gamma_i \partial \alpha_i} = \frac{\partial \gamma'}{\partial \alpha'}$.

[29] (с. 285). Если мы задаем вариации $\Delta\alpha_i$, $\Delta\beta_i$, $\Delta\gamma_i$, то, поскольку

$$\frac{\partial \beta_i'}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \alpha_i'}{\partial \beta_i} = -\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial \alpha_i \partial \beta_i},$$

новые вариации α_i', β_i', γ_i' будут иметь вид

$$\Delta\alpha_i' + \frac{\partial \alpha_i'}{\partial \alpha}\Delta\alpha_i + \frac{\partial \alpha_i'}{\partial \beta_i}\Delta\beta_i + \frac{\partial \alpha_i'}{\partial \gamma_i}\Delta\gamma_i,$$

или

$$\Delta\alpha_i' + \frac{\partial \alpha_i'}{\partial \alpha}\Delta\beta_i + \frac{\partial \alpha_i'}{\partial \alpha_i}\Delta\gamma_i,$$

где $\Delta\alpha_i'$ и т.д. представляют собой значения, данные в (22.7). Давая значения $\Delta\alpha_i$, $\Delta\beta_i$, $\Delta\gamma_i$ в (22.12), мы получаем значения $\Delta\alpha_i'$ в той же группе уравнений. Сравнение методов Лагранжа, Пуассона и Гамильтона в теории возмущений см.: *Lovett E.O.* // Quart. J. Math. 1899. Vol. 30, P. 47–149.

[30] (с. 285). На этой стадии Гамильтон заметил неудобство появления H в характеристической функции; поэтому он преобразовал эту функцию в другую, которая в качестве переменной содержала t вместо H. Преобразование, которое необходимо произвести, очевидно из следующего уравнения:

$$\delta V = \sum m(x'\delta x - a'\delta a + y'\delta y - b'\delta b + z\delta z - c'\delta c) + t\delta H,$$

следовательно,

$$\delta(V - Ht) = \sum(x'\delta x - a'\delta a + \ldots) - H\delta t.$$

[31] (с. 285). Что касается введенной в этом пункте функции S, названной здесь "вспомогательной функцией", то в своем втором очерке Гамильтон изменил ее наименование на "главная функция" (см. Вводные замечания).

[32] (с. 287) *Lagrange J.L.* Oeuvres. Paris, 1873. Vol. 6. P. 771–809; *Poisson S.D.* // J. École Polyt. 1809. T. 8. P. 266.

[33] (с. 287). Краткое изложение этой теории см. в [ВПМ. С. 763].

[34] (с. 290). Он, однако, сразу заметил, что общий метод, развитый им в динамике, может быть значительно расширен.

[35] (с. 291). $\delta S' = \sum\left(\frac{\partial H}{\partial \varpi}\delta\varpi + \varpi\delta\frac{\partial H}{\partial \varpi}\right) - \sum\frac{\partial H}{\partial \varpi}\delta\varpi - \sum\frac{\partial H}{\partial \eta}\delta\eta.$

[36] (с. 292). $\delta S = \left[\sum\frac{\partial T}{\partial \eta'}\delta\eta\right]_0^t - \int_0^t\left[\sum\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta'} - \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial \eta}\right)\delta\eta\right]dt.$

[37] (с. 292) $S = V - Ht$, $Q = -S + \sum(\eta\varpi - ep)$. Ср. также: *Routh J.* Advanced rigid dynamics. London, 1905. P. 487.

[38] (с. 293). Теперь более принято писать $S = \int_{t_0}^{t}\left(\sum\varpi\frac{\partial H}{\partial \varpi} - H\right)dt$ и мы имеем по аналогии с (29) и (30)

$$\frac{dS}{dt_0} = \frac{\partial S}{\partial t_0} + \sum\frac{\partial S}{\partial e}\frac{de}{dt_0}, \quad \frac{\partial S}{\partial t_0} = -\left(\sum p\frac{\partial H_0}{\partial p} - H_0\right) + \sum p\frac{\partial H_0}{\partial p} = H_0.$$

Следовательно, два уравнения в частных производных будут

$$\frac{dS}{dt} - H\left(\frac{\partial S}{\partial \eta_1}, \frac{\partial S}{\partial \eta_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial \eta_{3n}}, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{3n}, t\right) = 0,$$

$$\frac{dS}{dt_0} - H\left(-\frac{\partial S}{\partial e_1}, -\frac{\partial S}{\partial e_2}, \ldots, -\frac{\partial S}{\partial e_{3n}}, e_1, e_2, \ldots, e_{3n}, t\right) = 0,$$

если даже H не является постоянной. Легко видеть, что эти уравнения эквивалентны (6.1), когда H является постоянной. Якоби (Crelle J. Bd. 27. S. 97–162) показал, что уравнения (6.1) сохраняют свою силу, когда U явно содержит t; там также даны и соответствующие уравнения для функции V.

[39] (с. 294). Под $F'\left(\frac{\delta S}{\delta \eta_i}\right)$ подразумевается частная производная F по $\frac{\partial S}{\partial \eta_i}$.

[40] (с. 299). Задача состоит в том, чтобы выразить S_2 в терминах η и e или δS_2 через η, $\delta\eta$, e, δe.

[41] (с. 300). От уравнения (47) берется частная производная по e_k, причем величины η сохраняются постоянными.

[42] (с. 303). Легко показать, что в (64) и (65) коэффициенты $\frac{\partial^2 H_1}{\partial \eta_n \partial \eta_r}$ и $\frac{\partial^2 H_1}{\partial \varpi_n \partial \varpi_r}$ равны нулю.

Кроме того, если мы поменяем местами индексы в коэффициенте $\frac{\partial^2 H_1}{\partial \eta_n \partial \varpi_r}$ этот член взаимно уничтожится с соответствующим членом (65).

[43] (с. 304). Отсюда следует, что в невозмущенном движении a являются постоянными, в чем и состоит теорема Пуассона (J. École Polyt. 1809. Vol. 8. P. 281–282).

[44] (с. 304). Это легче всего можно увидеть из следующего. Если бы $a_{i,s}$, выраженное через k, явно

содержало t, то оно не оставалось бы постоянным во время невозмущенного движения, что противоречило бы (15.1).

[45] (с. 305). Взяв $t = 0$ в (70), мы получаем $\Phi_1(0, e_1,..., e_{3n}, p_1,..., p_{3n}) = 0$ для всех значений e и p. Отсюда следует (71).

[46] (с. 307). C и E представляют собой производящие функции для контактных преобразований от p, e к λ, k.

[47] (с. 308). Метод рассуждения здесь такой же, как при выводе уравнения (7.1).

[48] (с. 309). $C = \Sigma(k\lambda - ep) - E$.

[49] (с. 315). Эти уравнения в частных производных имеют вид

$$-\frac{\partial C}{\partial t} + H_2\left(t,\ \frac{\partial C}{\partial \lambda},\ \lambda\right) = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial t} + H_2\left(t,\ k,\ \frac{\partial E}{\partial k}\right) = 0.$$

[50] (с. 315). vers обозначает функцию $(1 - \cos\varphi)$.

[51] (с. 319). Приближение S_2 (136) представляет собой решение уравнения в частных производных

$$\frac{\partial S_2}{\partial t} + \frac{\partial S_1}{\partial \eta_1}\frac{\partial S_2}{\partial \eta_1} + \frac{\partial S_1}{\partial \eta_2}\frac{\partial S_2}{\partial \eta_2} + \frac{\partial S_1}{\partial \eta_3}\frac{\partial S_2}{\partial \eta_3} + H_2 = 0.$$

Это должен быть полный интеграл, имеющий произвольные постоянные e_1, e_2, e_3 и аддитивную постоянную. Метод, применяемый Гамильтоном в подобных случаях, состоит в следующем. Значение S_2 находится посредством интегрирования вдоль пути: $p = -\partial S_1 / \partial e_1$, $p_2 = -\partial S_1 / \partial e_2$, $p_3 = -\partial S_1 / \partial e_3$. Тогда S_2 является функцией t, e_1, e_2, e_3, p_1, p_2, p_3.

Если мы заменим p_1 через $-\partial S_1/\partial e_1$ и т.д., то S_2 будет теперь удовлетворять уравнению в частных производных ввиду того, что часть, возникающая при дифференцировании p, исчезает благодаря соотношениям вида

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial S_1}{\partial \eta_1}\frac{\partial p}{\partial \eta_1} + \frac{\partial S_1}{\partial \eta_2}\frac{\partial p}{\partial \eta_2} + \frac{\partial S_1}{\partial \eta_3}\frac{\partial p}{\partial \eta_3} = 0.$$

[52] (с. 321). S_1 и S_2 строго определяются посредством

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{\partial S_1}{\partial \eta_1}\right)^2 = -H_1, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial t} + \Sigma\frac{\partial S_1}{\partial \eta_1}\frac{\partial S_2}{\partial \eta_1} = -H_2. \qquad (2)$$

В (143) $\frac{d}{dt}$ означает $\frac{d}{dt} + \Sigma\frac{\partial S}{\partial \eta_1}\frac{\partial}{\partial \eta_1}$, где $S = S_1 + S_2 + S_3$ и таким образом превращается в

$$\frac{\partial S_3}{\partial t} + \Sigma\left(\frac{\partial S_1}{\partial \eta_1} + \frac{\partial S_2}{\partial \eta_1} + \frac{\partial S_3}{\partial \eta_1}\right)\frac{\partial S_3}{\partial \eta_1} + \frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{\partial S_2}{\partial \eta_1}\right)^2 - \frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{\partial S_3}{\partial \eta_1}\right)^2 = 0 \qquad (3)$$

мы сразу видим, что сумма трех уравнений (1), (2), (3) дает

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{\partial S}{\partial \eta_1}\right)^2 = -H_1 - H_2.$$

[53] (с. 325). Если мы в правой части (150) и (151) подставим e_1, e_2, e_3, p_1, p_2, p_3 вместо $k_1, k_2, k_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ в качестве первого приближения, то интегрирование дает

$$k_1 = e_1 + \tfrac{1}{2}\mu^2 t^2(e_1 + \tfrac{2}{3}p_1 t), \quad \lambda_1 = p_1 - u^2 t(e_1 + \tfrac{1}{2}p_1 t).$$

Если же мы подставим эти значения в те же уравнения с последующим интегрированием, то получим уравнение (162).

[54] (с. 328). $x_n = x_n - \Sigma m\xi / \Sigma m$ и т.д.

[55] (с. 331). Под центробарической скоростью понимается скорость относительно среднего центра:

$$x_i' - x_{11}' = (x_i - x_n') + (x_n' - x_{11}') = \xi_i' - \Sigma_i m\xi' / \Sigma m = x_i'.$$

[56] (с. 334). Историю обозначения обратных тригонометрических функций см.: *Cajori*. History of math. Notations. Vol. 2. P. 275–278.

[57] (с. 337). $\dfrac{\partial\theta_r}{\partial\mu}$ берется из формы $\dfrac{\varphi}{(r-q)^{3/2}}$, где φ остается ограниченной; следовательно, $\left(\dfrac{k}{r^2}-\dfrac{k}{q^2}\right)\dfrac{\partial\theta_r}{\partial\mu}$ берется из формы $\dfrac{f}{\sqrt{r-q}}$, где f ограничено в интервале интегрирования. Отсюда следует, что $\dfrac{\partial}{\partial\mu}\int\limits_q^r\left(\dfrac{k}{r^2}-\dfrac{k}{q^2}\right)\theta_r dr \to 0$, когда $r \to q$.

[58] (с. 338). Пусть $\xi = r\cos l\cos\Phi$, $\eta = r\cos l\sin\Phi$, $\zeta = r\sin l$, а главная функция S удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{M+m}{2M}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{r\partial l}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{r\cos l\partial\Phi}\right)^2\right\}-Mf(r)=0.$$

Полный интеграл Якоби может быть представлен в форме

$$S=-\mu t+(k-\lambda)\Phi+\int\left(k^2-\frac{(k-\lambda)^2}{\cos^2 l}\right)^{1/2}dl+\left(\frac{M}{M+m}\right)^{1/2}\left\{2\mu+2Mf(r)-\left(1+\frac{m}{M}\right)\frac{k^2}{r^2}\right\}^{1/2}dr+\text{const},$$

где λ, k, μ – произвольные постоянные. Далее мы легко получим $\dfrac{\partial S}{\partial k}=\omega$, $\dfrac{\partial S}{\partial\lambda}=-\nu$, $\dfrac{\partial S}{\partial\mu}=-\tau$. Следовательно, по теореме Донкина (см.: *Routh J.* Advanced rigid dynamics. London, 1905. Vol. 2. P. 496) $(k, -\omega)$, (λ, ν), (μ, τ) образуют каноническую группу констант и, следовательно, соотношения (36.1) имеют место.

[59] (с. 339). Чтобы вывести (213) из п. 13, 14, нужно иметь в виду следующее. Мы имеем (так как H_1 остается константой невозмущенного движения):

$$\frac{dH_1}{dt}=\Sigma\frac{\partial H_2}{\partial k_j}\left[\frac{\partial H_1}{\partial\eta_s}\left\{\frac{\partial\eta_s}{\partial k_i}\frac{\partial k_i}{\partial\eta_t}\frac{\partial k_j}{\partial\bar\omega_t}-\frac{\partial\eta_s}{\partial k_i}\frac{\partial k_i}{\partial\bar\omega_t}\frac{\partial k_j}{\partial\eta_t}\right\}+\Sigma\frac{\partial H_1}{\partial\bar\omega_s}\left\{\frac{\partial\bar\omega_s}{\partial k_i}\frac{\partial k_i}{\partial\eta_t}\frac{\partial k_j}{\partial\bar\omega_t}-\frac{\partial\bar\omega_s}{\partial k_i}\frac{\partial k_i}{\partial\bar\omega_t}\frac{\partial k_j}{\partial\eta_t}\right\}\right],$$

но

$$\Sigma\frac{\partial\eta_s}{\partial k_i}\frac{\partial k_i}{\partial\eta_t}=\delta_{st},\quad \Sigma\frac{\partial\eta_s}{\partial k_i}\frac{\partial k_i}{\partial\bar\omega_t}=0,\quad \Sigma\frac{\partial\bar\omega_s}{\partial k_i}\frac{\partial k_i}{\partial\eta_t}=0,\quad \Sigma\frac{\partial\bar\omega_s}{\partial k_i}\frac{\partial k_i}{\partial\bar\omega_t}=\upsilon_{st},$$

где δ_{st} равно 1 или нулю соответственно тому, s равно или не равно t.

[60] (с. 340). Чтобы вывести (37.1) из (34.1), рассмотрим выражение

$$(\eta z'-\zeta\gamma')^2+(\zeta x'-\xi z')^2=k^2-(k-\lambda)^2=(2k\lambda-\lambda^2),$$

имеем

$$\eta z'-\zeta\gamma'=\sqrt{2k\lambda-\lambda^2}\sin\nu,\quad \xi z'-\zeta x'=\sqrt{2k\lambda-\lambda^2}\cos\nu,$$

следовательно,

$$\sqrt{2k\lambda-\lambda^2}(\xi\sin\nu-\eta\cos\nu)+(k-\lambda)\zeta=\Sigma\xi(\eta z'-\zeta\gamma')=0,$$

т.е. $\xi\sin\nu-\eta\cos\nu=-\frac{k-\lambda}{\sqrt{2k\lambda-\lambda^2}}\zeta$ и $\xi^2+\eta^2=r^2-\zeta^2$. Следовательно,

$$\xi\cos\nu+\eta\sin\nu=\left[r^2-\zeta^2-\frac{(k-\lambda)^2}{2k\lambda-\lambda^2}\zeta^2\right]^{1/2}=\left(r^2-\frac{k^2\zeta^2}{2k\lambda-\lambda^2}\right)^{1/2}.$$

Из (37.2) и (34.2) мы видим, что $k\zeta/2k\lambda-\lambda^2=r\sin(\theta-\nu)$ и поэтому

$$\xi\sin\nu-\eta\cos\nu=(-1+\lambda/k)r\sin(\theta-\nu),\quad \xi\cos\nu+\eta\sin\nu=r\cos(\theta-\nu),$$

откуда следует немедленно (37.1).

[61] (с. 344). Две статьи *M. Houël'a*, представленные в "Faculté des sciences de Paris" (1885), довольно интересны.

В первой он использует главную функцию, чтобы доказать различные известные теоремы относительно планетных возмущений, а во второй применяет этот метод для тщательных вычислений возмущений Юпитера. Полная библиография работ, относящихся к динамическим методам Гамильтона, до работ Houël'a была дана Кэли (Brit. Assoc. Rep. 1857. Vol. 40).

КВАТЕРНИОНЫ

В качестве комментария помещаем статью английских издателей трудов Гамильтона Х. Хальберстема и Р. Ингрема, излагающих современную точку зрения на кватернионы и линейные преобразования.

Кватернионы и вращения*

Внутренние автоморфизмы кватернионов $p\to qpq^{-1}$, где q – кватернион единичной нормы $q\bar{q}=1$, а $\bar{q}$ – кватернион, сопряженный q, были использованы Гамильтоном, чтобы задать вращение пространства векторов кватернионов. Если q записан в виде суммы скаляра и вектора $q=\cos\alpha+v\sin\alpha$, где $v=ix+jy+kz$ и $x^2+y^2+z^2=1$, то преобразование есть вращение вектора кватерниона p вокруг вектора кватерниона q на угол 2α. То же преобразование задается кватернионом $-q$, и гомоморфизм между векторами и трехмерными вращениями есть двузначное отображение с ядром 1 и –1. Как и для каждого вращения в трех измерениях вокруг вектора на угол $2\alpha\,(\mathrm{mod}\,2\pi)$, существует обратное отображение. Каждому вращению, однако, соответствуют два кватерниона, отличающиеся знаком.

Более общее отображение $p\to a(p)b$, где a и b – кватернионы, каждый из которых единичной нормы, сохраняет неизменной норму p. Если p записать как $p=w+ix+jy+kz$, квадрат нормы p есть выражение $w^2+x^2+y^2+z^2$, инвариантное в четырехмерном евклидовом пространстве (w,x,y,z). Таким образом, существует гомоморфизм пары кватернионов (a,b) в группу вращений в четырех измерениях. Так как одно и то же преобразование задается парой $(-a,-b)$ и парой (a,b), отображение двузначно. Обратное отношение выражает вращение в четырех измерениях как пару кватернионов, но не единственным образом (см. обсуждение этого: *Du Val P.* Homographies quaternions and rotations. Oxford, 1964. Ch. 3).

Кватернионы изоморфны 2×2-матрицам с комплексными элементами, кватернион $w+ix+jy+kz$ соответствует матрице

$$\begin{Vmatrix} w+ix & y-iz \\ -y-iz & w-ix \end{Vmatrix}.$$

Кватернионы единичной нормы соответствуют матрицам с детерминантом, равным 1, и легко устанавливается соотношение между спинорами и кватернионами.

---

* *Halberstam H., Ingram R.* Quaternions and rotations // *Hamilton W.R.* Mathematical papers. Cambridge, 1967. Vol. 3. P. 643–644. Перевод Н.В. Александровой.

Представление кватернионов как действительных 4×4-матриц и их связь с вращениями даны Мурнаганом (см.: *Murnaghan F.D.* Quaternion centenary celebration // Proc. Roy. Irish Acad. 1945. Vol. 50. P. 104–112).

Кватернионные преобразования вида $a()a^{-1}$ и $a()\bar{a}$, где $\bar{a}$ – кватернион, сопряженный a, впервые применялись в теории относительности Л. Зильберштейном (см.: *Silberstein L.* The theory of relativity. 2-е изд. 1924. Гл. 5 и 7) и А. Конвеем (см.: *Conway A.W.* Applications of quaternions to some recent developments of electrical theory // Proc. Roy. Irish Acad. A. 1911. Vol. 29. P. 129–137). К. Ланцош исследовал преобразования Лоренца $p(\ )q$, где p и q – кватернионы с действительным вектором и мнимым скаляром, и нашел, что преобразование действительное и лоренцево, если величина, комплексно-сопряженная к p, равна кватернионно-сопряженной к q (*Lanšzos C.* The functional-theoretic relations of Maxwell's equations in vacuo: Thesis. Szeged: Univ. (Hung.), 1919).

В серии статей Ланцош показал, что кватернионы могут быть использованы, чтобы обобщить уравнения Коши—Римана на четыре измерения, и использовал эту теорию для исследования волнового уравнения Дирака (см.: Die Tensoranalytischen Beziehungen der Diracschen Gleichung // Ztschr. Phys. 1929. S. 447–493 и более поздние статьи).

Функция $a(\ )b$ была разложена Конвеем (Quaternions and quantum mechanics // Pont. Acad. Sci. Acta. 1948. Vol. 12. P. 259–278) в произведение конического вращения $r(\ )r^{-1}$ и преобразования Лоренца $c(\ )c$ и применялась к проблемам квантовой физики. Ранее Конвей исследовал кватернионы как вращения в гиперболическом пространстве (Applications of quaternions to rotations in hyperbolic space of four dimensions // Proc. Roy. Soc. A. 1947. Vol. 191. P. 137–145). П. Гормли получил результаты очень общего характера, изучая гомографическое кватернионное преобразование $q \to (aq + b)(cq + d)^{-1}$ (см.: *Gormley P.* // Proc. Roy. Irish Acad. 1947. Vol. 51. P. 67–85). Килмистер исследовал преобразования $q \to \alpha q + q\beta$, где α и β – векторы, для того чтобы определить некоторые свойства бивекторов, т.е. косых тензоров ранга 2. В частности, хорошо известно, что самодуальные и антисамодуальные бивекторы полезны в спинорном исчислении и имеется тесная связь между спинорами и кватернионами, отличная от обычной (об этом см.: *Kilmister C.* The Application of certain linear quaternion functions to tensor analysis // Proc. Roy. Irish Acad. 1955. Vol. 57. P. 37–52).

О кватернионах...

[1] (с. 345). Мы сохраняем термин Гамильтона "constituents", ибо в его работах употребляются также и "компоненты" и "составляющие". См. также примечание Гамильтона к п. 19.

[2] (с. 345). Первые фразы этого пункта вводят впервые в математику нового времени понятие линейной независимости величин (аналогично п. 22 "Предисловия"). До этого Бомбелли (1573) явно высказал предположение, что действительные числа и корни из отрицательных чисел не складываются; в аналогичном виде требование линейной независимости сформулировал де Морган ("Предисловие", п. 43), а затем независимо от английских математиков и в форме, близкой к современной, понятие ввел Г. Грассман (1844), от которого через Дж. Пеано оно вошло в курсы векторного исчисления XX в.

Интересно отметить, что понятие употреблялось там, где преобладало абстрактно-теоретическое изложение; когда же авторы апеллировали к наглядности, в ходу были рассуждения о возможности разложить любой вектор по трем некомпланарным... Впрочем эти соображения идут также от Гамильтона (п. 22, с. 362). В дальнейшем такие соображения совершенно вытеснили из теории кватернионов понятие линейно независимой системы векторов.

[3] (с. 346). Четверки чисел с законом композиции, совпадающим с законом умножения кватернионов, впервые встречаются в письме Эйлера к Гольдбаху (1748) и в его работах 1756–1761 гг.

[4] (с. 347). Здесь впервые Гамильтон отмечает важность понятия ориентации тройки векторов для определения произведения кватернионов (векторов). В дальнейшем Гамильтон вновь и вновь обращает внимание читателя на это обстоятельство (например, п. 14, 21).

Впервые правую и левую системы координат стали систематически различать Мёбиус (1827) и Гаусс (1846). Однако в постоянный обиход это различение вошло только с развитием векторного исчисления. Термины Гамильтона "левый, правый характер вращения" (п. 53 "Предисловия") Максвелл перенес на системы координат – первоначально он хотел использовать выражения "характер вращения, как у винограда, характер вращения, как у хмеля". До того как современные термины стали общепринятыми,

употреблялись названия "положительно и отрицательно ориентированные системы" или "французская и английская системы" и многие другие.

[5] (с. 352). Здесь впервые вводится термин "ассоциативность". "Дистрибутивность" и "коммутативность" введены в 1815 г. Сервуа. См. примечание к п. 36 "Предисловия".

[6] (с. 352). Пункты 1–10 были переведены на французский язык и опубликованы в "Nouvelles annales de mathématique" (1853. Vol. 12) вместе со следующим замечанием: "Теория кватернионов есть понятие "ключ" из "clefs algébriques" г-на Коши и, очевидно, зародилось в той теории. В "Comptes rendus" была опубликована статья Коши, озаглавленная "Sur les clefs algébriques" (на эту тему Коши опубликовал еще три мемуара). "Ключи" – это метод решения систем линейных алгебраических уравнений; на примере системы двух уравнений с двумя неизвестными Коши формулирует правило, эквивалентное матричному способу решения таких систем. Г. Грассман направил в Парижскую академию наук заявление о приоритете – об этом можно прочитать в Предисловии к его "Ausdehnungslehre" (1861. С. IX).

[7] (с. 355). Подразумевается п. 3 наст. статьи.

[8] (с. 357). Здесь впервые введены термины "скаляр" и "вектор", однако еще долго Гамильтон употреблял наряду с ними выражения "действительная и мнимая величины", а также термин "линия" для вектора (вплоть до 1853 г.). Таким образом, обозначения Sq и Vq исторически предшествовали общепринятым Re*z* и Im*z*, которые, возможно, введены не без влияния теории кватернионов.

[9] (с. 361). В этой публикации впервые введены понятие и термин "компланарность векторов". Слово коллинеарность появилось гораздо позднее.

[10] (с. 363). Здесь впервые в математике высказаны соображения о требованиях к аксиоматическому построению теории: за 50 лет до исследований итальянских математиков школы Пеано и за 60 лет до известной реплики Гильберта о независимости аксиоматически построенной теории от конкретной интерпретации.

[11] (с. 372). Это уравнение (30) в статье "Additional applications of the theory of algebraic quaternions to dynamical questions" (1845) // Proc. Roy. Irish Acad. 1847. Vol. 3. P. LI–LX [H. 3. P. 449–454].

[12] (с. 374). Речь идет о п. 31 наст. статьи. См. примечание Гамильтона в этом пункте.

[13] (с. 377). См. статью: On a proof of Pascal's theorem by means of quaternions; and on some other connected subjects (1846) // Proc. Roy. Irish Acad. 1847. Vol. 3. P. 273–292 [H. 3. P. 367–377].

[14] (с. 377). См. статью: Additional applications of the theory of algebraic quaternions to dynamical questions [H. 3. P. 449–454].

[15] (с. 379). Уравнение (35) из статьи, указанной в примеч. 15 [H. 3. P. 374]. Содержание настоящего пункта доложено Ирландской академии наук Гамильтоном в 1845 г.

[16] (с. 380). См. уравнение (44) [H. 3. P. 75].

[17] (с. 381). См. [H. 3. P. 367–377].

Предисловие к "Лекциям о кватернионах"

[18] (с. 393). Гамильтон ссылается на немецкое седьмое издание "Критики чистого разума" Канта (с. 41). Перевод дан по русскому изданию: *Кант И.* Сочинения М.: Мысль.: 1964. Т. 3. С. 141–142.

[19] (с. 399). Так впервые введено современное определение комплексного числа. Хотя в начале п. 14 четко сказано, что значения γ_1 и γ_2 заданы по определению, далее Гамильтон как будто делает попытку "доказать", что $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$. Одновременно Гамильтон приводит читателей к важному методу: "В некоторых моих неопубликованных исследованиях использованы другие значения констант..." (подробнее об этом см. п. 22, 23). Метод тотчас использовали Дж.Т. Грэйвс и А. Кэли (и ввели "октавы"), а затем модификацию этого приема применил Ч.С. Пирс (1880) и, может быть, даже Г. Фробениус (1878).

[20] (с. 400). См.: *Graves J.Th.* // Trans. Roy. Soc. 1829. Vol. 119. P. 171–186; Brit. Assoc. Rep. 1834. P. 523–531.

[21] (с. 400). Ом (Ohm Martin, 1792–1872) – немецкий математик, брат знаменитого физика Г. Ома; профессор Берлинского университета. В работе "Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik" (1-е изд., 1823) построил новую и последовательную систему основ арифметики и заложил основы формализованной алгебры; изложил операции над комплексными числами, в частности над логарифмами отрицательных чисел.

[22] (с. 400). Друзья Гамильтона – Джон Томас Грэйвс (1806–1870) и Чарлз Грэйвс (1812–1899) состояли в переписке с ним, в частности, по вопросам обобщения теории комплексных чисел на случай триплетов. Третий брат Р.П. Грэйвс стал биографом Гамильтона, написав трехтомную "Life of Sire William Rowan Hamilton" (1882–1889).

После смерти Мак-Куллаха в 1843 г. Чарлз Грэйвс стал профессором математики в Тринити колледже. С 1861 по 1866 г. был президентом Ирландской академии наук, затем епископом Лимерика.

[23] (с. 401). Пикок (Peacock Georg, 1791–1858) – английский математик, профессор Кембриджского университета, один из активных деятелей и основатель английского Аналитического общества, которое изучало логические основы математики. Пикок заложил основы формальной алгебры в работе "Символическая алгебра" (1845).

[24] (с. 402). Де Морган (De Morgan Augustus, 1806–1871) – шотландский математик и логик, первый президент Лондонского математического общества. Основные его результаты в области логики изложены в работе "Формальная логика или исчисление выводов, необходимых и возможных (1847). Де Морган является одним из основателей формальной алгебры. В книге "Тригонометрия и двойная алгебра" (1849) он развил мысль Гамильтона о распространении идей символической алгебры на исчисление комплексных величин.

[25] (с. 402). Термин Гамильтона "set" мы переводим всюду как "совокупность", так как слово "множество" слишком "модернизирует" язык.

[26] (с. 412). [H. 3. P. 159–226].

[27] (с. 413). См. уравнение (160) [H. 3. P. 231].

[28] (с. 414). Уоррен (Warren John, 1796–1852) – английский математик, член Королевского общества, опубликовал три работы (1828, 1829), в которых рассматривал комплексные числа и операции над ними. В настоящее время считают, что Уоррен в Англии и Мурей во Франции независимо друг от друга и вне связи с работой Аргана снова изобрели представление точками плоскости комплексных чисел.

[29] (с. 414). Арган (Argand Jean Rober, 1768–1822) – швейцарский математик, живший в Париже. Единственная его работа "Essay sur une maniere de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géometriques" (1806).

[30] (с. 414) Франсэ (Français Jaques Frédéric, 1775–1833) опубликовал в IV томе "Annales" Жергонна (1813) короткий мемуар; в заключении он писал, что основные идеи почерпнул из письма к умершему брату его от Лежандра, где обсуждались результаты Аргана. Эта публикация привлекла внимание к работе Аргана. Об этом пишет Гамильтон в п. 57.

[31] (с. 414) Сервуа (Servois François Joseph, 1767–1847) – французский артиллерийский офицер и математик, ученик Монжа. Сервуа принимал участие в дискуссии Аргана и Жергонна о геометрическом представлении комплексных чисел.

[32] (с. 414) Жергонн (Gergonne Joseph Diaz, 1771–1859) – французский астроном и математик, основатель журнала "Annales de mathematiques". Основные его работы относятся к алгебре и проективной геометрии. Дискуссия между ним и Арганом уже упоминалась, другая дискуссия (и борьба за приоритет) – о принципе двойственности в проективной геометрии между ним и Понселе длилась много лет и способствовала выяснению многих темных мест проективной геометрии.

[33] (с. 414). Мурей (Mourey C.V.) – французский математик, который в 1828 г. изобрел вновь геометрическую интерпретацию комплексных чисел, вероятно, совершенно самостоятельно. Он не называет ни одного предшественника и пишет, что пытался распространить теорию на случай трехмерного пространства. Это, кажется, все, что сегодня о нем известно.

[34] (с. 414). Гаусс (Gauss Karl Friedrich, 1777–1855). В записных книжках Гаусса обнаружены заметки о "мутациях" пространства, которые содержат одну из основных идей Гамильтона (опубликованы записи в 1900 г.). Приведем важнейшие фрагменты:

"Уже в течение долгого времени я привык выражать каждую мутацию пространства четырьмя величинами a, b, c, d, комплекс которых я называю мутационной шкалой (под мутацией я понимаю преобразование пространства в некоторое другое пространство, связанное с величинами первого подобием). Одновременно предполагается, что одна точка пространства, преобразующегося в другое, остается закрепленной или абсолютно неподвижной; эту точку можно принять за нулевую".

Следующие записи посвящены объяснению геометрического смысла величин a, b, c, d. Гаусс определил произведение двух мутационных шкал (аналогичное произведению двух кватернионов) и отметил, что такое произведение некоммутативно:

"Из соединения двух преобразований, первому из которых соответствует шкала a, b, c, d, а второму $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, возникает новое, шкала которого

$a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta$,

$a\beta + b\alpha - c\delta + d\gamma$,

$a\gamma + b\delta + c\alpha - d\beta$,

$a\delta - b\gamma + c\beta + d\alpha$. (*Gauss C.F.* Werke. Leipzig, 1900. Bd. 8. S. 358) (с двумя описками в знаках)).

Наконец, Гаусс обозначает четверку чисел (a, b, c, d) одной буквой g и вводит g', аналогичное сопряженному кватерниону Kq. Затем Гаусс получает некоторые соотношения, эквивалентные кватернионным формулам.

[35] (с. 414). Бюэ (Bueé, 1748–1826) – аббат, эмигрировавший из Франции. Его "Mémoires sur les quantités imaginaires", опубликованный в "Transactions of the Royal Society" (1806), представляет собой, по современной оценке, весьма посредственное исследование.

[36] (с. 414). Карно (Carnot Lazar Nicolas, 1777–1855). На развитие векторных методов большое влияние оказала книга Л. Карно "Геометрия положения" (1803). Карно сформулировал определение суммы векторов как замыкающей ломаной линии; он рассматривал ориентированные площади, различал направление обхода контура – эти идеи были уточнены Мёбиусом в его "Барицентрическом исчислении" (1827) и сделались классическими в математике. Влияние Карно проявилось и в языке теории: вместе с Карно сумму векторов стали называть "геометрической суммой" и пр. А самое главное то, что его работа была широко известной и его идеи сразу же стали достоянием науки и нашли много последователей, среди которых – Сен-Венан и Резаль. В ближайшие же годы идеи Карно нашли развитие у Аргана. Как развитие идей Карно представлял свои исследования и итальянский математик Беллавитис (1803–1880), его "Метод эквиполенций", подытоживший публикации 1832–1854 гг., представляет собой исчисление, объектами которого являются направленные отрезки плоскости. Беллавитис делал долгие безуспешные попытки распространить свою систему на трехмерное пространство.

[37] (с. 415). Гомпертц (Gompertz Benjamin, 1779–1865) – английский математик из семьи голландских эмигрантов. Он осваивал математику, главным образом, по работам Ньютона, Уоллиса, поэтому де Морган назвал его "звеном между старым и новым".

[38] (с. 415). Уоллис или Валлис (Wallis John, 1616–1703) – английский математик, один из основателей и первых членов Лондонского Королевского общества (1660). Он первый английский математик, начавший заниматься анализом бесконечно малых, его "Арифметика бесконечных" (1656) сыграла важную роль в развитии понятия интеграла – здесь независимо от Ферма и Роберваля вычислены интегралы от степенных функций; Уоллис вычислял предельные значения с наперед заданной точностью; он впервые стал рассматривать бесконечные произведения. В "Трактате о конических сечениях" (1655) Уоллис пытается доказать преимущества аналитического метода Декарта и впервые рассматривает конические сечения как "кривые второго порядка", здесь же он впервые ввел отрицательные абсциссы. Во "Всеобщей математике или курсе арифметики" (1657) Уоллис разобрал различные числовые системы и исследовал представление чисел в троичной, четверичной и др. системах исчисления. В "Трактате по алгебре" (1685) содержатся рассуждения, приведенные Гамильтоном, относительно геометрического представления комплексных чисел.

[39] (с. 419). Таким образом, современные обозначения ортов i, j введены Ч. Грэйвсом; Гамильтон принял это обозначение и добавил впоследствии (1843) к ним k.

[40] (с. 422). Грегори (Gregory Duncan Farquarson, 1813–1844) – эдинбургский математик из семьи с традиционно математическими интересами. В 1838 г. вместе с Робертом Элисом (Robert Elis) основал "Cambridge Mathematical Journal". Впервые издал работы Буля и поддерживал его. Непонятно, какие именно статьи Грегори имел в виду Гамильтон, так как в первых двух номерах "своего" журнала Грегори поместил 20 своих статей.

[41] (с. 423). tg^{-1} (у Гамильтона $\tan^{-1}$) означает обратную функцию:

[42] (с. 431). Речь идет о статье Кокла: *Cockle J.* On the symbols of algebra and on the theory of tassarines // Philos. Mag. 1849. Vol. 24. P. 406–410.

[43] (с. 436). Новый образ мыслей был совершенно неожиданным для друзей Гамильтона. Дж.Т.Грэйвс, не убежденный окончательно, что такой подход допустим, нашел все-таки в течение ближайших недель

после письма Гамильтона к нему, что комплексные числа, составленные из восьми элементов (которые он назвал "октавами"), также удовлетворяют закону модулей. Он сообщил закон умножения октав в письме Гамильтону от 26.XII.1843. Занятый своими собственными исследованиями, Гамильтон отложил письма до июля месяца. За это время октавы переоткрыл Кэли.

[44] (с. 436). Кэли (Cayley Arthur, 1821–1895) – английский математик, в течение 20 лет совмещал работу адвоката с научными изысканиями и только с 1863 г. Кэли – профессор Кембриджского университета. Основные работы по теории алгебр, алгебраических квадратичных форм и алгебре матриц.

[45] (с. 436). См.: *Cayley A.* // Philos. Mag. 1845. Vol. 26. P. 210–211.

[46] (с. 437). Грассман (Grassman Hermann, 1809–1877) – немецкий математик, занимавшийся также физикой и филологией. Опубликованные в 1844 и 1861 гг. два варианта "Линейного учения о протяженности" и "Учебник арифметики" (1861) оказали влияние на развитие аксиоматических методов в трудах О. Штольца и Дж. Пеано. Абстрактная и чрезвычайно общая форма изложения привела к тому, что труды Грассмана не были оценены и даже прочитаны современниками. Данное упоминание Гамильтоном имени Грассмана было первым откликом и первым признанием работ немецкого математика, который творил в полной научной изоляции и вследствие этого отошел от математики, занялся санскритом и быстро добился признания на этом поприще.

[47] (с. 437). Мёбиус (Möbius August Ferdinand, 1790–1868) – немецкий математик и астроном; его математические интересы лежали в области проективной геометрии, топологии и многомерной геометрии, небесной механики, а также теории чисел. В частности, в его "Барицентрическом исчислении" развиты методы, родственные "алгебре точек с весами" Г. Грассмана, поэтому его работы имеют отношение к истории векторного исчисления и теории кватернионов.

[48] (с. 437). Шаль (Chasles Michel, 1793–1880) – французский геометр, член многих научных обществ и Академий наук (в том числе – Петербургской). Шаль создал новое направление в науке – вычислительную геометрию, построил синтетическую проективную геометрию и включил в нее метрическую геометрию. Очень важна его работа "Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов" (1837).

[49] (с. 437). Гершель. См. с. 373.

[50] (с. 438). Буль (Bool Georg, 1815–1864) – ирландский математик. Основное произведение Буля "Исследование законов мысли" (1854) содержит попытку построения формальной логики как некоторого "исчисления", "алгебры". В современную математику вошли понятия "булево кольцо", "булева алгебра".

[51] (с. 438). Киркмэн (Kirkman Thomas Penyngton, 1806–1895). Член Королевского общества с 1857 г., Киркмэн имел работы во многих областях математики и лингвистики в том числе, в топологии, комбинаторике, теории групп; ему принадлежат ранние попытки обобщения теории кватернионов – свои новые числа он называл pluquaternoins.

[52] (с. 438). О'Брайн (O'Brien Mattew, 1814–1855). Преподобный О'Брайн был с 1844 по 1854 г. профессором натуральной философии и астрономии в Кингз-колледже в Лондоне. Он, вероятно, учился у Гамильтона. Опубликовал девять статей по геометрическому исчислению, все они появились после публикаций Гамильтона.

[53] (с. 438). Споттисвуд (Spottiswood William, 1825–1883) – английский математик, член Королевского общества; ему принадлежат работы по комплексным переменным, теории определителей, когда еще публикаций на эти темы было мало. Другие его работы – в области физики, астрономии, истории математики.

ДОПОЛНЕНИЯ

Помещаемые здесь, в разделе "Дополнения", две небольшие статьи Х. Ллойда содержат описание экспериментов, которые он осуществил по просьбе Гамильтона для обнаружения существования предсказанной последним внешней и внутренней конической рефракции света (см. с. 447). История этих экспериментов Х. Ллойда кратко изложена на с. 481–482. Эти работы Ллойда, кроме важного значения экспериментального подтверждения предсказания математической теории Гамильтона, представляют интерес и сами по себе как характеристика уровня и методов оптических экспериментальных исследований первой трети XIX в. Мы уже отмечали (с. 482–485), что результаты этих экспериментов, подтвердивших предсказание Гамильтона, произвели огромное впечатление на современников и их часто сравнивали с аналогичным по типу подтверждением предсказаний Леверрье и Адамса.

БИБЛИОГРАФИЯ*

СПИСОК ТРУДОВ У.Р. ГАМИЛЬТОНА

1. Review of two scientific memoirs of James MacCullagh // Nat. Mag. Dublin. 1830. Vol. 1, Aug. P. 145–149.
2. Theory of systems of rays (1827) // Trans. Roy. Irish Acad. 1828. Vol. 15. P. 69–174; Supplement (1830) // Ibid. 1830. Vol. 16, pt 1. P. 1–61; Second supplement (1830) // Ibid. 1831. Vol. 16, pt. 2. P. 93–125; Third supplement (1832) // Ibid. 1837. Vol. 17, pt 1. P. 1–144.
3. On the error of a received principle of analysis, respecting functions which vanish with their variables // Ibid. 1830. Vol. 16, pt 1. P. 63–64; 1831. Vol. 16, pt 2. P. 129–130.
4. On a view of mathematical optics // Brit. Assoc. Rep. 1831–1832. P. 545–547.
5. Introductory lecture on astronomy // Dublin Univ. Rev. 1833. Jan. P. 72–85.
6. Review of Arago's work "The comet", translated by colonel Charles Goold, London, 1833 // Ibid. Apr. P. 365; Two slight contributions entitled: The comet will be found // Dublin Penny J. 1832. Dec. P. 208; 1833. Jan. P. 223, 224.
7. On some results of the view of a characteristic function in optics // Brit. Assoc. Rep. 1833. P. 360–370.
8. On a new method of investigating the relations of surfaces to their normals, with results respecting the curvatures of ellipsoids // Dublin Univ. Rev. 1833. July. P. 653.
9. On the effect of aberration in prismatic interference // Philos. Mag. 1833. Vol. 2. P. 191–194. – Idem // Poggendorf's Ann. Phys. und Chem. 1833. Bd. 29. S. 316–318.
10. On the undulatory time of passage of light trough a prism // Philos. Mag. 1833. Vol. 2. P. 284–287. – Idem // Poggendorf's Ann. Phys. und Chem. 1833. Bd. 29. S. 323–327.
11. Note on Mr Potter's reply [respecting his experiment of prismatic interference] // Philos. Mag. 1833. Vol. 2. P. 371. – Idem // Poggendorf's Ann. Phys. und Chem. 1833. Bd. 29. S. 328–329.
12. On a general method of expressing the paths of light and of the planets, by the coefficients of a characteristic function // Dublin Univ. Rev. 1833. Oct. P. 795–826.
13. On the application to dynamics of a general mathematical method previously applied to optics // Brit. Assoc. Rep. 1834. P. 513–518.
14. On conjugate functions, or algebraic couples, as tending to illustrate generally the doctrine of imaginary quantities and as confirming the results of Mr [J.T.] Graves respecting the existence of two independent integers in the complete expression of an imaginary logarithm // Ibid. P. 519–523.
15. On a general method in dynamics, by which the study of the motions of all free systems of attracting or repelling points is reduced of the search and differentiation of one central relation, or characteristic function // Philos. Trans. Roy. Soc. 1834. Pt 2. P. 247–308. – Idem // Quetelet's corresp. math. et phys. 1834. T. 8. P. 69–80, 200–211.
16. Remarques sur un mémoire de M. Plana [Sur "Les rayons réflectés] // Quetelet's corresp. math. et phys. 1834. T. 8. P. 27–30.
17. Address as Secretary of the Dublin meeting of the British Association // Brit. Assoc. Rep. 1835. P. XLI–LVI. – Idem // Philip Dixon Hardy's Proc. Fifth Meet. Brit. Assoc. Adv. Sci. Dublin, 1835. P. 28–34.
18. On a new theory of logologues. On a new theory of varying orbits // Brit. Assoc. Rep. 1835. Pt 2. P. 7.
19. Second essay on a general method in dynamics (Oct. 29, 1834) // Philos. Trans. Roy. Soc. 1835. Pt 1. P. 95–144.
20. Calculus of principal relations // Brit. Assoc. Rep. 1837. Pt 2. P. 41–44.
21. Theorems respecting algebraic elimination, connected with the question of the possibility of resolving in finite terms the general equation of the fifth degree // Philos. Mag. 1836. Vol. 8. P. 538–543; Vol. 9. P. 28–32.
22. On differences and differentials of functions of zero (1831) // Trans. Roy. Irish Acad. 1837. Vol. 17. P. 235–236. – Idem // Quetelet's corresp. math. et phys. 1834. T. 8. P. 235–237.
23. Exposition of the argument of Abel // Brit. Assoc. Rep. 1837. Pt 2. P. 1.
24. New applications of the calculus of relations; and exposition of Mr. Turner's theorem of odd numbers, etc. // Ibid. P. 4.

* Библиография составлена Л.С. Полаком.

25. Inquiry into the validity of a method recently proposed by George B. Jerrard, Esq., for transforming and resolving equations of elevated degrees // Ibid. P. 295–348.
26. Theory of conjugate functions, or algebraic couples; with a preliminary and elementary essay of algebra as the science of pure time (1833, 1835) // Trans. Roy. Irish Acad. 1837. Vol. 17. P. 293–422.
27. On the propagation of light *in vacuo* // Brit. Assoc. Rep. 1838. Pt 2. P. 2–6.
28. On the propagation of light in crystals // Ibid. P. 6.
29. On the argument of Abel, respecting the impossibility of expressing a root of any general equation above the fourth degree, by any finite combination of radicals and rational functions (1837) // Trans. Roy. Irish Acad. 1839. Vol. 18. P. 171–259.
30. Investigations respecting equations of the fifth degree (May 22, 1837) // Proc. Roy. Irish Acad. 1841. Vol. 1. P. 76–80.
31. Inaugural Address as President of the Royal Irish Academy (Jan. 8, 1830) // Ibid. P. 121.
32. Address as President of the Royal Irish Academy on Professor MacCullagh's paper on the laws of crystalline reflexion and refraction (June 25, 1838) // Ibid. P. 212–221.
33. Researches on the dynamics of light (Jan. 14 and Febr. 11, 1839) // Ibid. P. 245, 267–270.
34. Notice of a sungular appearence of the clouds observed on the 16th of December, 1838 (Jan. 14, 1839) // Ibid. P. 249.
35. Address as President of the Royal Irish Academy on Dr. Apjohn's researches on the specific heats of gases (Febr. 25, 1839) // Ibid. P. 276–284.
36. Researches respecting vibration connected with the theory of light (June 24, 1839) // Ibid. P. 341–349.
37. Address as President of the Royal Irish Academy on Mr. Petrie's on the history and antiqueties of Tara Hill (June 24, 1839) // Ibid. P. 350–354.
38. On fluctuating functions (June 22, 1840) // Trans. Roy. Irish Acad. 1843. Vol. 19. P. 264–321.
39. On a mode of deducing the equation of Fresnel's wave // Philos. Mag. 1841. Vol. 19. P. 381–383.
40. New demonstration of Fourier's theorem (June 28, 1841) // Proc. Roy. Irish Acad. 1844. Vol. 2. P. 129.
41. On the focal lengths and aberrations of a thin lens of uniaxal crystal, bounded by surfaces which are of revolution about its axis // Philos. Mag. 1841. Vol. 19. P. 289–294.
42. On certain discontinuous integrals connected with the development of the radical which represents the reciprocal of the distance between two points // Ibid. 1842. Vol. 20. P. 288–294.
43. On a mode of expressing fluctuating or arbitrary functions by mathematical formulae // Brit. Assoc. Rep. 1842. Pt 2. P. 10.
44. On a theorem in the calculus of differences // Ibid. 1843. P. 2–3.
45. On some investigations connected with the calculus of probabilities // Ibid. P. 3–4.
46. On equations of the fifth degree: and especially on a certain system of expressions connected with those equations which Professor Badano has recently proposed (1842) // Trans. Roy. Irish Acad. 1843. Vol. 19. P. 329–376.
47. On an expression for the numbers of Bernoulli by means of a definite integral, and on some connected processes of summation and integration // Philos. Mag. 1843. Vol. 23. P. 360–367.
48. On the composition of forces (Nov. 8, 1841) // Proc. Roy. Irish Acad. 1844. Vol. 2. P. 166–170.
49. On the day of the Vernal Equinox at the time of the Council of Nice (May 9, 1842) // Ibid. P. 249–250.
50. On a method proposed by Professor Badano for the solution of algebraic equations (Aug. 4, 1842) // Ibid. P. 275–276.
51. On Dr. Robinson's table of mean refractions (May 22, 1843) // Ibid. P. 400, 401.
52. Address as President of the Royal Irish Academy on Dr. Kane's researches on the nature of ammonia (June 26, 1843) // Ibid. P. 420–422.
53. On a new species of imaginary quantities connected with the theory of quaternions (Nov. 13, 1843) // Ibid. P. 424–434.
54. On approximating to the calculation of exlipses (May 27, 1844) // Ibid. P. 597.
55. On quaternions, or on a new system of imaginaries in algebra; with some geometrical illustrations (Nov. 11, 1844) // Proc. Roy. Irish Acad. 1847. Vol. 3. P. 1–16.
56. A theorem of spherical quadrilaterals and spherical conics (June 23, 1845) // Ibid. P. 109.
57. On a proof of Pascal's theorem by means of quaternions; and on some other connected subjects (July 20, 1846) // Ibid. P. 273–292.
58. On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra // Philos. Mag. 1844. Vol. 25. P. 10–13, 241–246, 489–495; 1845. Vol. 26. P. 220–224; 1846. Vol. 29. P. 26–31, 113–122, 326–328; 1847. Vol. 30. P. 458–461; Vol. 31. P. 214–219, 278–293, 511–519; 1848. Vol. 32. P. 367–374; Vol. 33. P. 58–60; 1849. Vol. 34. P. 294–297, 340–343, 425–439; Vol. 35. P. 133–137, 200–204; 1850. Vol. 36. P. 305–306.

59. On quaternions // Brit. Assoc. Rep. 1844. Pt 2. P. 2; 1845. P. 3.
60. Exercises on quaternions // Cambridge and Dublin Math. J. 1849. Vol. 4.. P. 161-168.
61. Researches respecting quaternions. First Ser. // Trans. Roy. Irish Acad. 1848. Vol. 21. P. 199–296.
62. Sur les quaternions // Nouv. ann. math. 1853. T. 12. P. 275–283.
63. On symbolical geometry // Cambridge and Dublin Math. J. 1846. Vol. 1. P. 45–67, 137–154, 256–263; 1847. Vol. 2. P. 47–52, 130–133, 204–209; 1848. Vol. 3. P. 68–84, 220–225; 1849. Vol. 4. P. 84–89, 105–118.
64. On theorems of central forces (Nov. 30, 1846)// Proc. Roy. Irish Acad. 1847. Vol. 3. P. 308–309.
65. The hodograph, or a new method of expressing in symbolical language the Newtonian law of attraction (The law of the circular hodograph, Dec. 14, 1846) // Ibid. P. 344–353.
66. On theorems of hodographic and anthodographic isochronism (Mar. 16, 1847 and May 10, 1847) // Ibid. P. 417, 465.
67. On the application of the calculus to the theory of the Moon (June 14, 1847) // Ibid. P. 507–520.
68. Illustrations from geometry of the theory of algebraic quaternions (Febr. 10, 1845) // Ibid. App. P. XXXII–XXXVI.
69. On the application of the method of quaternions to some dynamical questions (July 14 and 21, 1845) // Ibid. P. XXXVI–L.
70. Additional applications of the theory of algebraic quaternions to dynamical questions (Dec. 8, 1845) // Ibid. P. LI–LX.
71. On an isoperimetrical problem treated by the calculus of quaternions // Brit. Assoc. Rep. 1847. Pt 2. P. 4.
72. On the applications of the calculus of quaternions to the theory of the Monn // Proc. Roy. Irish Acad. 1847. Vol. 3. P. 507–520.
73. On additional applications of quaternions to surfaces of the second order (Nov. 30, 1847) // Proc. Roy. Irish Acad. 1850. Vol. 4. P. 14–19.
74. On quaternions and the rotation of a solid body (Jan. 10, 1848) // Ibid. P. 38–56.
75. On quaternions and the determination of the distances of any recently discovered comet or planet (Febr. 28, 1848) // Ibid. P. 75.
76. On the double mode of generation of an ellipsoid (May 22, 1848) // Ibid. P. 173.
77. Additional theorems respecting certain reciprocal surfaces (June 26, 1848) // Ibid. P. 192–193.
78. On quaternions applied to problems respecting the construction of a circle touching three given circles on a sphere and of a sphere touching four given spheres (Dec. 11, 1848) // Ibid. P. 255.
79. On an equation of the ellipsoid (Apr. 9, 1849) // Ibid. P. 324–325.
80. On theorems relating to surfaces, obtained by the metod of quaternions (Febr. 26, 1849) // Ibid. P. 306–308.
81. On the inscription of sertain "gauche" polygons in surfaces of the second degree (Apr. 9, 1849) // Ibid. P. 325–326.
82. On the construction of the ellipsoid by two sliding spheres (Apr. 23, 1849) // Ibid. P. 341–342.
83. On a theorem respecting ellipsoids, obtained by the method of quaternions (May 28, 1849) // Ibid. P. 349–350.
84. On some results obtained by the quaternion analysis respecting the inscription of "gauche" polygons in surfaces of the second order (June 25, 1849) // Ibid. P. 380–387.
85. On new applications of quaternions to geometry // Brit. Assoc. Rep. 1849. Pt 2. P. 1.
86. On "gauche" polygons in central surfaces of the second order (May 13, 1850) // Proc. Roy. Irish Acad. 1850. Vol. 4. P. 541–557.
87. On polygons inscribed on a surface of the second order // Brit. Assoc. Rep. 1850. Pt 2. P. 2.
88. On continued fractions in quaternions // Philos. Mag. 1852. Vol. 3. P. 371–373; 1852. Vol. 4. P. 303; 1853. Vol. 5. P. 117–118, 236–238, 321–326.
89. On a proof from quaternions of the celebrated theorem of Joachimsthal (Jan. 27, 1851) // Proc. Roy. Irish Acad. 1853. Vol. 5. P. 71.
90. A generalization of Pascal's theorem (Mar. 16, 1851) // Ibid. P. 100–101.
91. On the nature and properties the aconic function of six vectors (June 23, 1851) // Ibid. P. 177–186.
92. On the connexion of quaternions with continued fractions, and quadratic equations (Dec. 8, 1851 and May 24, 1852) // Ibid. P. 219–221, 299–301.
93. On biquaternions // Brit. Assoc. Rep. 1852. Pt 2. P. 2.
94. On the geometrical interpretation of some results obtained by calculation with biquaternions (Febr. 28, 1853) // Proc. Roy. Irish Acad. 1853. Vol. 5. P. 388–390.
95. On the geometrical demonstration of some theorems obtained by means of the quaternion analysis (Apr. 11, 1853) // Ibid. P. 407–415.
96. A theorem concerning polygonic syngraphy (June 13, 1853) // Ibid. P. 474–475.
97. Lectures on quaternions. Dublin: Hodges and Smith, 1853. LXXII, 736 p.
98. On the integrations of certain equations (Febr. 27, 1854) // Proc. Roy. Irish Acad. 1858. Vol. 6. P. 62–63.

99. On the celebrated theorem of Dupin (May 3, 1854) // Ibid. P. 86–88.
100. On some extensions of quaternions (June 26, 1854) // Ibid. P. 114–115.
101. On some extensions of quaternions // Philos. Mag. 1854. Vol. 7. P. 492–499; Vol. 8. P. 125–137, 261–269; 1855. Vol. 9. P. 46–51, 280–290.
102. On an extension of quaternions // Brit. Assoc. Rep. 1854. Pt 2. P. 1.
103. On the solution of the equation of Laplace's functions (Febr. 26, 1855) // Proc. Roy. Irish Acad. 1858. Vol. 6. P. 181–185.
104. Symbolical extensions of quaternions and geometrical applications of quaternions (June 11, 1855) // Ibid. P. 250, 260, 311.
105. On the conception of the anharmonic quaternion and on its application to the theory of involution in space // Brit. Assoc. Rep. 1855. Pt 2. P. 7.
106. Memorandum respecting a new system of roots of unity // Philos. Mag. 1856. Vol. 12. P. 446.
107. Account of the icosian calculus (Nov. 10, 1856; Febr. 9, 1857) // Proc. Roy. Irish Acad. 1858. Vol. 6. P. 415–416, 462.
108. On a general expression by quaternions for cones of the third order (May 11, 1857) // Ibid. P. 506.
109. On a certain harmonic property of the envelope of the chord connecting two corresponding points of the Hessian of a cubic cone (June 22, 1857) // Ibid. P. 524.
110. On some applications of quaternions to cones of the third degree // Brit. Assoc. Rep. 1857. Pt 2. P. 3.
111. On the icosian calculus // Ibid. P. 5.
112. On the calculation of the numerical values of a certain class of multiple and definite integrals // Philos. Mag. 1857. Vol. 14. P. 375–382.
113. On some quaternion equations connected with Fresnel's wave-surface for biaxial cristals (Febr. 28, 1859 and May 9, 1859) // Proc. Roy. Irish Acad. 1862. Vol. 7. P. 122–124, 163.
114. On some quaternion equations connected with Fresnel's wave-surface for biaxial crystals // Brit. Assoc. Rep. 1859. Pt 2. P. 248.
115. On some quaternion equations connected with Fresnel's wave-surface for biaxial crystals // Nat. Hist. Rev. 1859. Vol. 6. P. 240–242, 365.
116. On anharmonic coordinates (Apr. 9, 1860; May 28, 1860; June 25, 1860) // Proc. Roy. Irish Acad. 1862. Vol. 7. P. 286–289, 329, 350–354.
117. On anharmonic coordinates // Nat. Hist. Rev. 1860. Vol. 7. P. 242–246, 325–327, 506–509.
118. On geometrical nets in space (June 24, 1861) // Proc. Roy. Irish Acad. 1862. Vol. 7. P. 532–582.
119. On geometrical nets in space // Brit. Assoc. Rep. 1861. Pt 2. P. 4.
120. Quaternion proof of a theorem of reciprocity of curves in space // Ibid. 1862. Pt 2. P. 4.
121. Elementary proof that eight perimeters of the regular inscribed polygon of twenty sides exceed twenty five diameters of the circle // Philos. Mag. 1862. Vol. 23. P. 267–269.
122. On a new and general method of inverting a linear and quaternion function of a quaternion (June 9, 1862) // Proc. Roy. Irish Acad. 1864. Vol. 8. P. 182–183.
123. On the existence of a symbolic and biquadratic equation, which is satisfied by the symbol of linear operation in quaternions (June 23, 1862) // Ibid. P. 190–191.
124. On the existence of a symbolic and biquadratic equation, which is satisfied by the symbol of linear or distribute operation on a quaternion // Philos. Mag. 1862. Vol. 24. P. 127–128.
125. On "gauche" curves of the third degree (Apr. 27, 1863) // Proc. Roy. Irish Acad. 1864. Vol. 8. P. 331–334.
126. On a general centre of applied forces (May 25, 1863) // Ibid. P. 394.
127. On the eight imaginary umbilical generatrices of a central surface of the second order (Jan. 11, 1854) // Ibid. P. 471.
128. On Rober's constructions of the heptagon // Philos. Mag. Ser. 4. 1864. Vol. 27. P. 124–132.

ПОСМЕРТНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ

1. Elements of quaternions. London: Longsmans and Green, 1866. in 8°. LIX + 762 p.
2. Elemente der Quaternion: In 2 Bd. / Dt. von Dr. P. Glan, Doc. Phys. Univ. Berlin; Leipzig: Bath, 1882–1884. Bd. 1. LXXIII + 436 S.; Bd. 2. XXIV + 746 S.
3. On a theorem relating to the binomial coefficients (June 26, 1865) // Proc. Roy. Irish Acad. 1867. Vol. 9. P. 297–302.
4. On a new system of two general equations of curvature, including as easy consequences a new form of the joint differential equation of the two lines of curvature with a new proff of their general rectangularity; and also a new quadratic for the joint determination of the two radii of curvature; all deduced by Gauss's second method, for discussing generally the properties of a surface; and the latter being verified by a comparison of expressions for what is called by him the measure of curvature (June 26, 1865) // Ibid. P. 303–305.
5. On the elementary conceptions of mathematics: Seven letters to Viscount Adare (Mar. and Apr. 1835) // Hermathena. 1883. Vol. 3. P. 469–489.
6. Remarks, chiefly astronomical, on what is known

as the problem of Hipparchus (1855) // Ibid. Vol. 4. P. 480–506.
7. Theory of systems of rays. Pt 2 // Hamilton W.R. The mathematical papers. Cambridge: Univ. press, 1931. Vol. 1. P. 88–106.
8. On caustics. Pt 1 (1824) // Ibid. P. 345–363.
9. Optical investigations (1831) // Ibid. P. 364–366.
10. The auxiliary function *T* for a telescope, when the axes of eyepiece is not coincident with, but parallel to, that of object glass (1833) // Ibid. P. 367–368.
11. The auxiliary function *T* for two thin lenses close together in vacuo, and for a single thin lens in vacuo (1833) // Ibid. P. 369–375.
12. The aberrations of an optical instrument of revolution (1833?) // Ibid. P. 376–382.
13. Two letters to Professor Phillips on the construction of object glasses (1843, 1844) // Ibid. P. 383–386.
14. On the improvement of the double achromatic object glass (1844) // Ibid. P. 387–460.
15. Problem of three bodies by my characteristic function (1833) // Ibid. Vol. 2. P. 1–102.
16. On nearly circular orbits (1836) // Ibid. P. 217–237.
17. Theory of the Moon (1837) // Ibid. P. 238–248.
18. Correspondence with J.W. Lubbock (1837) // Ibid. P. 249–283.
19. Calculus of principal relations (1836) // Ibid. P. 297–331.
20. Calculus of principal relations (1836) // Ibid. P. 332–357.
21. Calculus of principal relations. A new series of investigations (1836) // Ibid. P. 358–390.
22. Integration of partial differential equations by the calculus of variations (1836) // Ibid. P. 391–407.
23. On the propagation of light in crystals (1835–1838) // Ibid. P. 413–445.
24. Researches respecting vibration connected with the theory of light (1839) // Ibid. P. 451–526.
25. Propagation of motion in elastic medium – discrete molecules (1839) // Ibid. P. 527–575.
26. Correspondence (1835–1839) // Ibid. P. 583–608.
27. Quaternions (1843) // Ibid. Vol. 3. P. 104–105.
28. Memorandum for John T. Graves (1856) // Ibid. P. 611.
29. Letter to John T. Graves on the icosian (1856) // Ibid. P. 612.
30. Icosian cycles (1863) // Ibid. P. 626–642.
31. The mathematical papers of Sir William Rowan Hamilton. London: Cambridge Univ. press, 1931. Vol. 1, 534 p.; 1940. Vol. 2. 655 p.; 1967. Vol. 3. 672 p.

РУКОПИСИ, ХРАНЯЩИЕСЯ В БИБЛИОТЕКЕ ТРИНИТИ КОЛЛЕДЖА (ДУБЛИН)

1. A criticism on the work by Scheffler, entitled: Der Situations-Kalkul, 1856.
2. An extension by means of quaternions of some propositions laid down, by Gauss in his Disquisitiones Arithmeticae, 1856.
3. Two letters to Professor De Morgan on multiple and definite integrals, 1856. 96 f. p.
4. Letters (with postscript) to Andrew S. Hart. LL. D., S.F.T.C.D., on anharmonic coordinates, 1864. 280 f. p.
5. Lines of curvature and curvatures of surfaces, partly by quaternions, partly by the methods of Monge and Dupin, 1864. 38 p., 130 art.
6. Gauss's measure of curvature of a surface, 1864. 2 p., 11 art.
7. Intersections of normal to quadrics, 1864. 74 p., 262 art.
8. Locus of the vertex of a quadric cone having six-point contact with a curve in space. 1864. 48 p., 224 art.

ЛИТЕРАТУРА О У.Р. ГАМИЛЬТОНЕ

1. *Graves R.P.* Sir W.R. Hamilton. Our portrait gallery, N = 26 // Dublin Univ. Mag. 1842. Jan. – June. P. 94–110.
2. *Cayley A.* Report on the recent progress of theoretical dynamics // Brit. Assoc. Rep. 1857. P. 1–42.
3. *Graves Ch.* Eloge (1865) // Hamilton W.R. The mathematical papers. Cambridge: Univ. press, 1931. Vol. 1. P. IX–XVI.
4. *Tait P.G.* W.R. Hamilton // Encyclopaedia Britanica. 11th ed. London, 1893.
5. *Tait P.G.* Sir W.R. Hamilton // North Brit. Rev. 1866. Vol. 45, Sept. P. 37–74.
6. *Morgan A.de.* Sir W.R. Hamilton // Gentelman's Mag. 1866. Vol. 220. P. 128–134.
7. *Pritchard Ch.* Sir W.R. Hamilton // Month. Not. Astron. Soc. London. 1866. Vol. 48. P. 109–119.
8. *Anderson R.S.* W.R. Hamilton // Dictionary of national biography. London, 1885.
9. *Graves R.P.* Life of Sir W.R. Hamilton, Andrews Professor of astronomy in the University Dublin and Royal astronomer of Ireland, including selections from poems, correspondence and miscellaneous writings: In 3 vol. Dublin: Univ. press, 1882–1889.

10. *Graves R.P.* Hamilton's letters to Lord Adare on the elementary conception of mathematics // Hermathena. 1889. Vol. 6. P. 469–489.
11. *Ball R.S.* Great astronomers, W.R. Hamilton. London, 1895. P. 303–334.
12. *Hawkes H.E.* Note on Hamilton's determination of irrational numbers // Bull. Amer. Math. Soc. 1900. Vol. 7. P. 306–307.
13. *Study E.* Ueber Hamilton's geometrische Optik und deren Beziehung zur Theorie der Berührungstransformationen // Jber. Dt. Math. Ver. 1905. Bd. 14. S. 424–438.
14. *Study E.* Sir W.R. Hamilton // Ibid. S. 421–424.
15. *Miller G.A.* Note on W.R. Hamilton's place in the history of abstract group theory // Bibl. math. Ser. 3. 1910–1912. Vol. 11–12. P. 314–315.
16. *Child M.* Hamilton's hodograph // Monist. 1915. Vol. 25. P. 615–624.
17. *Prange G.* W.R. Hamilton Bedeutung für die geomertische Optik // Jber. Dt. Math. Ver. 1921. Bd. 30. S. 69–82.
18. *Conway A.W.* The influence of the work of W.R. Hamilton on modern mathematical thought // Sci. Proc. Roy. Dublin Soc. 1931. Vol. 20. P. 125–128.
19. *Steward G.C.* On the optical writings of Sir W.R. Hamilton // Math. Gaz. 1932. Vol. 16. P. 179–191.
20. *Sarton G.* Discovery of conical refraction by W.R. Hamilton and Humphrey Lloyd (1833) // Isis. 1932. Vol. 17. P. 154–170.
21. *Prange G.* Die allgemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik // Encycl. math. Wiss. 1933. Bd. 4. S. 505–804.
22. *Полак Л.С.* В.Р. Гамильтон и принцип стационарного действия. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936.
23. *Полак Л.С.* Оптико-механическая аналогия Шредингера // Арх. ист. науки и техники АН СССР. 1936. № 8. С. 29–75.
24. *Synge J.L.* Hamilton's method in geometrical optica // J. Opt. Soc. Amer. 1937. Vol. 27, N 2. P. 75.
25. *Herberger M.* Hamilton's characteristic function and Bruns' eiconal // Ibid. N 3. P. 133.
26. *Synge J.L.* Hamilton's characteristic function and Bruns' eiconal // Ibid. P. 138.
27. *Synge J.L.* Geometrical optica. Introduction of Hamilton's method. Cambridge: Univ. press, 1937.
28. *Conway A.W., McConnel A.I.* Introduction and appendix // Hamilton W.R. The mathematical papers. Cambridge: Univ. press, 1940. Vol. 2: Dynamics. P. IX–XV + 609 – 642.
29. *Whittaker E.T.* The Hamilton revival // Math. Gaz. 1940. Vol. 24. P. 153–158.
30. *Dugas René.* Sur la pensée dynamique d'Hamilton // Rev. Sci. 1941. Vol. 75. P. 15.
31. *Bateman H.* Hamilton's work in dynamics and its influence on modern thought // Scr. math. 1944. Vol. 10. P. 51–63.
32. *Synge J.L.* The life and early workers – Sir. W.R. Hamilton // Ibid. P. 13–24.
33. *Swith D.E.* Sir W.R. Hamilton // Ibid. P. 9–11.
34. Quaternion centenary celebration // Proc. Roy. Irish Acad. A. 1945. Vol. 50, N 6. P. 69–121.
35. A collection of papers in memory of Sir W.R. Hamilton / Ed. D.E. Smith // Scr. math. stud. 1945. N 2. P. 5; N 4. P. 5.
36. *Maxwell C.E.* A history of Trinity College, Dublin, 1591–1892. Dublin: Univ. press, 1946.
37. *Convay A.W.* Hamilton, his life, work and influence // Proc. Second. Canad. Math. Congr., 1949. Toronto: Univ. press, 1951.
38. *Whittaker E.T.* William Rowan Hamilton // Sci. Amer. 1954. Vol. 190. P. 82–88.
39. *McConnel A.J.* W.R. Hamilton // Adv. Sci. 1958. Vol. 14. P. 323–332.
40. *Полак Л.С.* Вариационные принципы механики // Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959. С. 780–879. (У.Р. Гамильтону и его исследованиям посвящены с. 804–825.)
41. *Synge J .L.* Classical dynamics // Handbuch der Physik. Berlin: Springer, 1960. Bd. 8, H. 1.
42. *Полак Л.С.* Вариационные принципы, их развитие и применение в физике. М.: Физматгиз, 1961.
43. *Williams L.P.* The physical sciences in the first half of the nineteenth century // Problems and sources history of science. Cambridge, 1962. Vol. 1. P. 1–15.
44. *Bell E.T.* Men of mathematics. London: Simon and Schuster, 1962. Ch. 19: An Irich tragedy. P. 340–361.
45. *Kargon R.* William Rowan Hamilton, Michael Faraday, and the revival of Boscovichean atomism // Amer. J. Phys. 1964. Vol. 32, N 10. P. 792–795.
46. *Kargon R.* W.R. Hamilton and Boscovichean atomism // J. Hist. Ideas. 1965. Vol. 26. P. 137–140.
47. *Jammer M.* The conceptual development of quantum mechanic. London: McGraw-Hill, 1968.
48. *Lanczoš C.* William Rowan Hamilton – an appreciation // Amer. Sci. 1967. Vol. 55. P. 129–143.
49. *Crowe M.J.* History of vector analysis: The evolution of the idea of a vectorial system. London etc.: Ind. Univ. press, 1967.
50. *Kohn Th., Heildron I.L., Forman P., Allen Jini.* Sources for history of quantum physics // In

inventory and reports. Philadelphia: Amer. Philos. Soc., 1967.
51. *Jourgran W., Maudelstam S.* Variational principles in dynamics and quantum theory. 3th ed. Philadelphia: Saunders. 1968.
52. *Gerber J.* Geschichte der Wellenmechanik // Arch. Hist. Exact Sci. 1968–1969. Vol. 5. P. 349–416.
53. *Buchheim W.* W.R. Hamilton und das Forwirken seiner Gedanken in der modernen Physik // Schr.-R. Gesch. Naturwiss., Techn. und Med. 1968. Bd. 5, H. 1. S. 19–30; 1969. Bd. 6, H. 9. S. 43–60.
54. *Agassi J.* Sir John Hershel's philosophy of success // Historical studies in the physical sciences. London, 1969. P. 1–36.
55. *Dodd G.* Wordsworth and Hamilton // Nature. 1970. Vol. 228. P. 1261–1263.
56. *Lanczoš C.* The variational principles of mechanics. 4th ed. Toronto: Univ. press, 1970.
57. *Полак Л.С.* Вариационные принципы механики // История механики с древнейших времен до конца XVIII в. М.: Наука, 1971. Гл. 8. С. 191–223.
58. *Fackler H.V.* Wordsworth in Ireland 1829: A survey of his Tour Eire // Ireland. 1971. Vol. 6. P. 53–64.
59. *Orange A.D.* The origin of the British Association for the advacement of science // Brit. J. Hist. Sci. 1972. Vol. 6. P. 152–176.
60. *Butt R.E.* Whewell's logic of induction. Foundation of scientific method: The nineteenth century / Ed. R.N. Giere, R.S. Westfall. Bloomington: Ind. Univ. press, 1973. P. 53–85.
61. *Cantor G.* The reception of the wave theory of light in Britain: A case study illustrating the role of methodology in scientific debate // Historical studies in the physical sciences. London, 1975. P. 109–132.
62. *Mathens J.* W.R. Hamilton's paper of 1837 on the arithmetisation of analysis // Arch. Hist. Exact Sci. 1978. Vol. 19. P. 177–200.
63. *Pycior H.* The role of Sir W.R. Hamilton in the development of British modern algebra: Ph.D. diss. Cornell Univ., 1976.
64. *Van der Waerden B.L.* Hamilton's discovery of quaternions // Math. Mag. 1976. Vol. 44. P. 227–234.
65 *Hankins T.L.* W.R. Hamilton // Dictionary of scientific biography. Paris, 1978. Vol. 6. P. 85–93.
66. *Goldstine Hermann H.A.* History of the calculus of variations from the XVII through the XX century. New-York: Springer, 1980.
67. *Hankins T.L.* Sir William Rowan Hamilton. Baltimore; London: Hopkins Univ. press, 1980.
68. *Александрова Н.В.* Формирование основных понятий векторного исчисления // Историко-математические исследования. М.: Наука, 1982. Вып. 26. С. 205–235.
69. *Noether E.* Gesammelte Abhandlungen. 1983. Berlin: Springer–Verlag, 1983. 777 S.
70. Noether Emmy in Bryn Mawr: Proc. Sympos. sponsored by the Association for women in mathematics in honor of Emmy Noether's 100th birthday. Berlin: Springer–Verlag, 1983. 195 p.
71. *Александрова Н.В.* Из истории векторного исчисления. М.: Изд. МАИ, 1992. 152 с.
72. *Полак Л.С.* Уильям Гамильтон. М.: Наука, 1993. 262 с.

УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН*

Арган Ж. 414–416, 432, 433, 436

Бартолинус Э. 186
О'Брайн М. 438
Буль Дж. 438
Бэкон Ф. 188, 190
Бюэ 390–392, 414–416, 432

Галилей Г. 185, 215
Гаусс К. 414
Гершель Дж. 334, 373, 386, 437, 439–441
Гомпертц Б. 415
Грассман Г. 437
Грегори Дж. 422, 436
Грэйвс Дж.Т. 358, 400, 401, 416–421, 426, 431, 436, 438, 442–446
Грэйвс Р.П. 439
Грэйвс Ч. 371, 418–421, 426, 438
Гюйгенс Х. 166, 172, 186, 187, 189, 191, 206, 207, 447

Д'Аламбер Ж.Л. 190
Декарт 9, 185, 191, 207
Доллонд 173, 449
Донкин В. 438
Дюпен Ш. 106, 107

Евклид 189, 431, 432

Жергонн Д.Ж. 414, 432, 433

Кант И. 392, 393
Кармайкл Р. 438
Карно Л. 414
Киркмен Т.П. 438
Кокл Дж. 438
Коши О. 11, 148, 163–165, 174, 178, 358, 400, 432, 438
Кэли А. 358, 436, 438

Лагранж Ж.М.Л. 190, 192, 210–212, 215–217, 220, 221, 231, 234, 285, 287–289, 292, 302, 341, 439–441
Лаплас П. 191, 192, 216, 221
Лейбниц 191
Ллойд Х. 11, 173, 174, 186, 207, 426, 447–456

Мак-Куллах Дж. 11, 165, 174, 194, 207, 422
Малюс Э. 114, 169, 189
Мёбиус А.Ф. 437
Мопертюи П.Л. 192
де Морган А. 402, 414, 421, 432, 438
Мурей В. 414

Ньютон И. 186–188, 192, 209, 215

Ом М. 400–402, 436

Паскаль Б. 369, 370
Пикок Дж. 401, 402, 414, 432, 436
Птолемей 186, 189,191
Пуассон С.Д. 221, 287, 302, 341

Рёмер 185
Роббинсон Г. 426
Рудберг 449, 451, 453, 455, 456

Сервуа Ф. 414, 433
Снеллиус 172, 186, 191, 203, 447
Споттисвуд У. 438

Уоллис Дж. 415, 416, 433
Уоррен Дж. 414, 419, 421, 442

Ферма П. 191, 192
Франсэ Ж.Ф. 414, 432, 433
Френель О.Ж. 10, 11, 149–157, 159–163, 1 172– 174, 187, 207, 447, 448, 454
Фурье Ж.Б. 179

Хэдли 451

Шаль М. 369–371, 437

Эйлер Л. 192, 208, 425, 432
Эри Дж. 11

Юнг Т. 11, 187, 438

* Указатель составлен Н.В. Александровой.

СОДЕРЖАНИЕ

От редактора 7

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

Об одном взгляде на математическую оптику 9

Третье дополнение к "Опыту теории систем лучей" 10

О некоторых результатах, проистекающих из взгляда на характеристическую функцию в оптике 166

ФИЗИЧЕСКАЯ ОПТИКА

Исследования по динамике света 175

Исследования о колебании, связанном с теорией света 177

ОПТИКО-МЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ

Об общем методе представления путей света и планет частными производными характеристической функции 184

О приложении к динамике общего математического метода, ранее приложенного к оптике 210

ДИНАМИКА

Об общем методе в динамике, посредством которого изучение движений всех свободных систем притягивающихся или отталкивающихся точек сводится к отысканию и дифференцированию одного центрального соотношения, или характеристической функции 215

Второй очерк об общем методе в динамике 287

КВАТЕРНИОНЫ

О кватернионах, или о новой системе мнимых величин в алгебре 345

Предисловие к "Лекциям о кватернионах" 392

ДОПОЛНЕНИЯ

Из письма У.Р. Гамильтона Дж. Гершелю 439

Письмо У.Р. Гамильтона Джону Т. Грэйвсу, эсквайру 442

Ллойд Х. О явлениях, наблюдаемых при прохождении света вдоль осей двухосных кристаллов 447

Ллойд Х. Новые опыты с явлениями, наблюдаемыми при прохождении света вдоль осей двухосных кристаллов 454

ПРИЛОЖЕНИЯ

Полак Л.С. Уильям Роуэн Гамильтон (1805–1865) ... 457
Александрова Н.В. Исчисление кватернионов Гамильтона ... 519

Комментарии ... 535

Библиография ... 551

Указатель имен ... 558

Научное издание

Уильям Роуэн Гамильтон

Избранные труды

Оптика,
динамика, кватернионы

Утверждено к печати
Редакционной коллегией серии "Классики науки" Российской академии наук

Заведующая редакцией "Наука – математика, физика, информатика" *В.П. Сироткина*
Редакторы издательства *Г.Г. Гуськов, Н.Н. Лезнова*
Художественный редактор *В.Ю. Яковлев.* Технический редактор *О.В. Аредова*
Корректор *З.Д. Алексеева*

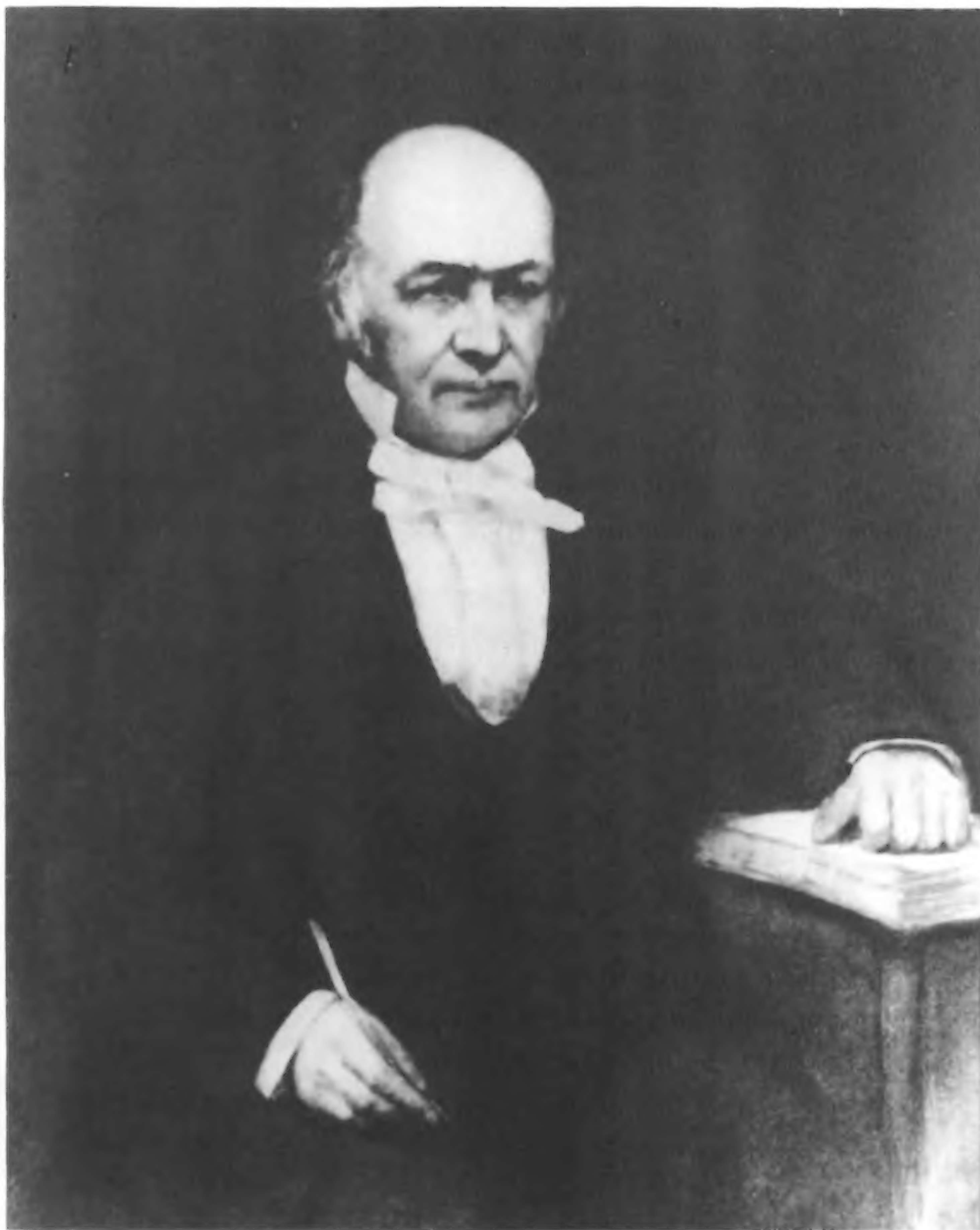
Набор выполнен в издательстве на компьютерной технике

ИБ № 3422
ЛР № 020297 от 27.11.91

Подписано к печати 27.10.94. Формат 70 × 90 1/16. Гарнитура Таймс. Печать офсетная
Усл.печ.л. 41,0 + 0,1 вкл. Усл.кр.-отт. 41,1. Уч.-изд.л. 35,7. Тираж 670 экз. Тип. зак. 3239

Издательство "Наука", 117864 ГСП-7, Москва В-485, Профсоюзная ул., 90

Санкт-Петербургская типография № 1 РАН, 199034, Санкт-Петербург, В-34, 9-я линия, 12



У.Р. ГАМИЛЬТОН
(1805–1865),
портрет

У.Р. ГАМИЛЬТОН

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ





ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»